Nicolaus Cusanus の数学思想と後代の数学者への影響
Mathematical Thought of Nicolaus Cusanus and Its Influence on Later Mathematicians

四日市大学関孝和数学研究所　但馬亨
Toru TAJIMA, Seki-Kowa Institut of Mathematics,
torutajima@gmail.com

はじめに

17 世紀のライプニッツが微積分研究を進展させることができたのは中世のニコラス・クザーヌスの研究に負うものが大きい．それというのも中世の大学以来伝統的に継続されてきたアリストテレスを筆頭とするギリシャ自然哲学の研究は無限忌避を本質的に含有するもので，ライプニッツの諸研究には直接的にはつながるものではない．クザーヌスなどの中世の無限論の展開を受けてはじめて，ライプニッツを筆頭とする 17 世紀の解析革命が生じたという数学史のヒストリオグラフィー（歴史の叙述方法）は現代においても十分に普遍的である．また最新の中世数学史・論理学史の研究においてもクザーヌス研究の具体的にどの部分がライプニッツをはじめとした後世の数学者に影響を与えたかの詳細なトレースが行われており，[Murawski 2016]のような詳細な研究が存在する．

本論では，まずこれらの先行研究の方法に依拠する形で，後年のライプニッツに与えた影響という点で最高傑作だとおぼしき，円の求積理論についての代表作を読解し，中世数学の独自性がどの点まで 17 世紀の解析革命と近似していたのかを評価する．

クザーヌスの生涯

クザーヌスとはなにものか？中世数学の重要人物である彼の実体をまず把握してみよう．ニコラウス・クザーヌス（Nicolaus Cusanus，1401 - 1464）は，中世ドイツの哲学者・神学者・数学者である．ドイツのモーゼル河畔の港町クース(Kues)の裕福な船主の家庭に生まれ，領主の援助を得てオランダに遊学，敬虔主義的な教育を受ける．ハイデルベルク大学学芸学部で自由七学芸を学び，翌年にはパドヴァ大学に移り，1423 年教会法の博士号を取得する．ここまでが若き日の修業時代となる．

1425 年再びドイツに戻ってからはケルン大学にて教会法を講じつつ，アルベルトゥス・マグヌス，ライムンドゥス・ルルスの思想に触れる．その後 1430 年司祭に叙階され，バーゼル公会議（フィレンツェ公会議）では公会議派の立場で活躍，高名を得るが，後に教皇派に理解を示すようになる．東西教会の和解（Ecumenism）のためにも活躍し，教皇使節としてコンスタンティノープルを訪問することもあった．1448 年に枢機卿，1450 年ブリクセン（イタリア名：ブレッサノーネ）大司教となる．最後は友人法王ピウス 2 世の十字軍構想に従い，病身を押してローマを出立するが 1464 年トーディにて死去する．

以上がクザーヌスの社会的生涯の概説であった．総じて総合的な評価として当時のロー

マ教会の要職をこなす優秀な宗教的実務家でありながら，独自の研究も展開する精力的な神学者として語られることが多い．他にも後のライプニッツとの共通点としてエキュメニニズムのへの関心という興味深い共通項があるが，クザーヌスの生涯がどのように中世数学の研究と関連付けられていくのであろうか．つづいて高瀬正仁氏の評価を紹介して論じてみたい．

高瀬正仁氏のクザーヌス批評

　まず高瀬氏の『微分積分学の史的展開』の一節に以下の文言がある．

クザーヌスの影響を語る

　曲線に接線を引くという場合には，dx や dy は必ずしも無限小量というわけではなく，有限量が考えられているのであるから，視覚的にはむしろ大きければ大きいほどわかりやすくなる．曲線 $f(x, y) = 0$ が与えられたというとき，x や y の文字は変化量を表しているわけではないことも，一度は確認しておかなければならないことである．それらを変化量と見て，指定された方程式により相互に束縛し合いながら変化する状態を思い浮かべても，それはそれでさしつかえないが，力学の問題を考える場合ならともあれ，接線を引くということを考える場面ではその必要はない．これを要するに，接線法の考察では変化量も無限小量も不要ということである．ライプニッツが遂行したのはただ，曲線に接線が引かれている幾何学的情景を心に描いて観察し，接線を引くために必要不可欠な計算規則を抽出したことだけであった．

この部分の意味は 17 世紀後半の数学の焦点が代数的表示式である関数の概念整備よりも，図形的に理解される幾何学的概念ならびに操作の拡張にあったことを示している．『関数(Lat. functio)』という語を生んだのはライプニッツその人であるが現代のわれわれの持つような概念整備が行われたのは 18 世紀以降の展開であり，ライプニッツは予言的に言葉を開発したに過ぎない．比喩的に表現するならば，新しい器は作られたものの，そこに盛られる料理は旧態依然としたものであったと言える．続けて以下の記述がある．

　もっとも，このような仮想上の作業が可能になるためにはあらかじめ接線が引かれていなければならないが，では一般に接線というのはどのようなものと考えられていたのであろうか．あらためて再考すると，まさしくここが最大の論点である．接線の観念が確立されていなければ，そもそも接線法の話は始まりようがないからである．
　この論点についてはこれまでに何度も繰り返して言及したことがあるが，ライプニッツ自身，「ライプニッツ 1684（注：『学術紀要』(Acta Eruditorum)，「分数量にも無理量にも

*さまたげられることのない極大・極小ならびに接線を求めるための新しい方法，およびそれらのための特異な計算法」（以下「新方法」），pp.467-473)」の中で「接線を見出すということは本来，曲線上の無限に小さい距離を持つ 2 点を結ぶ直線を引くこと」であると言っている．これを言い換えると，**曲線と同等である無限個の角を持つ多角形の 1 辺を引くこと**ということになるのであるが，このように曲線を見出す視点をライプニッツに提供した人物こそ，ニコラウス・クザーヌスである．*（高瀬正仁著『微分積分学の史的展開』，68 頁）

高瀬氏が強調しているのは，まずは何をもって接線というのかというこの一点である．このことの明確な議論の開始として指摘されれのは，1684 年のライプニッツの有名論文である「新方法」であり，この中での重要なオペレーションとして，*「**曲線上の無限に小さい距離を持つ 2 点を結ぶ直線を引くこと**」*という言葉が強調される．そこで，この操作の起源として同氏によって提示されているのが，他ならぬクザーヌスなのである．さらに黒字で強調されているが「***曲線と同等である無限個の角を持つ多角形***」とは何かという問いが残る．これこそ円であり，円を無限多角形として近似している人物であるというライプニッツによるクザーヌス数学の認識がここに立ち現れている．厳密には，クザーヌスの諸著作の中に「円とは無限多角形である」という表現自体は見つけられないのであるが，近似的な計算操作・図形操作を主題的に取り上げるクザーヌスの本質をライプニッツは見事に喝破しているといえるだろう．

クザーヌスの従来の数学史的評価

ここから先のライプニッツらに甚大な影響を与えたクザーヌスの数学著作そのものに考察を移していく．ライプニッツの数学史研究でも著名な J. Hofmann はクザーヌスのラテン語著作からドイツ語への翻訳と注釈を行って『クザーヌス数学著作集第 1 巻』（*Die mathematischen Schriften*, Bd. I)を残した．その序文(Einführung)でまとめているので，以下箇条書きで示す.

1. クザーヌスの数学思想の位置づけ

中世末からルネサンス初期にかけて，数学を神学的・哲学的探究と結びつけて展開した数少ない思想家の一人．古典幾何学（ユークリッド，アルキメデス）に依拠しながら，「無限」や「近似」といった近代的な発想を導入している点が注目される．

2. 幾何学的比喩と「無限」

円と正多角形の関係を典型例として用いる．正多角形の辺数を無限に増加させれば円に近づく，という比喩．これは「有限が無限に収束していく」プロセスの象徴として，のち

の極限概念を想起させる．彼はこの操作を「思弁的に」扱うが，数学史的には極限操作の先駆的イメージとみなされる．

3. 円の正方化（Quadratura circuli）
クザーヌスは円の正方化に強い関心をもち，複数の著作で取り組んでいる．方法は現代的に見れば厳密さを欠くが，近似計算や図式的推論を通じて「円と直線」「曲線と多角形」の相互変換を考察．この関心は，ルネサンス以降の「近似法」「無限級数展開」へとつながる背景を形成した．

4. 幾何学的変換
クザーヌスは多角形や立体の変換（Transmutationes）に関する議論も行った．例：多角形を別の図形に写像して面積を保存する，あるいは直線・曲線を対応づけるといった試作．これはのちの射影幾何学や積分幾何を先取りする「発想的試み」として評価される．

5. 数学的方法の特徴
厳密な証明よりも「象徴的洞察」を重視する．ユークリッド幾何を土台にしつつ，しばしばそれを逸脱して大胆な近似やアナロジーを導入．数学を「思索の道具」とみなし，経験的測定や実用計算よりも，無限の思考実験を志向している．

6. 数学史的評価
近代微積分の直接の源泉ではないが，極限概念・無限分割・近似の思想を哲学的レベルで展開した点に独自性.「誤りの多い技術的議論」よりも，数学を哲学と結びつけて「無限を考察する場」としたことが歴史的意義とされる．こうした発想がのちにカルダーノ，ケプラー，そしてライプニッツらへと間接的に影響を与える背景を形作った．

このように，J. Hofmann の研究は 1950 年代という時代性があり数学著作の網羅的完訳は完成していないながらも，総合的にクザーヌスの数学を見渡した傑作であり，今なお示唆するものが大きい．[1]

---

[1] クザーヌス研究にはここで述べた J.Hofmann の他にもう一人のホフマンが存在する．それぞれの研究領域は以下のように整理される．

- Ernst Hofmann (1880-1952)：ハイデルベルク出身の正統派の文献学者・古典哲学者．Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff に文献学，Adolf von Harnack に神学を習う．ハイデルベルグ時代，ErnstCassirer や三木清などとも知己の関係になる．ハイデルベルクはクザーヌス研究のメッカであり，アリストテレス自然哲学と関連づけたクザーヌス論がある．

クザーヌスの数学著作集

ここで現在研究目的に耐えるクザーヌスの数学著作集の解題を行うと以下の二種が挙げられる.

1. J.Hofmann の独語訳 *Die mathematischen Schriften*, Nikolaus von Cues, 1952.
2. ハイデルベルクアカデミーの最新版クリティカルエディション
   Scripta mathematica per Nicolai de Cusa (*Opera ominia* XX); edidit Menso Folkerts, Hamburgi: In aedibus Felicis Meiner , 2010.

前者は先に上げた J.Hofmann の研究でありその意義も先に論じたとおりだが,いかんせん原文のラテン語を持たぬものであるので,精密な一次文献を引用したい場合においては 2010 年出版の後者を引かなければならない.後者の完成度は非常に高いもので,前者には収録されていない記述も多く現代のクザーヌスの数学研究はこの後者の分析から初めて学問的意義をもつといってよいだろう.

円とは無限多角形であるという表現の出自

先にライプニッツの「新方法」にある「曲線と同等である無限多角形」ひいては「円とは無限多角形」であるという論点について言及し,実のところこれに相当するクザーヌス本人の言はないと指摘した.この点は事実であるが,この解釈は完全にライプニッツが独自に展開した誤解や思い込みではなく,このように解釈を拡張する余地のあるクザーヌスの記述は存在する.それは『円の求積』(*Quadrata circuli*)という断片的著作の中に含まれている.この著作の特徴と執筆時期などの推測には複数の説があるがそれらを箇条書きにすると以下のようになる.

『円の求積』の書誌的分析の変遷

- この小著は著作年月日も何も記されていない.[Hofmann 1952]では 1450 年 12 月に執筆されたと推測された.
- ところが,F. Nagel は書誌学的研究から彼の意見に反して 1453 年 7 月から 8 月のあいだにプロイセンで書かれたことを主張([Nagel 1984], pp.70-73.)

- Joseph Ehrenfried Hofmann (1900-73):ミュンヘン出身の数学史家,とりわけ *Leibniz in Paris* などが有名だが先のクザーヌス数学著作集のドイツ語訳がある.

- さらに『円の求積』と『数学的補遺』(*Complementa mathematicorum*)との間に非常に大きな類似があることも指摘．すなわち『円の求積』は，より大部の『数学的補遺』の完成までの補助的著作であることが判明.

ここで『円の求積』の書誌的分析は 2010 年版のクリティカルエディションの編集者解題の p. XXX から XXXI によると，以下のように精密に分類されている．まず，この小著は二つの手書き写本 **Em** (Caroloruhensis bibliothecae Badenae) と **Y** (Codex bibliothecae quae vocatur New Haven, Yale Medical Library, The Historical Library, Ms. 24)によって伝えられており，さらに一冊の活字本 **n** (editio Norimbergensis, anno 1533 typis expressa etc.)によっても知られている．**n** はまた別の活字本 **b** (editio Basiliensis, quam Henricus Petri anno 1565 typis exprimemdam curavit etc.)に依拠している．**Em** 写本には多くの本文内や余白への注記があり，とくに最初の葉に著しい．**Y** 写本には二つの余白注記がある．**Y** の本文は **Em** よりやや優れているが，**Y** においては本来置かれるべき図が配置されていない．活字版 **n** は共通の写本に依拠しているが，各自の伝承のあり方によって異なっている．さらに，「円の求積」からの長い抜粋を **F** (Florentius, bibliotheca nationalis centralis, Conv. Soppr. J. IX. 16)写本に収められた小冊子の中に見ることができる．その小冊子は『クザーヌスの思想による円の求積』（*Quadratura circuli ad mentem Cusani*)という題で著者不詳である．これは活字本 **n** にではなく，当時すでに失われていた写本をもとにしていたようであり注目に値する.

『円の求積』の分析

以下，一部であるが上記の『円の求積』のテキスト冒頭部分を読んでクザーヌスの数学的主張を理解してみたい．はたしてライプニッツとの類似性を見出すことができるかというのが争点である．書き出しは手紙の返信の様態をもっている.

『円の求積』*DE CIRCULI QUADRATURA NICOLAI DE CUSA CARDINALIS*
(*Opera Ominia* XX, pp. 51-67)

あなたは，「円の正方形化（circuli quadratura)」について書いたさまざまな著者たちの見解の混乱の中に巻き込まれていると述べ，いま余暇のある私に，その知りうる範囲での十分な理解を教えてほしいと求めている．ゆえに，私はこの件について自らの意見を一つの命題（propositio）のかたちで述べよう．ただしこのことを，あなたのために行ったものとして受け取ってほしい——すなわち，この比喩（assimilation）を通じて，数学的な領域を離れ，より容易に神学的な領域へと移ることができるように，という意図である.

ここからクザーヌスの目的は円の正方形化という古典的テーマをめぐる論者たちの混乱を調停することが目的であることが分かり，さらに数学的目的を超えて神学的な意義の確認も見て取れる．

PROPOSITIO　命題

もし，ある三角形の周辺の長さ（peripheria trigonii）に等しい円周が与えられるならば，その円の半径（semidiameter）は，三角形の中心から，任意の一辺の一角からその辺の四分の一だけ離れた点まで引かれた線よりも，自身の五分の一だけ長い．
円の正方形化（quadratura circuli）を認める者たちがいる．そして彼らは必然的に，円の周長（peripheria circuli）が多角形の周長と等しくなりうることも認めねばならない．というのも，円はある長方形に等しいとされるからである——その短辺は半径（semidiameter）であり，長辺は半円周（semicircuferentia）である．したがって，もし円に等しい正方形がこのような長方形に変換されるなら，そこでは曲線に等しい直線が得られることになる．このことから，円と多角形の周長の等しさへと帰着することになるのは自明である．

冒頭部分が数学的に何を指し示すかは判然としないが，その後には円の正方形化を認める論者の意見を紹介しており，彼らの議論の到達する地点として「*もし円に等しい正方形がこのような長方形に変換されるなら，そこでは曲線に等しい直線が得られることになる*」とまとめられている．

彼ら（円の正方形化を認める者たち）は，次の議論もまた認めている．この議論なしには，彼らの立場は成り立たない．すなわち——「より大きいものとより小さいものが与えられるところには，等しいものもまた与えられる（ubi est dare magis et minus, est et dare aequale）」という原理である．なぜなら，円に対してより大きい正方形（外接するもの）が与えられ，またより小さい正方形（内接するもの）も与えられるなら，その中間に，外接も内接もしないが，同時に両者の性格を兼ね備えた，等しい正方形が存在するはずだからである．この同じ理屈を，彼らは円周と多角形の周長にも適用する．すなわち——三角形に外接する円の周長は，三角形の周長より大きく，また三角形に内接する円の周長は，それより小さい．したがって，その中間に，三角形の周長と等しい円周が与えられる．この円は，外接円でも内接円でもなく，両者であると同時にその中間にある円なのである．

ここでの議論は正方形化が可能な論者によればアルキメデス的議論として，ある円の外接三角形と内接三角形があればかならず中間量を円周とするような円が存在することを認めるものである．この中間的な円は外接と内接双方の性質をもっているとされる．

円の正方形化を否定する者たちもいる．彼らは先に述べたすべてのことを否定する．というのも，彼らはこう言うのである――数学においては，「より大きいものとより小さいものがあるところには，等しいものもある」という議論は成り立たない，と．たとえば，「直角よりも小さい入射角（angulus incidentiae）が与えられる」とし，また別の「やはり直角より小さい角」が与えられるとしても，入射角と直角とはけっして等しくはない．むしろ直角は（他の）直角より大きい，ということなどありえないのである．したがって，互いに通約不能な量（quantitates incommensurabiles）のあいだでは，この「大小から等しいものが導かれる」という理屈は通用しない．もし入射角が直角よりもある部分だけ大きく，またある部分だけ小さいとしたら，そのときには等しいものが与えられることになろう．しかし入射角は直角と比例関係にないため，それは直角の何分のいくつかだけ大きいとか小さいということが不可能である．ゆえに，両者は決して等しくなりえない．そして，円形の面と直線的な面とのあいだに比例が成立しないのと同じように，入射角と直角とのあいだにも比例が成立しない．したがって，この議論（すなわち「大小があれば等しいものもある」）は，ここでも通用しないのである．

次の論者としてクザーヌスが引くのは，正方形化を否定する論者の意見である，ここでのポイントは円周の先の議論を離れて，入射角と直角の大小関係が扱われる．それは「通訳不能な量」間で起きる量比較が成立しないと断じるものであり，その根拠として入射角と直角が比例関係にない（通約不能）であるという点を指摘している．比べるためには共通の尺度を持っていることが前提として示される．

このことは次のように明らかである．他の量へと分解（resolubilis）できるあらゆる量は，その各部分が他の量の部分としても成り立つという関係に必ず置かれる．なぜなら，「全体」とはその部分以外の何ものでもないからである．しかし，円から直線によって切り取られた小月形（lunula）は，その入射角（anguli incidentiae）において，すなわちその量の部分として，直線的な図形（rectilinea）に還元することができない．したがって，その全体としてもまた，直線的な図形へは還元できないのである．ところで，もし円が正方形に還元可能であるならば，必然的に，その一部である小月形もまた直線図形へ還元できねばならない．しかしそれは不可能である．ゆえに，それ（円を正方形に還元すること）もまた，そこから帰結する限りにおいて不可能である．したがって，半円は直線的な形に還元できず，したがってまた，円全体も，あるいはそのいかなる部分も，直線的図形に変換することはできない．

ここでは，先ほどの否定論者の別の根拠として，小月形の議論が展開されている．小月形とは円の一部分として切り取られた図形であり，この図形全体が矩形に還元できないこと

が指摘される．もし円の正方形化が可能であれば，円の一部をなしているこの小月形も同様に矩形化することは可能であるはずだが，実際この円の一部の矩形化はできない．したがって，全体である円も矩形化できず，他の円の部分とされる図形（小月形，半円など）も同様に正方形化はできないと主張しているのである．なお，この後も諸論者の長大な主張が続くが，最終的にクザーヌスの意見が表明される箇所のみを引用してみる．

そして，私はこの後者の立場（すなわち，円と正方形のあいだに分数的な比例がないとする立場）のほうが，より真実に近いと考える．なぜなら，多角形の図形（figurae polygoniae）は，円形の図形（figura circularis）とは同一の量的種（genus quantitatis）に属さないからである．したがって，与えられた円に対して量的に等しい多角形を見いだすことができたとしても，そこでは次の原理が成り立つだろう——すなわち，「より大きいものとより小さいものを受け取る領域（in recipientibus maius et minus）では，単純な意味での"最大"に到達することはできない」．これは，多角形の包容力（capacitas polygonarum）が常により大きいものとより小さいもののあいだにあるために，決して円の包容力（capacitas circularis）に到達しないのと同じである．ちょうど，数（numeri）が単位（unitas）の包容力に到達せず，また，複数のもの（multiplicata）が単純なもの（simplex）の力に到達しないのと同様である．

ここでのクザーヌスの主張は明白である，先ほどの否定論者の言う通訳不能性をパラフレーズして，「多角形の図形と円形の図形とは同一の量的種にない」と結論しているのである．「多角形の包容力」と「円の包容力」という言葉が続いて出るが，基本的に異なる種類の量であって両者を統一的に扱うことについてはクザーヌスは最後まで否定的なのである．ここから何が言えるだろうか．ライプニッツの解釈として円と無限多角形を同等のものであるという議論が 17 世紀に生まれた，と先に見たがあくまでもこれはライプニッツの解釈に過ぎないのであって，クザーヌスは量的には両者は異なるものであるという見解を保っていたのである．

結びとして

ライプニッツの数学的発想の根源をクザーヌスに追い求める旅はかくして一つの終結をみた．本論で追及することのできなかった両者の数学的関係の中で重要な論点が二点ある．それは，

1. ライプニッツの可能無限と実無限の二分法の起源はどこか？
2. 数学的無限については，可能無限という考え方をライプニッツは戦略的に取り続けるがこの発想はどこにあるのか？

という点である．たとえば数学的な「上に有界な無限」といった概念は，有限と無限の中間のポジションとして人間の概念的操作を前提としたものであるが，その一方で神の万能性として解釈される神学的無限性は神学的には実無限の地位を維持しており，ライプニッツの無限性の特徴の一つである．この二分法の考え方はクザーヌスから学んだのか，それともそうでないのか．こういった疑問を解明するには，実際にクザーヌス著作集を読解してライプニッツの思想遍歴を追体験するより他の解決策はないのである．17 世紀数学と中世数学との連続を精密に議論するにはいまだ読み解かなければならない文献が多々あるといえよう．

文献表：

[Hofmann 1952] Joseph E. Hofmann, *Die mathematischen Schriften*, Nikolaus von Cues; übersetzt von Joseph E. Hofmann; mit einer Einführung und Anmerkungen versehen von Joseph Ehrenfried Hofmann, F. Meiner, 1952.

[Makovský 2019] Jan Makovský, "Cusanus and Leibniz: Symbolic Explorations of Infinity as a Ladder to God" in *Nicholas of Cusa and the Making of the Early Modern World,* pp.450-484, Brill, 2019.

[Moran 2007] Dermot Moran, "Nicholas of Cusa and Modern Philosophy" In *The Cambridge Companion to Renaissance Philosophy,* pp.173-192, Cambridge University Press, 2007.

[Murawski 2016] R. Murawski, BETWEEN THEOLOGY AND MATHEMATICS. NICHOLAS OF CUSA'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS, in *STUDIES IN LOGIC, GRAMMAR AND RHETORIC* 44 (57), pp. 97-110, 2016.

[Nagel 1984] Fritz Nagel, *Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften*

[Rabouin 2011] David Rabouin, ``Infini mathématique et infini métaphysique : d'un bon usage de Leibniz pour lire Cues (... et d'autres)'' dans la *Revue de Métaphysique et de Morale,* N° 2, pp. 203-220, Presses Universitaires de France, 2011.

[Roth 1997] U. Roth, ``Die Bestimmung der Mathematik bei Cusanus und Leibniz'', *Studia Leibnitiana*, Bd. 29, H. 1, pp. 63-80. Franz Steiner Verlag, 1997.

[酒井 2013] 酒井潔『ライプニッツのモナド論とその射程』，知泉書房，2013.