『研幾算法』から『括要算法』の構成を探る試論

電気通信大学大学院　佐藤賢一

はじめに

第 35 回数学史シンポジウムにおいて報告をさせて頂く貴重な機会を頂き、報告者は以下の既発表論考・記事を再構成した内容を基にして報告を行った。

佐藤[1]：佐藤賢一「建部賢弘著『研幾算法』の研究」『科学史・科学哲学』第 13 号 (1996 年)
佐藤[2]：佐藤賢一「建部賢弘『研幾算法』による弓形の弧長の導出式の復元について」『電気通信大学紀要』第 30 巻(2018 年)
https://uec.repo.nii.ac.jp/records/8586
佐藤[3]：佐藤賢一「建部賢弘『研幾算法』による弓形の弧長の導出式の復元について（続）」『電気通信大学紀要』第 34 巻(2022 年)
https://uec.repo.nii.ac.jp/records/10142
佐藤[4]：佐藤賢一「和算再発見」『日経サイエンス』2025 年 1 月号

今回の報告をそのまま報告集に再録してしまうと、インターネット上で簡単に参照できる既発表論考(佐藤[2]と佐藤[3])の大半を要約するだけになってしまう。文字情報のみを参照して頂く方には不要な重複となりかねない。そこで本稿では報告時に頂戴したコメントや質疑の内容、更にはシンポジウム当日のコミュニケーションを契機として行った考察も若干交えて本稿を作成することとした。報告当日には言及できなかった、報告者の結論に至るまでの試行錯誤、推論の経緯や参考にした史料等々、研究の舞台裏の事情も整理して提示したい。過去の数学文献に明示的に記載されず、隠されていたアルゴリズムを和算史研究者が仮説的に「復元」をする際、具体的にどのような作業を行っているのかを例示することも、何がしかの意義はあろうと考える。

1.　報告の概要

本報告の主題は、和算家・建部賢弘（1664−1739）の著作[1]『研幾算法』（1683 年）第 1 問の解答として用いられている、弓形の弧長の自乗を示す近似式を構成するアルゴリズムの復元である。以下、x を弓形の矢としてこの近似式を F(x)で表記する。

---

[1] 本書『研幾算法』は建部賢弘の単著として刊行されているが、その本文に零約術や環矩術等の技法を「師伝」(関孝和の成果)として言及している。そこで以下の報文では『研幾算法』の内容を関も共有していたとみなし、随所で「関・建部」という表記を用いる。

『研幾算法』第1問の本文には5次多項式の F(x)から派生した式(後述)しか示されていない。佐藤[1]では『研幾算法』の原文分析から F(x)が用いられていることと、容易に弧長を計算できる特定の弓形($x = \frac{1}{50}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{9}{25}, \frac{1}{2}$ の場合)の弧長を用いて F(x)が構成されていることを指摘した。

佐藤[2]では F(x)がファンデルモンド行列を用いた多項式補間 [2]に基づいて構成されていることを明らかにした。しかし、各 x を F(x)に代入して導かれる弧長の自乗を子細に調べると、当時用いられていたと推定される計算技法「環矩術」から導出される値と僅かながら異なっていることも判明した。

これを承けて佐藤[3]では、F(x)の各係数を決定するアルゴリズムにおいて、2 元 1 次の不定方程式の整数解を求める技法が用いられたという仮説を提示した [3]。

以上のアルゴリズムの復元仮説に基づくと、『研幾算法』第1問の解法に主として用いられた諸技法(多項式補間・不定方程式の整数解導出・円理の準備としての角術 [4]・円理)は『括要算法』全4巻の中にいずれも収録されていることが確認される。従来、『括要算法』の4巻構成は各巻の内容が独立して相互の連関性は無いと考えられていたが、円理の完成に必要な技法を集成しているという解釈を取れば、その内容には一貫性のあることが主張できることを佐藤[3]と佐藤[4]で言及した。

以下、この概要をさらに補足する。

2. 『研幾算法』第1問で提示される弓形の弧長を示す近似式の原文

本報告の抑もの出発点である『研幾算法』第1問の問題文と術文 [5]は、以下のものである。

[問題文]今有弧形只云矢（若干）弦（若干）問積幾何（乃円率用周三百五十五尺径一百一十三尺）

[問題文の意訳]今、弓形がある。その矢を x、弦を a としたとき、その面積 S はどれほどか。(円周率は近似値 $\frac{355}{113}$ を用いよ。)

[術文]術曰立天元一為積以矢相乗得数以一十六乗之得数寄甲位〇列矢自之得数四之加入弦冪共得数寄乙位〇亦列矢自之得数八之以減乙位余以弦相乗加入甲位共得数自之寄丙位〇矢七乗冪乙位相乗（一億八千三百二十七万五千五百二十段）乙位四自乗（八十一段）右二位相併共得数寄丁位〇矢九自乗（五十七億三千三百六十一万三千五

[2] 佐藤[2]の本文では「多項式補間」の意味で「ラグランジュ補間」の用語を使っていたが、正確さに欠けるので、佐藤[3]以降では「多項式補間」に統一している。

[3] この技法は一次の合同式の解法と同等で、『研幾算法』第49問で用いられている翦管術の基礎となっている。

[4] 「角術」は正多角形に関する計算問題で、『研幾算法』第2問として出題されている。

[5] 解答を導くための説明または数式の指示を記した文のこと。

百六十八段）矢五乗冪乙位冪相乗（二億六千一百二十一万七千五百三十六段）矢三乗冪乙位再乗冪相乗（九千六百三十三万七千六百六十四段）矢冪乙位三乗冪相乗（七千三百五十七万三千零六十八段）右四位相併共得内減丁位余寄左〇列矢三自乗之以乙位相乗亦以丙位相乗得数以七千三百五十四万九千四百四十乗之与寄左相消得開方式平方開之得積合問

[術文の現代的数式を用いた意訳]　以下の S に関する 2 次方程式を解いて S を得る。

$$-34180225024x^{10}-20658110208a^2x^8-9657023232a^4x^6-1567691552a^6x^4-22008a^8x^2+81a^{10}$$
$$-2353582080ax^3(16x^4 - a^4)S+18828656640x^4(4x^2+a^2)S^2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad \text{(A)}$$

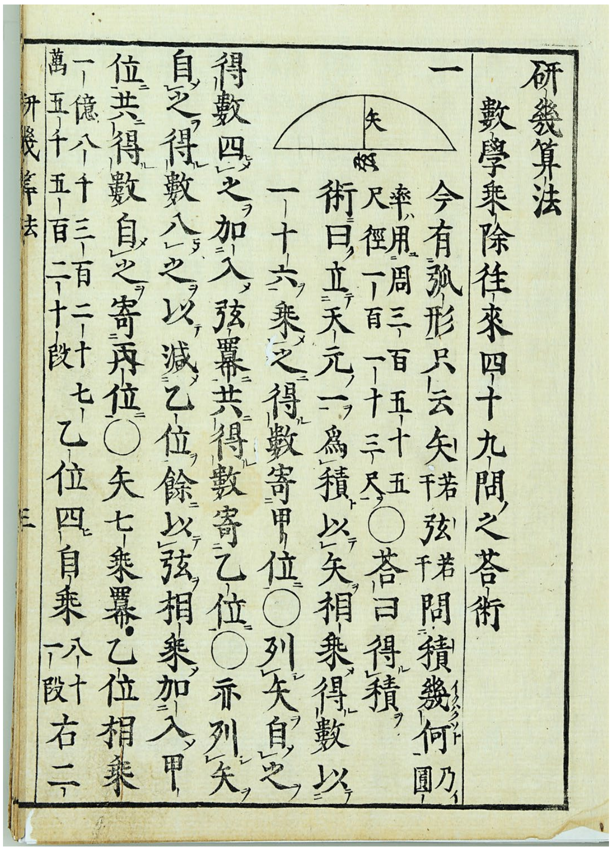
研幾算法
數學乗除往來四十九問之答術
一 今有弧形只云矢若干弦若干問積幾何乃圓率用周三百五十五尺径一百一十三尺○荅曰得積
術曰立天元一為積以矢相乗得數以一十六乗之得數寄甲位○列矢自之得數四之加入弦冪共得數寄乙位○亦列矢自之得數八之以減乙位餘以弦相乗加入甲位共得數自之寄丙位○矢七乗冪・乙位相乗一億八千三百二十七萬五千五百二十段乙位四自乗八十一段右二

図 1　『研幾算法』第 1 問の冒頭部分(九州大学附属図書館桑木文庫所蔵)

この問題に関する関・建部の残した記載は、わずかにこればかりである。建部賢弘にせよ、その師である関孝和にせよ、彼らによる自筆草稿、計算ノートの類は一切残っていない。また、後世の和算家もこの問題と術文について、その数式を直訳する以上の解説や言及を全く残していない[6]。すなわち、この計算式は完全に和算史の文脈では孤立・隔絶しており、現

[6] 著者・年紀不明『研幾算法演段諺解』(東北大学附属図書館所蔵)はその例外であるが、第 1 問については数式の直訳を越える注釈は記されていない。

代の我々は上記の方程式(A)のみを情報源として、その背後に隠れているアルゴリズムの復元をしなければならない状況に置かれている。

報告者が仮説として提示したアルゴリズムの復元計算は以下のようになる。

3. 『研幾算法』第 1 問の解答から復元したアルゴリズムの概要

弓形を切り取った元の円の直径を D（以下、これを 1 とする）、弧長を L としたとき、『研幾算法』と同時代の和算家たちも知っていた式として、

$$S = \frac{LD}{4} - \frac{a(D-2x)}{4} \cdots\cdots \quad \text{(B)}$$

がある。ここで、方程式(A)の S に $D = 1$ とした(B)を代入すると、以下の L^2 に等しい 5 次多項式 $F(x)$ が得られる。($L^2 = F(x)$)

$$F(x) = \frac{1}{113^2}\left(-\frac{9}{40} + \frac{6131089x}{120} + \frac{752638x^2}{45} + \frac{340127x^3}{30} - \frac{5966x^4}{3} + \frac{699904x^5}{45}\right)$$

L^2 の真値は $\arccos^2(1 - 2x)$なので、これと $F(x)$の差を $G(x)$とすると $F(x)$の誤差を評価できる。$G(x)$ ($0 \leqq x \leqq 0.5$)のグラフは以下の図 1 のようになり、$x = \frac{1}{50}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{9}{25}, \frac{1}{2}$ において $G(x) = 0$ となることが確認できる [7]。

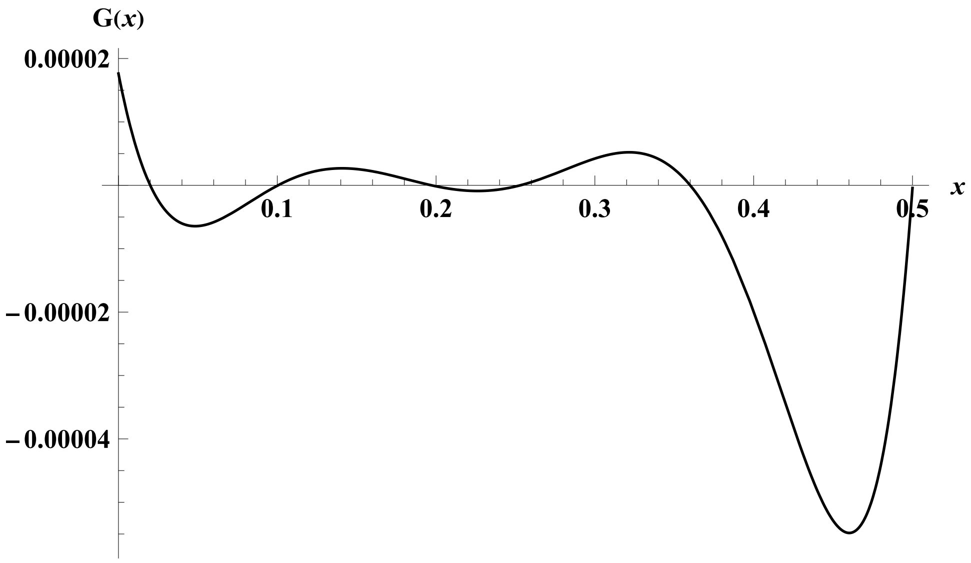

図 2　$G(x) = \arccos^2(1 - 2x) - F(x)$

ここで $G(x) = 0$ となる零点(x_1, ……, x_6)を用いて $F(x)$を構成できる。すなわち、$F(x)$の係数を $\frac{a_0}{113^2}, \ldots\ldots \frac{a_5}{113^2}$ とおき、これらを成分とする列ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots\ldots, a_5)^t$ を作り、各零点

[7] 佐藤[1]は、ここまでを明らかにした。

x_iから得られる$\{1, x_i, x_i^2, x_i^3, x_i^4, x_i^5\}$を各行とするファンデルモンド行列$A_6$を作る。このとき、次の式が成立する。(右辺の列ベクトルは $y_i = 113^2 \cdot F(x_i)$ を成分とする。)

$$A_6\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{50} & \left(\frac{1}{50}\right)^2 & \left(\frac{1}{50}\right)^3 & \left(\frac{1}{50}\right)^4 & \left(\frac{1}{50}\right)^5 \\ 1 & \frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & \left(\frac{1}{10}\right)^3 & \left(\frac{1}{10}\right)^4 & \left(\frac{1}{10}\right)^5 \\ 1 & \frac{1}{5} & \left(\frac{1}{5}\right)^2 & \left(\frac{1}{5}\right)^3 & \left(\frac{1}{5}\right)^4 & \left(\frac{1}{5}\right)^5 \\ 1 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^3 & \left(\frac{1}{4}\right)^4 & \left(\frac{1}{4}\right)^5 \\ 1 & \frac{9}{25} & \left(\frac{9}{25}\right)^2 & \left(\frac{9}{25}\right)^3 & \left(\frac{9}{25}\right)^4 & \left(\frac{9}{25}\right)^5 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 & \left(\frac{1}{2}\right)^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{200860100457}{195312500} \\ \frac{2974254163}{562500} \\ \frac{686235249}{62500} \\ \frac{126025}{9} \\ \frac{4130907926451}{195312500} \\ \frac{126025}{4} \end{pmatrix} \cdots\cdots(\mathrm{C})$$

これを解くと、

$$a_0 = -\frac{9}{40},\ a_1 = \frac{6131089}{120}, a_2 = \frac{752638}{45},\ a_3 = \frac{340127}{30}, a_4 = -\frac{5966}{3}, a_5 = \frac{699904}{45}$$

が得られる[8]。以下、この a_0, ……, a_5 を近似分数と呼ぶ。

さて、F(x)を構成するには、最初に 6 個の零点(x_1, ……, x_6)に対応する弧長の自乗の値 y'_1, ……, y'_6 を事前に計算しておく必要がある。これら y'_i の求め方として、関と建部が有していた技法は「環矩術」である[9]。これは弓形の弧を 2 等分、4 等分、……、2^n 等分して、そこにできる各弦の長さを三平方の定理で求めて総和を算出し、弧長に漸近させる技法である。

そこで、環矩術を用いて得られるデータ y'_1, ……, y'_6 (以下、これを理論値と呼ぶ)を小数点以下 18 桁まで求めた値は、以下のようになる。y'_4 と y'_6 は 3 分円と半円に相当し、円周率の近似分数 $\frac{355}{113}$ を用いた値があるので分数表記のままとする。

$y_1' =$ 0.080539096421348311

$y_2' =$ 0.414093677018186428

$y_3' =$ 0.859876421328657554

$y_4' = \frac{355^2}{9 \cdot 113^2}$

$y_5' =$ 1.656374708072745713

[8] 佐藤[2]は、ここまでを明らかにした。

[9] 『研幾算法』本文にも「環矩術」の語が出現するので、この技法を関・建部が用いていたことは確実である。

$y_6' = \frac{355^2}{4 \cdot 113^2}$

ところが、y'_4 と y'_6 を除くこれらの値は各近似値 $\mathrm{F}(x_i)$と僅かながら異なっている。(下線を引いた桁以降の数値が異なっている。)

$\mathrm{F}(x_1) = 0.080539095\underline{5}8054\cdots\cdots$

$\mathrm{F}(x_2) = 0.4140937\underline{7}3924\cdots\cdots$

$\mathrm{F}(x_3) = 0.8598765\underline{5}7482\cdots\cdots$

$\mathrm{F}(x_5) = 1.656374703\underline{3}0643\cdots\cdots$

理論値を適当な分数で近似して連立方程式(C)の右辺に用いて $\mathrm{F}(x)$を構成しようとすると、$a_0, \cdots\cdots, a_5$ は先述した近似分数とは異なり、非常に「煩雑な」分数になってしまう。例えば有効数字 11 桁の理論値を用いて計算すると、a_0に相当する分数 a'_0 は$-\frac{995509707119}{4368000000000}$となる。

この観察から導かれる推定は、絶対値の小さい分母を持つ『研幾算法』の近似分数は、偶然の結果や何らかの計算間違いとして得られたものではない。理論値から最初に得られる煩雑な分数係数に対して、何らかの変換操作が行われることで、近似式 $\mathrm{F}(x)$の最終的な近似分数 $a_0, \cdots\cdots, a_5$ が得られたということが推定される。

理論値に基づいて最初に得られる近似分数に変換操作を施し、最終的な近似分数を構成する手順として、佐藤[3]で以下の仮説を提示した。

［1］ ある理論値 $\boldsymbol{y'}$(各成分を分数形式としておく)を用いて連立方程式 $A_6\boldsymbol{a'} = 113^2 \cdot \boldsymbol{y'}$ を構成し、解 $\boldsymbol{a'}$を求める。この解の成分(分数形式としておく)を係数として得られる近似式を $\mathrm{F}_0(x) = a'_0 + a'_1 x + \ldots\ldots + a'_5 x^5$ とする。

［2］ 分数 a'_0 を近似分数 a_0 に変換する操作として、a'_0 の分子に適当な自然数 s を加減して約分することで a_0 を導く。この自然数 s が小さければ小さいほど、a_0 と理論値から得られる分数 a'_0 との差が小さくなる。(すなわち、近似の精度が高くなる。)

［3］ 自然数 s を次のように決定する。分数 a'_0 から整数部分を引き去った真分数を$\frac{q'_0}{p'_0}$ とし、近似分数 a_0 の真分数部分を $\frac{t}{d}$ とする。この d は分母 p'_0 の約数で $p'_0 = md$ とする。このようにすると q'_0 に s を加減した値は p'_0 の倍数 mt となり、不定方程式 $q'_0 \pm s = mt$ が得られる。(以下、これを $s - mt = -q'_0$ に統一して表記する。)

［4］ この不定方程式を解いて整数解 (s, t) を決定する。この解は、方程式を満たす最小の自然数 s_0 とパラメータ k ($k \in \mathrm{Z}$)を用いて $s = s_0 + mk,\ t = t_0 + k$ の形となるので、適当な k を選ぶことで、近似分数 a_0 の真分数部分 $\frac{t}{d}$ を構成する整数解 (s, t) が確定する。

[5] 近似分数 a_0 を確定した後、近似分数 a_1 を求める。a'_0 が定数 a_0 に変換されたことから、これと連動して既に求めた a'_1, ……, a'_5 も変化を受ける[10]。そこで$F_1(x) = \frac{F_0(x)-a_0}{x} = a''_1 + a''_2 x + \cdots\cdots + a''_5 x^4$ とすることで、$F_0(x)$を 4 次式 $F_1(x)$に置き換える。この $F_1(x)$ の係数 $\boldsymbol{a}''$を決定するために、最初の理論値の 6 つの零点(x_1, ……, x_6) から 1 つ取り除いた 5 つの零点を $F_1(x)$ に代入して、連立方程式 $A_5\boldsymbol{a}'' = \boldsymbol{y}''$を解く。($y''_i = F_1(x_i) = \frac{F_0(x_i)-a_0}{x_i}$とする。)

[6] a''_1 を得た後、[2]～[4]と同様の操作を行って a_1 を確定する。

[7] a_2, a_3 の決定もここまでと同様の操作を行う[11]。

[8] a_4, a_5 については、最後に残る 2 元連立方程式を解いて確定する。

上記の操作を具体的に示すと以下のようになる。

① a_0 の決定

有効数字を 11 桁とした理論値 y'_1, y'_2, y'_3, y'_5 を用意する。それらの分数表記として以下の Q_1, Q_2, Q_3, Q_5 が得られる。

$$Q_1 = \frac{8053909642}{10^{11}}, Q_2 = \frac{41409367701}{10^{12}}, Q_3 = \frac{85987642132}{10^{12}}, Q_5 = \frac{165637470807}{10^{11}}$$

が得られる。この 4 つの分数に $y'_4 = \frac{355^2}{9 \cdot 113^2}$ と $y'_6 = \frac{355^2}{4 \cdot 113^2}$ を補って列ベクトル $\boldsymbol{y}'$ とする。そこで連立方程式 $A_6\boldsymbol{a}' = 113^2 \cdot \boldsymbol{y}'$ を構成して解くと次の a_0'を得る。

$$A_6 \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \\ a'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \cdot 113^2 \\ Q_2 \cdot 113^2 \\ Q_3 \cdot 113^2 \\ \frac{355^2}{9} \\ Q_5 \cdot 113^2 \\ \frac{355^2}{4} \end{pmatrix}, \quad a'_0 = -\frac{995509707119}{4368000000000}$$

最初に $a'_0 = \frac{q'_0}{p'_0}$ とし d を近似分数 a_0 の分母 40 と設定する。このとき分母は $p'_0 = 40m = 4368000000000$ であるので約数 $m = 109200000000$ を得る。次に解くべき不定方程式は

$$s - 109200000000\, t = 995509707119$$

---

[10] 連立方程式(C)の 6 つの未知数が 5 つに減ることで、連立方程式そのものが 5 元 1 次に変化する。

[11] 以下、次の記号を用いる。連立方程式 $A_4\boldsymbol{a}^{(3)} = \boldsymbol{y}^{(3)}$, $A_3\boldsymbol{a}^{(4)} = \boldsymbol{y}^{(4)}$, 近似式 $F_2(x) = \frac{F_1(x)-a_1}{x} = a^{(3)}{}_2 + a^{(3)}{}_3 x + a^{(3)}{}_4 x^2 + a^{(3)}{}_5 x^3$, $F_3(x) = \frac{F_2(x)-a_2}{x} = a^{(4)}{}_3 + a^{(4)}{}_4 x + a^{(4)}{}_5 x^2$.

となる。これより整数解 (s, t) を求めると、

$$s = 12709707119 + 109200000000\,k,$$
$$t = -9 + k \quad (k \in \mathrm{Z})$$

を得る。ここで $k = 0$ とすれば $s = 12709707119,\quad t = -9$ となり $a_0 = -\frac{9}{40}$ を得る。

② $\boldsymbol{a_1}$ の決定

$F_1(x) = \frac{F_0(x)-a_0}{x}$ の係数 a''_1, ……, a''_5 を未知数とする以下の 5 元連立方程式 $A_5\boldsymbol{a''} = \boldsymbol{y''}$ を構成して a''_1 を解として導く。(この時、除外する零点を$(x_3, F_0(x_3))$ とする。)

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{50} & \left(\frac{1}{50}\right)^2 & \left(\frac{1}{50}\right)^3 & \left(\frac{1}{50}\right)^4 \\ 1 & \frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & \left(\frac{1}{10}\right)^3 & \left(\frac{1}{10}\right)^4 \\ 1 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^3 & \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ 1 & \frac{9}{25} & \left(\frac{9}{25}\right)^2 & \left(\frac{9}{25}\right)^3 & \left(\frac{9}{25}\right)^4 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a''_1 \\ a''_2 \\ a''_3 \\ a''_4 \\ a''_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\left(Q_1 + \frac{9}{40}\right) \\ 10\left(Q_2 + \frac{9}{40}\right) \\ 4\left(\frac{355^2}{9} + \frac{9}{40}\right) \\ \frac{25}{9}\left(Q_5 + \frac{9}{40}\right) \\ 2\left(\frac{355^2}{4} + \frac{9}{40}\right) \end{pmatrix} \quad \left[= \begin{pmatrix} Q''_1 \\ Q''_2 \\ Q''_4 \\ Q''_5 \\ Q''_6 \end{pmatrix} \right]$$

これを解いて$a''_1 = \frac{22317166705900889}{436800000000}$ を得る。これより整数部分 51092 を減じて$\frac{q''_1}{p''_1} = \frac{181105900889}{436800000000}$とする。F$(x)$の近似分数 a_1 についても同様に整数部分 51092 を減じると $\frac{t}{d} = \frac{49}{120}$ となる。 a_1 の分母から $d = 120$ として次の不定方程式を解く。

$$s - 3640000000\,t = -181105900889$$

これより $t = 50 + k$ を得る。$k = -1$ とすると $t = 49$ となり、$\frac{t}{d} = \frac{49}{120}$ 、$a_1 = \frac{6131089}{120}$ を得る。

③$\boldsymbol{a_2}$ の決定

$F_1(x)$を変換した近似式を $F_2(x) = \frac{F_1(x)-a_1}{x} = a^{(3)}{}_2 + a^{(3)}{}_3 x + a^{(3)}{}_4 x^2 + a^{(3)}{}_5 x^3$ とし、除外する零点を$(x_2, F_1(x_2))$とする。そこで、4 元連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{50} & \left(\frac{1}{50}\right)^2 & \left(\frac{1}{50}\right)^3 \\ 1 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ 1 & \frac{9}{25} & \left(\frac{9}{25}\right)^2 & \left(\frac{9}{25}\right)^3 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^{(3)} \\ a_3^{(3)} \\ a_4^{(3)} \\ a_5^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\left(Q''_1 - \frac{6131089}{120}\right) \\ 4\left(Q''_4 - \frac{6131089}{120}\right) \\ \frac{25}{9}\left(Q''_5 - \frac{6131089}{120}\right) \\ 2\left(Q''_6 - \frac{6131089}{120}\right) \end{pmatrix} \left[= \begin{pmatrix} Q_1^{(3)} \\ Q_4^{(3)} \\ Q_5^{(3)} \\ Q_6^{(3)} \end{pmatrix} \right]$$

を解き、$a_2^{(3)}=\frac{809237526929}{48384000}$ を得る。$a^{(3)}{}_2$ の真分数部分は $\frac{q_2^{(3)}}{p_2^{(3)}}=\frac{15126929}{48384000}$ となり、目標とする近似分数の真分数部分は $\frac{t}{d}=\frac{13}{45}$ となる。そこで不定方程式 $s - 1075200\,t = -15126929$ を解き、整数解として $t = 15 + k$ を得る。このとき $k = -2$ とすると、$a_2=\frac{752638}{45}$ が得られる。

④　a_3 の決定

$F_2(x)$ を変換した近似式を $F_3(x)=\frac{F_2(x)-a_2}{x}=a^{(4)}{}_3+a^{(4)}{}_4x+a^{(4)}{}_5x^2$ とし、除外する零点を $(x_1, F_2(x_1))$ とする。そこで、3 元連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ 1 & \frac{9}{25} & \left(\frac{9}{25}\right)^2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3^{(4)} \\ a_4^{(4)} \\ a_5^{(4)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\left(Q_4^{(3)}-\frac{752638}{45}\right) \\ \frac{25}{9}\left(Q_5^{(3)}-\frac{752638}{45}\right) \\ 2\left(Q_6^{(3)}-\frac{752638}{45}\right) \end{pmatrix}\left[=\begin{pmatrix} Q_4^{(4)} \\ Q_5^{(4)} \\ Q_6^{(4)} \end{pmatrix}\right]$$

を解き、 $a_3^{(4)}=\frac{197480263529}{17418240}$ を得る。$a^{(4)}{}_3$ の真分数部分は $\frac{q_3^{(4)}}{p_3^{(4)}}=\frac{9676649}{17418240}$ となり、目標とする近似分数の真分数は $\frac{t}{d}=\frac{17}{30}$ となる。そこで不定方程式 $s - 580608\,t = -9676649$ を解き、整数解として $t = 17 + k$ を得る。このとき $k = 0$ とすると、$a_3=\frac{340127}{30}$ が得られる。

⑤　a_4 と a_5 の決定

零点 x_4 と x_6 に基づく次の 2 元連立方程式を解くことで a_4 と a_5 が得られる [12]。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\left(Q_4^{(4)}-\frac{340127}{30}\right) \\ 2\left(Q_6^{(4)}-\frac{340127}{30}\right) \end{pmatrix}$$

$$a_4=-\frac{5966}{3},\ a_5=\frac{699904}{45}$$

ここまで求めた a_0, ……, a_5 を用いて、最初に設定した行列 A_6 との積を取ると、$A_6\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y}$ の関係が成立し、『研幾算法』が提示する近似値 $F(x_1)$, ……, $F(x_6)$も得られる。これらの操作から a_0, ……, a_5 を求めることができ、$F(x)$ が復元されたことになる。

以上が佐藤[3]で提示した $F(x)$の構成法に関する仮説である。

4.　『括要算法』の構成に関する仮説

本報告で話題とした弓形の求積に関する問題は、当時の和算家が有していた算術の知識を総動員して解決を試みたと言っても過言ではない。この 1 問のためにどのような技法、算術が用いられていたかを列挙すると、次のようになる。

---

[12] 最後に残す 2 つの零点は x_4 と x_6 の組である。それ以外の零点の組を残したとすると a_4 と a_5 は全く異なる分数値となり、$F(x)$を復元できない。

・多項式補間（佐藤[2]の結論）
・1 次の合同式に同等な不定方程式の解法(翦管術の基礎。佐藤[3]の結論)
・零約術(分数の近似法、円周率 $\frac{355}{113}$ はこれによって求められた)
・環矩術(三平方の定理と開平計算)

以上を一覧して気が付くことがある。それは、関孝和没後に刊行された『括要算法』全 4 巻(1712)の内容が、弓形の求積問題に使われたこれらの技法とほぼ一致、あるいは関連性の強いことである [13]。その対比を示すと次のようになる。

・第 1 巻　招差法（補間法）、ベルヌーイ数の提示、他
・第 2 巻　約数、倍数などの整数に関わる問題、零約術、翦管術
・第 3 巻　角術（正多角形に関する問題）
・第 4 巻　円理(環矩術と零約術による円周率算出、弓形の弧長、球の体積)

これを見ると、第 4 巻はまさに円や弓形に関する求積（円理と称する分野）が主題となるので『研幾算法』第 1 問の内容と一致しているのは当然として、第 1 巻は補間法を扱うことで『研幾算法』第 1 問の中核をなす技法と関わっている。さらに第 2 巻には零約術と翦管術や約数の問題が収録されている。一見すると無関係に見えるのが第 3 巻の角術であるが、これもまた円周率を求めるために必要な環矩術の準備的理論と見なすことができる。すなわち、環矩術では円に内接する正多角形の周長の計算が本質をなしているので、角術は円理計算に欠くべからざる要素となる [14]。以上をまとめると、『研幾算法』第 1 問に必要な算術の技法が発展的に再編集されたものが『括要算法』だという見方も可能となる。『括要算法』は円理の解法の完成に向けて必要な技法を系統的に網羅した内容となっているのである。

以上が第 35 回数学史シンポジウムでの報告内容の概略である。続いて、佐藤[1]〜[4]を発表するに至るまでの、報告者の試行錯誤、研究作業の推移を紹介したい。

5. 『研幾算法』第 1 問研究の発端

そもそも報告者が『研幾算法』第 1 問に関心を持ち、この問題を数学史の対象として研究を始めたのは、かれこれ 33 年ほど前のことになる。1993 年当時、大学院修士課程の在学中

[13] 『括要算法』の内容には『研幾算法』以後、さらに発展した諸技法も含まれている。
[14] 『研幾算法』には第 2 問として正多角形の面積を求めさせる問題が収録されているので、この関連性は一層明確となろう。

に関孝和の『発微算法』(1674 年)の解読に取り組んでいた[15]が、その参考史料として参照し始めたのが『研幾算法』であった。上述のとおり、第 1 問は相当の難問であった。

『研幾算法』にはほとんど先行研究が無く、一から読解をするより他なかったと言ってよい。特に第 1 問については、日本学士院編『明治前日本数学史』第 2 巻が F(x)に相当する式を取り上げて紹介し、

> 「これは正しくない。S^2 [弧長の自乗]は c [本報告の x]とともに 0 となるを要するからである」[16]

と評価しているばかりであった。『研幾算法』が現在まで数学史研究者の関心を惹かなかったのは、これに収録されている全 49 問の大半が初等的であったことと、おそらくこのように「数学として正しくない」といった評価・先入観が既に提示されていた故であろう。関孝和と建部賢弘が関与した数学書であるにもかかわらず、和算史における評価が余りにも低いままであることに当時の報告者は違和感を持ち続けていた。

『明治前日本数学史』のように、近似式の正誤のみを見て評価を下す態度は、そもそも数学史研究には馴染まない。関・建部は、なぜこのような数式を導くに至ったのか。偶然の産物であれ、何らかの方法論があったのであれ、この近似式が登場した背景には何かしらの理由があったはずである。歴史研究者ならばこのような問題意識を追究すべきであることは明確であろう。

6.　『研幾算法』第 1 問の復元計算の経緯 (1)

とはいえ、本報告で紹介をした F(x)はあまりにも複雑すぎて、しかも先行研究の蓄積のある『括要算法』の近似式(後述する H(x))とは全くかけ離れた形式を備えていた。33 年前の初見の際には、これを分析をしようにも全く手がかりすら無く、まさに五里霧中と多岐亡羊を嘆くばかりであった。

ちょうどその頃、数学処理ソフトウェアの Mathematica を購入したこともあり、トレーニングも兼ねてあれこれと和算書の例題などの計算を実行していた。特に深く考えもせず、F(x)と逆三角関数の真値 $arccos^2(1\text{-}2x)$との誤差を評価してみると面白そうだと思い付き、本

---

15 『発微算法』に関する研究は、以下の拙稿として発表した。佐藤賢一「『発微算法』の研究　異版の存在について」、『科学史研究』第 35 巻 199 号(1996 年)。『発微算法』初版の解答に関孝和のケアレス・ミスがあることを確認し、その間違いを訂正した再版も出されていたことを拙稿では紹介した。これ以後、関孝和ですら完璧な和算家ではなかったことを報告者は強く意識し、和算史料そのものを批判的に読解することを心掛けるようになった。『研幾算法』の解読においても、そのような態度で臨んでいる。

16 日本学士院編『明治前日本数学史』第 2 巻(岩波書店、1983 年補訂)、p. 280.　ここでは、近似式に定数項があるので間違いと判断されている。

報告の G(x)のグラフを描かせた。すると、G(x) = 0 を満たす零点が 6 つあり、それらは簡単に計算ができる弓形(半円や 3 分円)の矢、あるいは環矩術の計算を始めやすい弓形の矢に対応していることが明らかになった。関・建部らが何らかの明確な意図を持って F(x)を構成していた事に確信が持てた瞬間であった。

しかし、この時点では 6 つの零点を見出したことで力尽きた。いかんせん、他の和算史料に関する知見や調査実績、言わば研究を進めるための見通し・勘所が絶対的に不足していた。結果として、『研幾算法』第 1 問を巡る試行と研究は、20 年以上手付かずとなってしまった。この間、全く考察を止めたわけではなく、何度も挑戦しては断念するという堂々巡りを繰り返した。それと並行して和算史料の探索と調査経験を蓄積しつつ、弓形の問題に関わりのあるかもしれない情報を収集することに努めていた。

例えば、1999 年から 2002 年にかけて報告者は日本学士院所蔵の和算資料目録[17]の編纂に参与したことから、その 3 年間に約 9,000 点ほどの和算資料の書誌情報を確認した。この作業のおかげで、和算史料の全体像を大まかながら把握することができた。その他にも全国各地の主要な和算史料を所蔵する図書館[18]を折に触れて調査した。明治以来の先学が弛みなく保存し、現在に残した和算史料の数々から多大な学恩を受けたことに今も感謝している。

この問題の探究を進める間、報告者の意識は次第に 2 つの方針へと収斂していった。

(1)・『研幾算法』そのものについて言及した史料の有無の確認

(2)・当時の和算家たちが利用できた技法、アルゴリズムを再検討すること

(1)については結局、『研幾算法演段諺解』より他に史料を見出すことはできないまま現在に至っている。全くと言ってよいほど、後世の和算家たちは『研幾算法』について関心を持っていなかったかのように見える。

(2)に関しては、幾つか手がかりとなるかもしれないと思わせる情報が散発的に目に入るようになっていった。

例えば、『標題註疏小学集成』という儒学の本の中に「九数」[19]に関する注釈がある[20]。その第 8 章「方程」の注釈として、「現代の暦を作る者はこの技法を用いる」(今作暦者用此法)という文言が記されている[21]。この書はおそらく元王朝時代に編纂されたもので、天文暦学者が方程を用いたとすると、有名な授時暦の招差法(補間法)のことを指しているかもしれない、という予想が浮かんだ。『標題註疏小学集成』のこの注釈は明代の日用類書(百科事典)にも

---

[17] 日本学士院編『日本学士院所蔵和算資料目録』(岩波書店、2002 年)

[18] 主たる所蔵機関として、東北大学附属図書館、宮城県図書館、東京大学総合図書館、九州大学附属図書館、大阪府立中之島図書館を挙げられる。

[19] 古代中国の算術書『九章算術』の章名を列挙したもの。

[20] 報告者は本書を 2002 年頃に入手した。

[21] 「方程」とは連立一次方程式の解法のことを指す。

多数引用され、当時の和算家たちによって広く参照されていたことも知られている。例えば沼田敬忠[22]『小学本註九数名義諺解』(1720 年)はその典型で、九数の注釈の考証を独自に行っている。そのようなわけでしばらく、この「方程」を巡る注釈の文言が報告者の頭から離れなかった[23]。

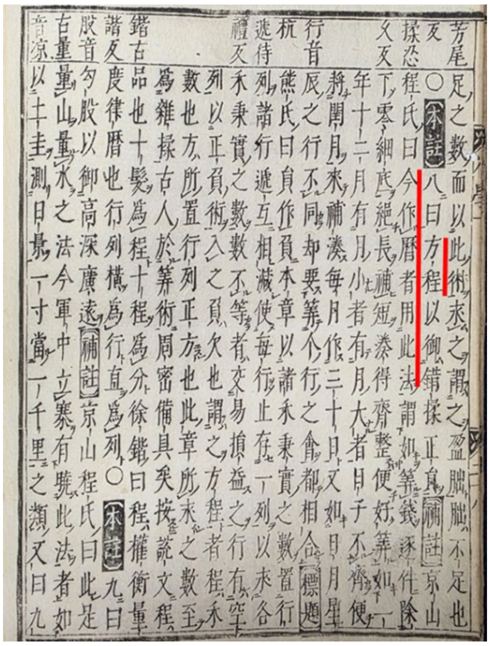

図 3 『標題註疏小学集成』第一巻の一節

「方程　……　今作暦者用此法」の文字がある。

この状況がしばらく続いた後、既知の史料に見直すべき叙述のあることに気付いた。その史料は、田中由真『算学紛解』(1683 年頃)である。田中と関はほぼ同時代人で、両者の数学にはお互いに類似している内容[24]が含まれていることもよく知られていた[25]。この『算学紛解』は弓形の面積を求める問題の解法として「方程」を明確に用いていたのである[26]。

22 沼田は和算家・荒木村英の門人である。関孝和の孫弟子となる。

23 これが後に、後述する『算学紛解』からの情報と相俟って、補間法のデータとして弓形の矢と弧長を組み合わせて処理するという発想の下地となった。

24 例えば、高次連立方程式から未知数を消去する方法など。

25 佐藤[2]を発表した後の 2017 年末、久留重孫という関孝和の門人が建部賢弘の姻戚筋にあたることを『寛政重脩諸家譜』の記述から確認できた。久留については、別の史料から上方の橋本正数(田中由真の師)と繋がりのあることを既に知っていた。(佐藤賢一『近世日本数学史　関孝和の実像を求めて』(東京大学出版会、2005 年)、p. 272.)江戸の関・建部と上方の田中由真の両方に久留は人脈を持っていたことが一層明らかとなった。久留によって両地域の数学者の間に交流があった可能性を想定することができた。

26 2016 年にこの事実に気付き、佐藤[2]で『算学紛解』を紹介した。

田中の提示する方程を用いた弓形の面積の求め方は次のような構成であった。(簡略化して示す。)　弓形の面積を S、弦を v、矢を x としたとき、S を次のように表現する。

$$S = p_0x^3 + p_1vx^2 + p_2v^2x + p_3v^3$$

このとき、データとして $S_1, \ldots\ldots, S_4$ とそれぞれに対応する弦、矢を与え、次の連立方程式を解いて $p_0, \ldots\ldots, p_3$ を確定する。

$$\begin{pmatrix} x_1^3 & v_1x_1^2 & v_1^2x_1 & v_1^3 \\ x_2^3 & v_2x_2^2 & v_2^2x_2 & v_2^3 \\ x_3^3 & v_3x_3^2 & v_3^2x_3 & v_3^3 \\ x_4^3 & v_4x_4^2 & v_4^2x_4 & v_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}$$

この連立方程式の発想は『研幾算法』とほとんど一致しているが、求める対象が弓形の面積(『算学紛解』)と弧長(『研幾算法』)という具合に異なっている。とはいえ、このアイディアが『研幾算法』の $\mathrm{F}(x)$の復元計算に適用できることは一目瞭然である。

この結果を知った後の視点から振り返ると、式 $\mathrm{F}(x)$はベクトル$(1, x, x^2, \cdots\cdots, x^5)$とベクトル$(a_0, a_1, \cdots\cdots, a_5)$の内積として解釈できる。そこで前者のベクトルの x に各零点$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_6)$を代入して $y_i = \mathrm{F}(x_i)$を整列並記すれば、そこには上述した連立方程式(C)が現れる。「方程」を知る和算家にとってもこの配列の式ができたことを容易に理解できたはずである。たしかに結論は非常に単純明快であるが、何ら情報が与えられずに式 $\mathrm{F}(x)$を眺めることしかできない現代の我々にとって、この式の「起源」を解釈せよという数学史の問題は非常に難しい。『標題註疏小学集成』や『算学紛解』からの示唆、ヒントが無ければ、関・建部が弓形の問題に「方程」の技法を用いていたという仮説を思い付くはずもなく、$\mathrm{F}(x)$がどのようなアルゴリズムで構築されたのかを言い当てることはほぼ不可能であった[27]。

さらに、このアルゴリズムを数学史研究者が確定したとしても、当事者が単なる偶然の産物としてそれを手にしたのか、それとも同時代人によって十分に利用可能なレベルの知識に基づいていたのか[28]。その差異は歴史的評価を大きく変える。『研幾算法』第 1 問の場合、『算学紛解』と共通の知識(方程)を備えていたことが特筆される。複数の同時代人が方程の解法を使いこなせていたことが判明するからである。

7.　『研幾算法』第 1 問の復元計算の経緯 (2)

さて、この連立方程式(C)が多項式補間に相当することが明らかになったことから、その後に解くべき課題は明白であった。半円と 3 分円を除く $\mathrm{F}(x_i)$を小数点表記にすると、小数点以下 7 桁から 9 桁の間で各理論値と食い違いが生じている。この僅かな差が何に由来し

---

[27] この認識の背後には、変数 x を定数と考え、係数 a_i を方程式の未知数と解釈し直すという根本的な発想の転換も必要であった。

[28] 科学史から例を挙げると枚挙に暇はないが、ケプラーの第 3 法則は宇宙観に関わる彼の神秘主義思想によって、偶然得られたものである。

ているのかが問題となる。偶然の計算間違いであるのか、あるいはその背後に系統的な算出法、アルゴリズムが潜んでいるのかが、佐藤[2]を発表した時点では皆目不明であった。

この疑問を抱えたまま 3 年ほど経過した 2020 年の年末に、解決の糸口が朧気ながら見えてきたような「虫の知らせ」というべき感覚が湧いてきた。折しも、新型コロナは依然として流行し、外出を極力避けざるをえない状況下にあった。『研幾算法』第 1 問の検証と計算に没頭する時間は十分にあった。本腰を入れて計算しなおそうか、という気持ちになった。

まず、意識的に F(x)と連立方程式(C)の構造を観察しなおすことから着手した。環矩術から得られるはずの理論値 y'_i と(C)の右辺に現れる数値 y_i の間の僅かな差異が、「偶然に」出現したものではないという確信はすぐに得られた。F(x)の各係数の分母が(40、120、45、30、3、45)という配列となり非常に小さい整数にまとまっている。このことから、偶然の結果として F(x)が得られるはずはないと判断した。

とはいえ、この僅かな差異を説明するための理由付けの探索は、当初から混迷を極めた。各数値の観察を始めたが、例えば(C)の右辺の第 2 成分の分子"2974254163"は、なんと素数であった。もちろん、この事実に本質的な意義は無いものの、確認計算を始めた当初はこういう情報にも惑わされてしまった。また、各 y_i の分母を素因数分解すると、特定の素数 7、11、13、17 等が共通に出現することも判断を狂わせた。何らかの規則に基づいた素因数分解を式の一部に用いて、近似値(y_1, ..., y_6)を構成できるのではないかという予測を持ってしまい、かなり後までこの先入観に囚われてしまった。

$$A_6\begin{pmatrix} -\dfrac{995509707119}{4368000000000} \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \\ a'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8053909642}{10^{11}}\cdot 113^2 \\ \dfrac{41409367701}{10^{12}}\cdot 113^2 \\ \dfrac{85987642132}{10^{12}}\cdot 113^2 \\ \dfrac{126025}{9} \\ \dfrac{165637470807}{10^{11}}\cdot 113^2 \\ \dfrac{126025}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow A_6\begin{pmatrix} -\dfrac{9}{40} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{200860100457}{195312500} \\ \dfrac{2974254163}{562500} \\ \dfrac{686235249}{62500} \\ \dfrac{126025}{9} \\ \dfrac{4130907926451}{195312500} \\ \dfrac{126025}{4} \end{pmatrix}$$

この迷走の後に行った数値実験・試算は、環矩術によって得た理論値から系統的に(C)の右辺の各 y_i へと変換できるか否かの検討であった。(上の式において、赤文字とした左の列ベクトルを一括して右の列ベクトルに変換できるか否かを検討した。)適当な有効桁数の環矩術による理論値(y'_1, ..., y'_6)を設定し、そこからどのような条件を満たせば『研幾算法』の値(y_1, ..., y_6)になるのかを探索した。y_4, y_6 以外の 4 つの値の僅差に相当する数値には顕著な比例関係も無く、近似値を比較するだけでは有効な情報は何も得られなかった。

次に検討したのは、各数値の分数表記を確定するために和算家が実行することのできた技法の適用である。具体的には「零約術」が使えるか否かを検証した。零約術とはある実数を分数形式の有理数で近似するための技法で、著名な例としては関が『括要算法』巻貞(第 4 巻)において円周率を$\frac{355}{113}$と近似した際にこれが用いられている[29]。

そこで、『研幾算法』第 1 問に出現する 4 つの理論値に零約術が使用された可能性を想定した。零約術を取り扱った和算史料をできる限り参照し、関孝和以降の和算家の業績[30]にも探索範囲を広げた。しかし、4 つの理論値の分母・分子の桁数が非常に大きいため、通常の零約術では対応できないことは明白で、何らかの工夫が必要となる。あれこれと工夫を試みたもののこの試算はすぐに行き詰まってしまった。

8. 『研幾算法』第 1 問の復元計算の経緯 (3)

1 ヵ月ほど数値実験をし続けたものの綺麗な結果は得られず、次のアプローチに移るべきと判断した。理論値(y'_1, ..., y'_6)のみに基づく数値計算にこだわらず、復元する計算過程全体の構造をより大局的に捉え直すべきであろうと考え直し、連立方程式(C)を見直した。

例えば、仮に右辺の理論値(y'_1, ..., y'_6)が目標となる近似値(y_1, ..., y_6)に変換されたとしても、これに連動して方程式の解である左辺の係数分数(a'_0, ..., a'_6)も当然変換されるはずである。右辺のみを操作しても、その結果として左辺の近似分数が整合的に一致するとは限らない。それどころか、近似分数(a_0, ..., a_6)の単純さを保証するアルゴリズムを構築するという、格段に難度の高い計算問題が次に控えていることは明白だった[31]。

この基本中の基本に立ち返ると、近似分数(a_0, ..., a_6)のあまりの簡単さに再び注目せざるを得なくなる。すなわち、それらの分母の配列は(40、120、45、30、3、45)という信じられないほど単純な整数列である。この数列をどのように構成したのか。なぜこの数列となったのか。前述したとおり、何らかの系統的なアルゴリズムが無ければ実現しない数列に違いないという確信だけは持てる。しかし、それ以上の情報は何も無い。

---

29 $\frac{355}{113}$は、零約術によって次のように求められる。環矩術によって円周率を所定の桁数の有限小数として求めたとする。(これを π'とする。)このとき、初項を$\frac{3}{1}$として、第 n 項が π'よりも大きい場合は分子に 3、分母に 1 を加えた有理数を第 $n+1$ 項とする。また、第 n 項が π'よりも小さい場合は分子に 4、分母に 1 を加えた有理数を第 $n+1$ 項とする。

30 例えば、安井祐之『円玉略解』(1747 年)。

31 あまりにも初歩的な連立方程式の常識であり、これを最初から考慮すべきであったという反省はある。とはいえ、当時の計算者による「計算間違い」や「偶然の産物」という予期せぬファクターも最後まで検討しなければならない。各数値の徹底的な観察・試算の手順を踏むことが必要であったのも事実である。

$$A_6\begin{pmatrix} -\dfrac{995509707119}{4368000000000} \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \\ a'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8053909642}{10^{11}}\cdot 113^2 \\ \dfrac{41409367701}{10^{12}}\cdot 113^2 \\ \dfrac{85987642132}{10^{12}}\cdot 113^2 \\ \dfrac{126025}{9} \\ \dfrac{165637470807}{10^{11}}\cdot 113^2 \\ \dfrac{126025}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow A_6\begin{pmatrix} -\dfrac{9}{40} \\ \dfrac{6131089}{120} \\ \dfrac{752638}{45} \\ \dfrac{340127}{30} \\ -\dfrac{5966}{3} \\ \dfrac{699904}{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{200860100457}{195312500} \\ \dfrac{2974254163}{562500} \\ \dfrac{686235249}{62500} \\ \dfrac{126025}{9} \\ \dfrac{4130907926451}{195312500} \\ \dfrac{126025}{4} \end{pmatrix}$$

唯一の方法によって、上の式で左の赤文字とした列ベクトル(a'_1以降は数値記載を省略)から右の赤文字とした列ベクトルへと一括して変換することは可能であろうか。最初にこの想定から考察を始めた。各零点 x_i が単純な分数値なのでそこから導ける情報がないかどうか、各理論値の分母の値と近似分数の分母との間に関連性がないかどうかを調べ、あるいは、一度は放棄した仮説をもう一度見直して素因数分解から探索を再検討する等々、手当たり次第に試みたもののこれといった進展もなく、程無く挫折した[32]。この時点で、復元計算に取り組んでからほぼ 1 ヵ月半が経過していた。

結局、(40、120、45、30、3、45)の配列を一括して決定することは無理であろうと判断し、別の方法を模索した。理論値にせよ、分数の分母の単純な数列にせよ、それらを一括して決定できないすると、個別に近似分数を決定することになるであろう。

ここまでの経緯を振り返ると、連立方程式(C)から復元計算を行う際に、最初に可能性として検討した選択肢は、

①理論値を変換して近似値にすること

②理論値から得られる係数分数を変換して近似分数とすること

の 2 つであった。報告者は①、②の順番で復元計算を目指した。一連の計算が挫折した要因は、(C)の右辺にせよ左辺にせよ、ベクトルの成分を一括して変換することにこだわりすぎたことであった。この先入観を捨てることで、次に取るべきアプローチ③は自然に得られた。

[32] この仮説を検証するためのアプローチについては、当時の和算史料には類題らしいものが全く無いので、和算家ならば考えそうな計算手順を想定し、ひたすら Mathematica で数値実験、シミュレーションを繰り返すしかなかった。

③理論値から得られる係数分数と近似分数を組にして、1 つずつ変換すること

$$A_6\begin{pmatrix} -\frac{995509707119}{4368000000000} \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \\ a'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8053909642}{10^{11}}\cdot 113^2 \\ \frac{41409367701}{10^{12}}\cdot 113^2 \\ \frac{85987642132}{10^{12}}\cdot 113^2 \\ \frac{126025}{9} \\ \frac{165637470807}{10^{11}}\cdot 113^2 \\ \frac{126025}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow A_6\begin{pmatrix} -\frac{9}{40} \\ \frac{6131089}{120} \\ \frac{752638}{45} \\ \frac{340127}{30} \\ -\frac{5966}{3} \\ \frac{699904}{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{200860100457}{195312500} \\ \frac{2974254163}{562500} \\ \frac{686235249}{62500} \\ \frac{126025}{9} \\ \frac{4130907926451}{195312500} \\ \frac{126025}{4} \end{pmatrix}$$

上の式で赤文字とした 2 つの数値を組にして左から右へと変換することを行い、以下同様に a_5 まで決定することが③の内容である。そこで、変換規則を見つけることが直近の課題となる[33]。

これ以降、復元計算の仮説を構築するために用いた操作は、以下の 3 つである。これらは復元計算を開始した当初には全く予想もしていなかった手法、アルゴリズムであった。

(Ⅰ)近似分数への変換規則は a_0 から a_1 の順に適用する。その規則とは各係数分数の分子に適当な整数値を加減して約分することである。

(Ⅱ)定数項に相当する近似分数を 1 つ決定すると、零点を 1 つ減らしたデータ群による新しい近似式が構成できる。その近似式の次数は元の近似式の次数より 1 つ分小さくなる。

(Ⅲ)近似分数の分母の配列の最初の 4 つは、特に理由も無く関・建部が適当に選んだ数であろうと仮定する。

実は最後まで、(40、120、45、30、3、45)の配列には何らかの意味があるのではないかという考えに囚われて、計算を続けていた。しかし、(Ⅰ)と(Ⅱ)のアルゴリズムを前提とすると、この配列は変換前の分数の分母の約数となるという条件を満たす任意の整数でよいことが確認できたので(Ⅲ)の仮定を設けた。すなわち、本研究の本来の目標である関・建部の計算過程を復元するという原点に立ち戻れば、(40、120、45、30、3、45)の配列は関・建部

33 なお、理論値 y'_i を変換して近似値 y_i とする選択肢は、変換前後の数値が共に複雑すぎることから規則性を見いだせないことが予想できたので取り上げなかった。

の「自由意志」で選択されたということにしておいて、これに基づいて復元計算ができればよいという立場を採ることにした[34]。

引き続く経緯を簡単にまとめると、(I)を見出すための操作として、手始めに有効数字 11 桁の理論値から導き出された $a'_0 = -\frac{995509707119}{4368000000000}$ と $a_0 = -\frac{9}{40}$を比較分析することを実践した。(これより大きい桁数の有効数字についても、同様の議論が成り立つ。) 最終的には徒労に終わったものの、当初、a'_0 の分母、分子それぞれにここまでの計算を進めてきた過程で得られた「意味のありそうな」数値を加・減・乗・除するなどして a'_0 の変化する挙動を数値実験的に確認した。結局、関・建部は複雑なアルゴリズムを重層的に構築したのではなく、できるだけ単純な手順で目標とする数値を得ようとしたのではないかという、極めてありふれた予想に落ち着いた。

そこで思い付いたのが、非常に初歩的な操作(I)であった。a'_0 の分母は 40 を約数として持っているので、この見通しは簡単に立った。そのような経緯で考えついたアイディアが、上述した「分数 a_0'から整数部分を引き去った真分数を$\frac{q_0'}{p_0'}$ とし、近似分数 a_0 の真分数部分を $\frac{t}{d}$ とする。この d は分母 p_0'の約数で $p_0' = md$ とする。このようにすると q_0'に[自然数]s を加減した値はp_0'の倍数 mt となり、不定方程式 $q_0' \pm s = mt$ が得られる」という操作[35]であった。そこで $d = 40$ として不定方程式を作ると

$$s - 109200000000\, t = 995509707119$$

となる。これより整数解 (s, t) を求め、

$$s = 12709707119 + 109200000000\, k,$$
$$t = -9 + k \quad (k \in \mathrm{Z})$$

を得る。ここで $k = 0$ を選択すれば $s = 12709707119, \quad t = -9$ となる。これより目標としていた $a_0 = -\frac{9}{40}$ が得られた。

尋ね求めていた計算プロセスが分かってしまえば実に単純なもので、感動よりも先に拍子抜けと言うに近い呆気なさを覚えた[36]。

この手法によって a_0 を再構成できたことで、a_1 以下の近似分数の再構成が同様にできるはずであるという見通し、展望が一気に開けた。次のステップとして、a_0 を求めた結果、理論値から導いておいた $F_0(x)$が変化を被ることから、これをどのように扱うべきかを考えた。a_0 を決定したことは連立方程式(C)の未知数の 1 つが定数に変換されたことになるので、(C)は未知数 5 つの連立方程式に変異するはずである。つまり、5 個の零点に基づくデータ・セットか

---

34 あるいは、関・建部は数の配列を決定する際に何らかの判断基準を持っていたかもしれないが、それ以上深入りせず、全体の復元計算が完成することのみを優先した、とも言い換えられる。

35 これは一次の合同式を解く操作と同等である。『研幾算法』では第 49 問の解法として用いられている翦管術が、これを基礎としている。

36 2021 年 2 月 25 日にこのプロセスの確認をした。

ら 4 次の多項式 $F_1(x)$を再構成する必要が生じる。以下同様にして、近似分数を 1 つずつ確定して、最後に二元一次連立方程式の解として a_4 と a_5 を確定させればよい[37]。

この方針で計算を進め、$a_0, \ldots\ldots, a_3$ の決定に必要な上述のパラメータ k の値の確定作業も行った。必ずしも全ての近似分数において $k = 0$ とはならない[38]ことを確認して、一通りの復元計算は完全に終了した[39]。

数学史研究の観点からこの復元結果を評価すると、これまで全く見通しの付かなかった F(x)の再構成(アルゴリズムの復元)に初めて、偶然や恣意性[40]に基づかない明確なアルゴリズムに基づく仮説を提示できたことになる。ここまでの試行錯誤の経過を整理して図式化すると、以下のようになる。

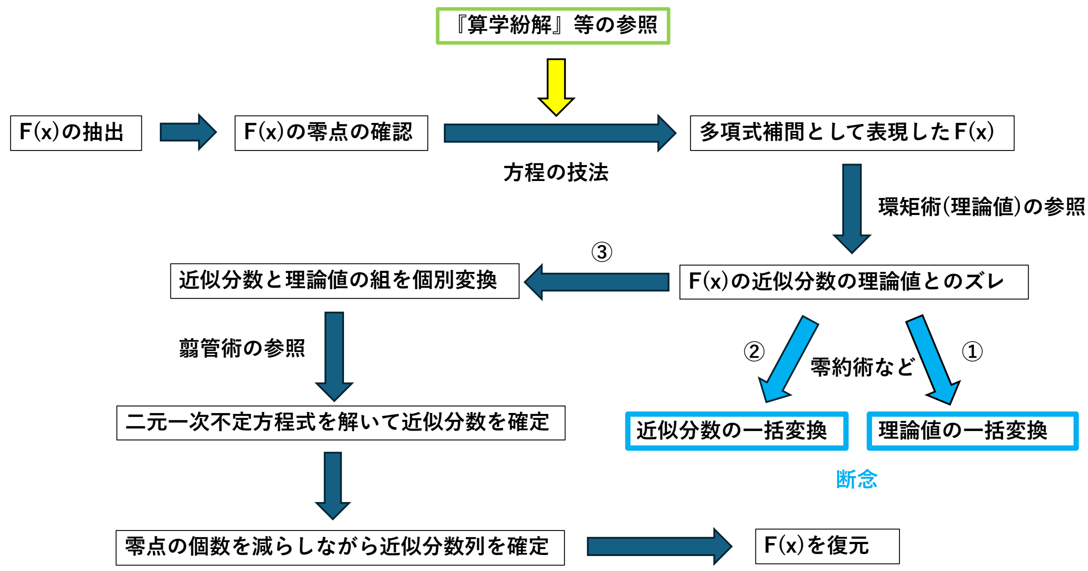

図 4　『研幾算法』第 1 問の復元研究プロセス

9.　F(x)復元後の考察と今後の課題

以上の復元計算を完了したことで、3 つの重要な副産物が得られた。

1 つ目は本報告でも言及した内容で、『括要算法』の 4 巻構成を円理の完成を目指した手順(招差法→翦管術・零約術→角術→円理)として解釈できたことである。この点は、二元一次方程式の解法が F(x)の復元に使えるということを確認したことから思い付いたアイディアである。

---

37 このアイディア(II)は、(I)を確認した 2021 年 2 月 25 日の同日中に着想している。

38 k の値も関・建部が自由に選択したであろうと想定した。

39 2021 年 3 月 1 日のことであった。

40 d と k の値のみ、関・建部が自由に選択したという仮定を設けた。

2つ目は、F(x)が最良近似多項式に類似しているというアイディアである。佐藤[3]では次のように言及した[41]。

> 近似式 F(*x*)は、環矩術で得られた理論値を近似操作によって改変し、その新しいデータ群(理論値の近傍)を通過する近似曲線として構成したものである。この近似多項式と元の関数($arccos^2(1\text{-}2x)$)との間の誤差に着目し、閉区間[0, 0.5]での最大誤差を最小にすることを目標として F(*x*)を構成するならば、これは現代数学の最良近似多項式(minimax approximative polynomial)となる。現代の最良近似多項式と『研幾算法』の F(*x*)が決定的に異なる点は、これを作った関や建部の意識に「誤差」の概念が無かったことであろう。
>
> ……
>
> このように誤差概念を欠いていた『研幾算法』の近似式 F(*x*)であるが、そのことを差し引いても、当時の和算には類例の無いアルゴリズムが採用されたと評価できる。すなわち、初期条件として得られた理論値を近似操作によって変更し、新しい数学的対象(近似式)を生成するというプロセスを関・建部は生み出したことになる。この発想は和算史において『研幾算法』以前にも以後にも現れなかったものである。

ここでも強調したとおり、得られたデータの点を通過する近似曲線を構成するのではなく、その近傍を通過する近似曲線を引き直すという『研幾算法』の操作が、和算史においては極めて希有のものだったことが確認できた[42]。この点は、いくつかの現代数学の「近似計算」に関する教科書類を参照している間に着想したものである。

3つ目は、『研幾算法』の F(*x*)を復元構成できたことで、『括要算法』の弧長を求める多項式(佐藤[3]で H(*x*)と置いた、以下の式)を歴史的に評価するアプローチの可能性が広がったことである。すなわち、従来の研究では H(*x*)は数学史上孤立した存在として説明がなされてきた。今や、F(*x*)の再解釈がなされたことで、H(*x*)が確立する以前の成果として F(*x*)を認識できるようになった。H(*x*)は孤立しておらず、F(*x*)との歴史的連続性を考察する余地ができたのである。

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{1276900(1-x)^5}(5107600x - 23835413x^2 + 43470240x^3 - 37997429x^4 + 15047062x^5 - 1501025x^6 - 281290x^7)$$

---

[41] 佐藤[3]、p. 8.

[42] 和算史の文脈においてこの操作は、後世の和算家に全く後継者を生まなかった。それ故に忘却され、史料にも記録されることが無かったことから、その復元に報告者は多大な労力を要したことになる。

F(x)の復元構成ができた現在の展望として、この H(x)がいかなる経緯を経て成立したのかは次の課題となる。現時点で確認できる点は、以下である。

・H(x)では零点として(0, 0)が採用されている。また、誤差の大きい $x = 0.5$ の近傍に零点 $x = 4.5$ を追加している。これら 2 つの零点の追加は意図的になされたのであろう。
・H(x)の構成法の特長は F(x)と異なり、零点を 1 つ追加するごとに連立方程式の全てを計算し直す必要は無い。H(x)を『括要算法』が指示する手順に従って行列表記すると下三角行列となることから、零点を 1 つ追加するごとに単純な 1 次方程式を解くことで追加すべき係数を決定できる。この計算量の圧縮は顕著である。この計算手順の転換は、F(x)の導出において零点を 1 つずつ減少させて構成した手法を、零点を 1 つずつ増やすという方向に逆転させることを思い付いた結果ではないかと推定する。
・F(x)と H(x)の一番大きな相違点は、後者が有理関数の形式となっていることである。多項式補間から単純に変換できるニュートン補間ではなく、関がなぜこの形式を選択したのかは今のところ、全く理由は分からない。数値実験をした限りの印象ではあるが、F(x)に零点として原点ともう一点($x = 0.45$)を加えて拡張した程度ではさほど精度に変化は見られない。関は何らかの計算を遂行する過程でこの有理関数 H(x)を見出したことで F(x)よりもはるかに精度の高い近似を実現したのではないかと推測している。この解明が現時点での最大の課題である。

おわりに

以上、報告者による復元計算の経緯を試行錯誤も隠すことなくまとめた。

2026 年現在の視点から振り返ると、この 33 年の間、その時々の研究ツールの進展によって、研究の飛躍の契機が与えられてきたことに一入の感慨を覚える。和算家たちがそろばんと算木のみを計算道具として培った江戸時代の成果を、20 世紀後半に我々は最初から電子計算機を駆使して検証できるようになっていた。そして報告者の学生時代には Mathematica 等の安価な数学処理ソフトが登場したことによって、単なる数値計算の検算の域を超えて和算家たちの数学を多方面から「力任せに」分析できるようになった。さらに 21 世紀を迎えると、インターネット経由で史料のデジタル画像が簡単に閲覧できるようになり、調査旅費や複写代といった研究に要するコストは大幅に減った。

そして、おそらく遠くない将来、報告者が数ヶ月間精力を傾けた作業の大半はいともたやすく生成 AI 等によって代替されるかもしれない。とはいえ、現在のところ全国に散在する和算史料に関しては、教師データとなるデジタル化された情報(史料の高精細画像や IIIF 画像、原文の翻刻、翻訳等々)がまだまだ不足しているので、生成 AI によるアウトプットの品質は低く、ハルシネーションを夥しく含んでいる。それにも増して、ハルシネーションがハルシネーションを相互に食いあってグロテスクなインチキ情報を拡大再生産して、この情

報空間を埋め尽くす危惧すらある。そのような状態になる前に、どれだけ正確な和算史の情報を生産していくかが和算史研究に求められている吃緊の課題であろう。そのささやかな実践例として『研幾算法』第 1 問の復元計算に何らかの意義があったとすれば幸甚である。