

ユークリッドの第5公準の証明

佐野 茂(職業大)

1. ユークリッドの公準

ユークリッドは平面幾何を論ずるのに5つの公準を認めている。この中で第5公準は平行線の公理と今日呼ばれて平面幾何を特徴づける重要な公理とされている。

- 公準1 任意の点から任意の点へ直線を引ける。
- 公準2 有限直線を連続して一直線に延長できる。
- 公準3 任意の点と距離(半径)とをもって円を描ける。
- 公準4 すべての直角は互いに等しい。
- 公準5 2直線と交わる 1つの直線が同じ側につくる内角の和が2直角より小さいならば、2直線をその側に延ばせばどこかで交わる。

第5公準は長く命題のようだったので、他の公準から導けるのではないかと考えられ多くの人たちにより試みられた。

ファルカシュ・ボヤイは自分の公準5の誤った証明をガウスに送っている。そのひとつを述べる。公準1~4から公準5を導く

証明 直線ABとPQが図1のように与えられていてABはPAに直交し、PQはPAと鋭角を作っているときにABとPQを充分伸ばせば交わることを証明すればよい。

そこでPA上の1点をMをとり、PQを軸としてMに対称な点をN、ABを軸としてMに対称な点をLとしたときN,M,Lを通る円の中心OでABとPQは交わる。

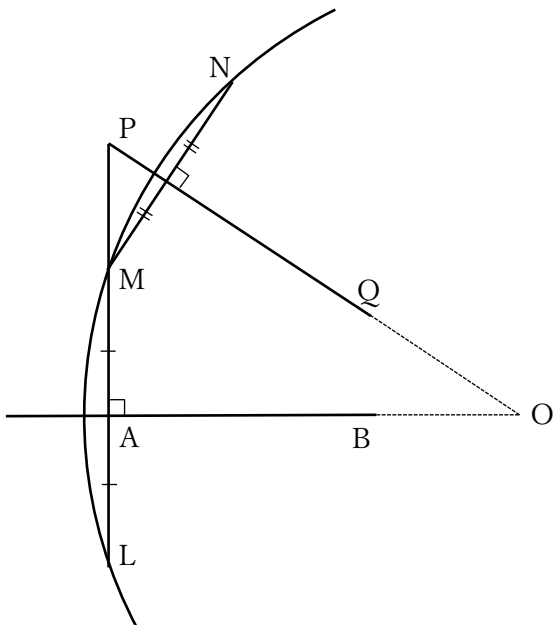
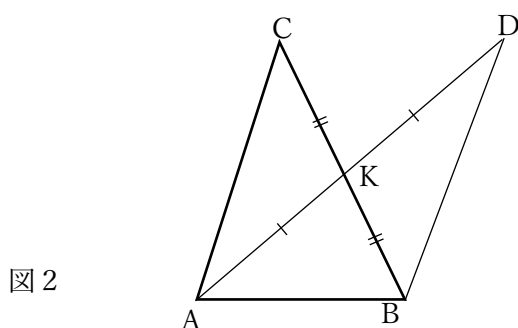


図1

この証明では三角形 NML の外心において交わるとしている。外心の定理の証明では平行線の公理は使われていないと教科書には書いている。しかし、ガウスはこの証明は間違っているとファルカシュ・ボヤイに返事をしている。私もすぐには理由が分からなかった。そこで歴史を振り返りながらこの証明問題を扱っていく。

この問題に正面から取り組んだサッケリの結果を述べる。イタリアの数学者サッケリの仕事は本質的である。

命題 1 与えられた三角形 ABC と内角の和の等しい三角形 $A_1B_1C_1$ で角 A_1 が角 A の高々 $\frac{1}{2}$ となるものが存在する。



証明 三角形 ABC において辺 BC の中点を K とし $AK = KD$ となるように D をとる。三角形 AKC と三角形 DKB は合同だから、三角形 AKC と三角形 DKB の内角の和は等しい。 $\angle CAK$ と $\angle KAB$ の小さい方は $\angle CAB$ の高々半分である。 $\angle BDA$ と $\angle DAB$ の小さい方は $\angle CAB$ の高々半分である。よって、小さい方を $\angle A_1$ として、三角形 ABD を三角形 $A_1B_1C_1$ と置きなおせばよい。

命題 2 (サッケリの定理) 任意の三角形の内角の和は 2 直角を超えない。

証明 三角形 ABC の内角の和が 2 直角より δ だけ大きいと仮定する。命題 1 を繰り返して使う。三角形 $A_2B_2C_2$ の角 A_2 は角 A の高々 $\frac{1}{2^2}$ 。したがって十分大きい n をとると、三角形 $A_nB_nC_n$ の内角の和も 2 直角より δ だけ大きいのに角 A_n は δ より小さくなるから、角 B_n と角 C_n の和が 2 直角より大きくなければならずユークリッドの原論 I 巻命題 17 と矛盾する。

ここで原論 I 巻命題 31 を述べる。

命題 3 (原論 I -31) 直線 BC とその外に点 A が与えられたとき A を通り BC に平行な直線を引くことができる。

平行線の存在は公準 1~4 より出てくる。平行線の一意性を平行線公理は要請しているのである。サツケリはこの一意性も証明出来ると信じて研究したが無駄であった。発想を変えて平行線は一意とは限らないとして理論展開したのがロバチェフキーである。

ロバチェフキーの論文は完成度が高く公理系だけで新たな幾何を構成している。今日、この幾何は双曲幾何と呼ばれている。

平面上で、定直線上にない定点を通る直線はこの直線を切るものと切らないものの2類にわかれる。切らないものを与えられた直線に平行という。

両類の境界線を、与えられた直線の境界平行線という。図3のように定点 A から定直線 BC に垂線 AD を引く。直角 $\angle EAD$ の内側で A から出た直線は AF のように直線 BC と交わるか、AE のように BC と交わらないかである。垂線 AE が直線 DC と交わらない唯一の直線かどうか確かではないとした上で、限りなく延長しても DC と交わらない直線、例えば AG が存在するかも知れない、と仮定しよう。DC と交わる直線から DC と交わらない直線 AG に移る途中、DC との境界平行線 AH に行き当たるのだが、AH は、その片側ではすべての直線 AG は DC と交わらず、他の側はすべての直線 AF は DC を切る、という境界線である。境界平行線は DC と交わらない。この名称はロバチェフキーと若干異なるが明確である。

境界平行線 AH と垂線 AD の間にある角 $\angle HAD$ を平行角といい、 $AD=p$ に対して記号 $\Pi(p)$ で表す。

もし $\Pi(p)$ が直角ならば AE の逆の延長 AE' は DC の逆の延長 DB の境界平行線であり、A を通る直線は直線 EE' を除き、すべて直線 BC と交わるのである。

もし $\Pi(p) < \pi/2$ ($=90^\circ$) ならば AD の反対の側で作った角 $\angle DAK = \Pi(p)$ となる直線 AK は、DC と逆の延長である直線 BC と平行であるから、この仮定のもとでは平行の側(向き)を区別する必要がある。

角 $\angle HAK = 2\Pi(p)$ の内に入る直線、および逆の延長がこの角の内に落ちる直線は直線 BC と交わる部類に属し、境界平行線で分けられた他の直線は BC と交わらない部類に属する。

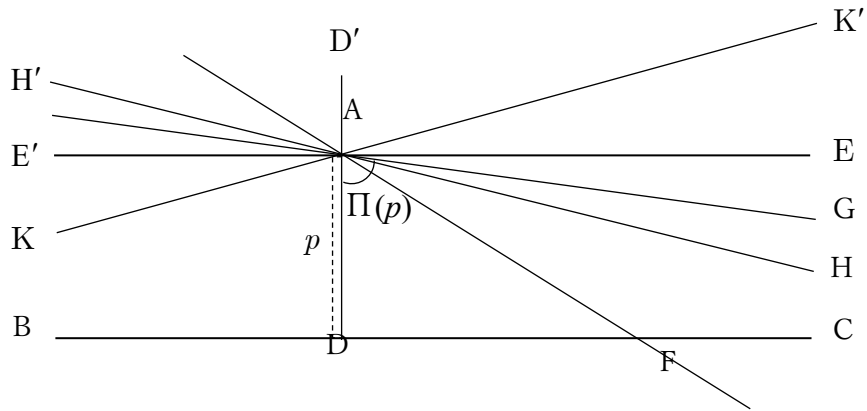


図 3

このように $\Pi(p) = \pi/2$ の仮定では、直線は交わるかまたは平行である。しかし、もし $\Pi(p) < \pi/2$ だと仮定すると、2本の1つは一方の向きに、他方は反対の向きに、境界平行線が存在することになる。

ロバチェフキーは $\Pi(p) = \pi/2$ の場合は平行線公理を満足してユークリッド幾何がり成り立ち、 $\Pi(p) < \pi/2$ の場合は平行線が沢山ある非ユークリッド幾何となると主張している。ロバチェフキーは第5公準（平行線公理）を仮定しないで、2つの場合を認めながら理論展開している。

命題 4 (平行角の存在定理) $\Pi(p) < \pi/2$ のときすべての与えられた角 α に対して $\Pi(p) = \alpha$ となる p が存在する。

またロバチェフキーは、一般にすべての線分について、正であろうと負であろうと

命題 5

$$\tan \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x} \quad (3.1)$$

となることを示している。

命題 6 辺 a, b, c の対角 A, B, C の平面三角形において

$$(1) \sin A \cdot \tan \Pi(a) = \sin B \cdot \tan \Pi(b) \quad (3.2)$$

$$(2) \cos A \cdot \cos \Pi(b) \cdot \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \cdot \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1 \quad (3.3)$$

$$(3) \cos A + \cos B \cdot \cos C = \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin \Pi(a)} \quad (3.4)$$

が成り立つ.

辺 a, b, c が微小ならば, 次の近似値がとれる.

$$\cot \Pi(a) = a$$

$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2$$

$$\cos \Pi(a) = a$$

このような三角形では

$$(1) \quad b \sin A = a \sin B$$

$$(2) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$(3) \quad \cos A + \cos(B+C) = 0 \quad \text{すなわち } A+B+C = \pi$$

となる. つまり, ロバチェフスキーの幾何は三角形の辺がきわめて小さければ, 通常の平面幾何に移行するのである.

ロバチェフスキーは公準だけで導いているのである. これが正弦定理, 余弦定理に対応していることも示すことが出来る. $\Pi(p) < \pi/2$ のときこのような関係式が成り立つことから平行線が沢山ある非ユークリッド幾何が存在すること明らかにしているのである.

広くロバチェフスキーの非ユークリッド幾何が認められるようになったのは, 双曲幾何のモデルがベルトラミーやポアンカレによって与えられてからである

2. ポアンカレの上半平面モデル

上半平面での双曲幾何を与えるポアンカレモデルを述べる. 上半平面

$$H^+ = \{z = x + iy : y > 0\} \quad (3.14)$$

において, 点とはこの上半平面 H^+ での点を考え, 計量を

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

で与える. このときポアンカレモデルでの双曲直線とは x 軸に中心がある上半平面 H^+ の

半円と x 軸と直交する半直線である. この半直線は中心が無遠にいった半円の極限とみ

なせる. 双曲直線 (測地線) を簡単に直線とも呼ぶ. 図 4 における l_1 と l_2 は直線だが, l_3 と l_4 は直線ではない.

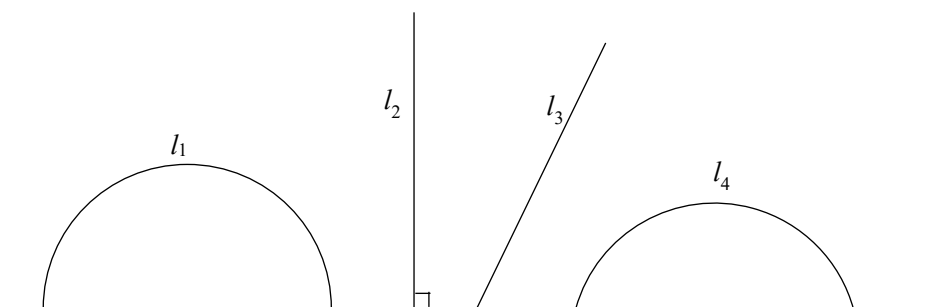


図 4

こうして定義した点と直線は公準 1,2,3,4 を満足する.

ポアンカレモデルで第 5 公準 (平行線公理) が成り立つか調べる. 双曲直線 l とその上にない点 A を図 5 のように与えた場合, 点 A を通り l と交わらない双曲直線が無数にあるのが分かる. 図 5 の m, n は l と x 軸で接しているが, 上半平面には x 軸は含まれていないので交わっていない. ポアンカレモデルでは第 5 公準は成立しないのである.

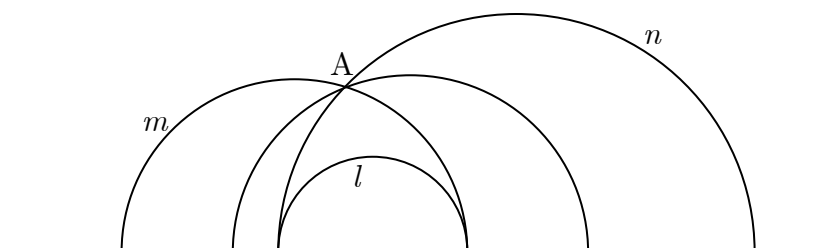


図 5

3. ポアンカレの単位円板モデル

上半平面 H^+ から単位円板 $D = \{w = u + iv : u^2 + v^2 < 1\}$ へのケーリー変換を

$$C : H^+ \rightarrow D, \quad w = C(z) = \frac{1 + iz}{z + i}.$$

で定義する. 計量は

$$ds^2 = 4 \frac{du^2 + dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

で与えられる.

$z = x$ が $-\infty, -1, 0, 1, \infty$ と動くに従って, w は円周上を正方向に, $i, -1, -i, 1, i$ と動く. z が虚軸上にあるときは, $z = iy$ として y が $0, 1, \infty$ と動くとき w は虚軸上を $-i, 0, i$ と動く. z が単位半円上にあるときは, $z = e^{i\theta}$ として θ が $0, \pi/2, \pi$ と動くとき z は半円上を $1, i, -1$ と動き, w は $1, 0, -1$ と実軸上を動く.

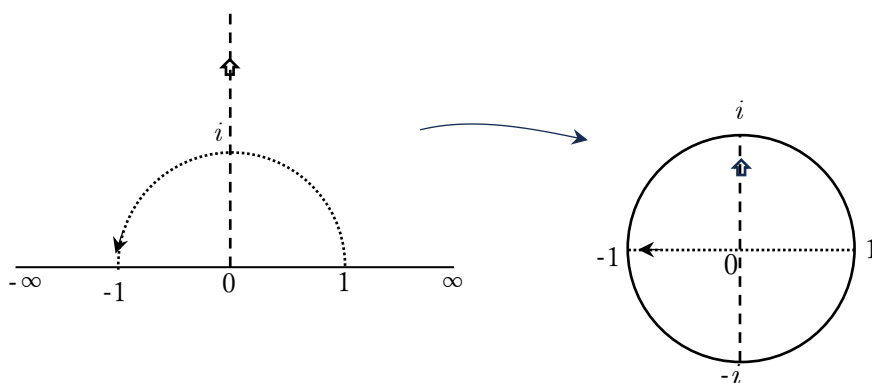


図 6

双曲幾何のモデルとして上半平面 H^+ の代わりに単位円板 D を使ってもよい.

そのとき双曲直線とみなされるものは上半平面において実軸と直交する半円弧をケーリー変換で移したものでなくてはならない. ケーリー変換は円を円に移す等角写像だから D の周りの境界円と直交する円弧でなくてはならない. D の直径も周と直交する半径が無限

の円弧とみなされるので双曲直線である.

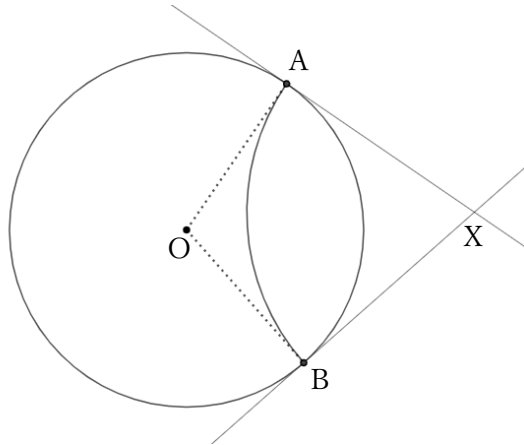


図 7

作図は簡単である. 円の外にある点 X より接線を二本引いて交点を A, B とする. X を中心とし点 A, B を両端とする円弧が双曲直線である. 図 8 には双曲直線を描いている.

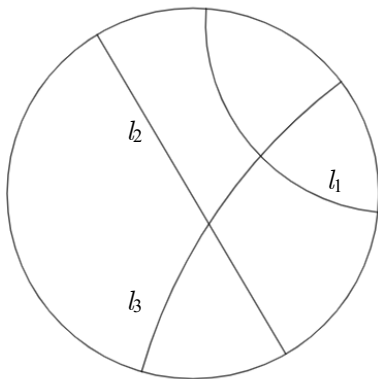


図 8

命題 7 (外心の定理) 双曲三角形の各辺の垂直二等分線は一点で交わる. その交点を中心とし各頂点を通る外接円が描ける. この外接円の中心を外心という.

証明 平面幾何の外心の定理と同じように証明できる

三角形 ABC において辺 AB の垂直二等分線 l_C と辺 CA の垂直二等分線 l_B の交点を O とする. O は l_C 上にあるので $OA=OB$. また O は l_B 上にあるので同様に $OC=OA$. ゆえに $OB=OC$ ここで垂直二等分線は一位に決まることより. 点 B, C の垂直二等分線 l_A は点 O

を通る.

各辺の垂直二等分が一点に交わることが示せた. この3線の交点を外心と呼ぶ.

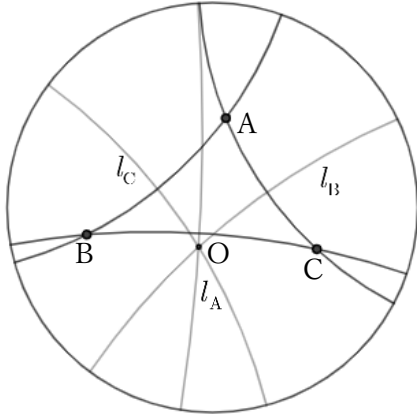


図9 外心

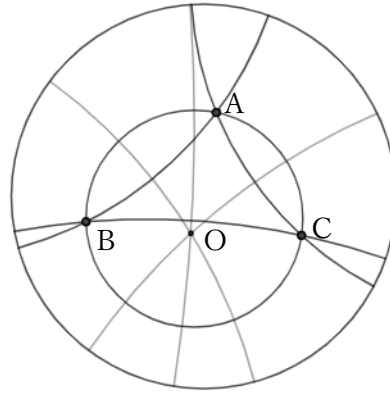


図10 外接円

外心 O を中心として頂点 A を通る双曲円は点 B, C も通る. ユークリッド幾何の円の中心とはずれるが, 距離の定義が異なるので自然な結果である.

ここで注意しないといけないのが, 図11のような場合である. 双曲三角形 ABC の辺 AB の垂直二等分線 l と辺 BC の垂直二等分線 m が交差しないときである. このときは外心が存在しない.

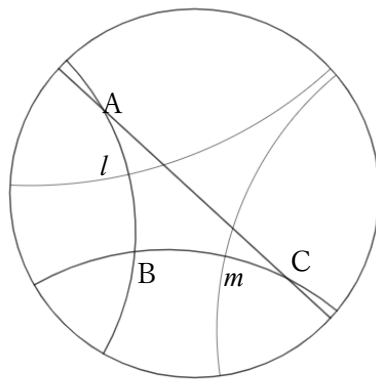


図11

ガウスはファルカシュ・ボヤイの証明が間違いだと指摘した理由が明らかになる. 証明を復習すると.

証明 直線 AB と PQ が図11のように与えられていて AB は PA に直交し, PQ は PA と鋭角を作っているときに AB と PQ を充分伸ばせば交わることを証明すればよい.

そこでPA上の1点をMをとり、PQを軸としてMに対称な点をN、ABを軸としてMに対称な点をLとしたときN,M,Lを通る円の中心OでABとPQは交わる。

図11の場合はPQはPAと鋭角を作っているけれどもABとPQを充分伸ばしても交わらない。三角形NMLには外心がないのだ。ようやく双曲幾何のモデルを使って示せた。平面幾何で外心の証明を調べるとどこにも平行線公理を使っていないように思える。2本の垂直二等分線の交点が必ずあるとした所に平行線公理を使っていたのだ。ガウス程の人でないと見抜けないものである。双曲幾何の外心の定理は正確には「双曲三角形において各辺の垂直二等分線の内で2本が交われば3本の垂直二等分線は1点で交わる」となる。

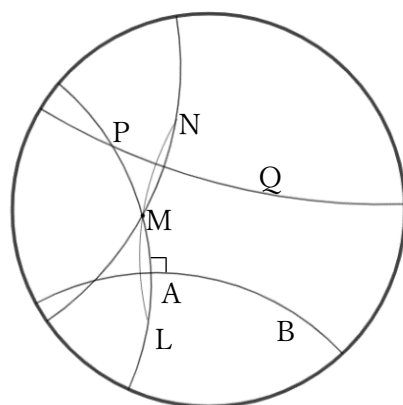


図12

文献

1. わかる幾何学 秋山武太郎著 日新出版
2. ユークリッド幾何から現代幾何へ 小林昭七 日本評論社
3. 幾何のおもしろさ 小平邦彦 岩波書店