第 35 回数学史シンポジウム　津田塾大学　2025.10.11

ダンカン・グレゴリー(Duncan Farquharson Gregory）の "On the Real Nature of Symbolical Algebra"(1838）について

神戸大学国際文化学研究推進インスティテュート 協力研究員 野村恒彦

はじめに（問題意識）

英国における代数学の発展についてはかねてから興味を持っていたが、それはチャールズ・バベッジとジョージ・ピーコックについての研究から派生したものである。

著者がジョージ・ピーコックの『代数学』を始めとする英国における代数学の歴史における位置づけを行おうとする中で、ダンカン・グレゴリーの業績があった。

また、ピーコックが学生時代にメンバーであった解析協会(Analytical Society)の主力メンバーの一人チャールズ・バベッジが英国における代数学に与えた影響もあわせて研究していた。

１　英国における代数学

英国における代数学の発展については、以下のような系譜が考えられる。

アイザック・ニュートン(1642-1727)『普遍算術』(1707)

ジョージ・ピーコック(1791-1858)

ダンカン・グレゴリー(1813-1844)

オーガスタス・ド・モルガン(1806-1871)

ジョージ・ブール(1815-1854)

ところが、V. J. カッツによる『代数学の歴史』でも英国における代数学の発展については一章を割かれておらず、タバクによる『代数学』では言及さえされていない。というのは当時の英国代数学は、代数学の歴史の大きな流れの中では位置付けられていないということを意味する。ところが、そこではジョージ・ブールを輩出しており、決して無視できる歴史ではないと断言して良いと考える。

そのような観点から 19 世紀英国代数学の歴史の全貌を把握するために、まずグレゴリーの時代の代数学の状況について考えてみる。当時の代表的な数学者としてウィリアム・フレンド(1757-1841)がいた。ところが、彼はその著書の中で、代数を負数として用いることを認めなかった(*Principles of Algebra* (1796))。

またフレンドと同様な主張をした数学者には次のような人物がいた。フランシス・マサーズ(1731-1824)とロバート・シムソン(1687-1768)である。

このフレンドらによる主張が代数学の基礎とするのに弱い基盤であることから、ジョージ・ピーコックの『代数学』(*A Treatise of Algebra* (1840))が執筆されたのである。そして、その流れの中にダンカン・グレゴリーが登場する。

2　ダンカン・グレゴリーについて

ダンカン・グレゴリーの生涯について簡単に紹介しておくと、次のようになる。

- 1813 年 エジンバラに生まれる。
- 1833 年 ケンブリッジ大学入学(Trinity College)
- 1837 年 ケンブリッジ大学卒業(Fifth Wrangler)
- 1838 年 ロバート・エリスとともに、Cambridge Mathematical Journal を創刊し、編集長となる。(ジョージ・ブールの初期論文を掲載することになる)
- 1840 年 ケンブリッジ大学フェロー
- 1841 年 修士号取得
- 1844 年 死去(31 歳)

ダンカン・グレゴリーの主な業績もあわせて紹介しておきたい。

- 'On the real nature of symbolical algebra' (1838).
- 'On the logarithms of negative quantities' (1838).
- Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus (1841).
- A Treatise on the Application of Analysis to Solid Geometry (1845)
- The Mathematical Writings of D. F. Gregory, M.A., Ed. W. Walton (1865).

グレゴリーの主たる業績は、代数学の理論を主張したことに位置付けられる。またグレゴリーは代数学を「特別な性質により定義されたものではなく、演算の組合せの法則られている。によって定義される」とした[1]。彼の業績は英国の代数学の歴史全体では小さな存在だが、決し

[1] D. Gregory, 'On the real nature of symbolical algebra', *Transactions of Royal Society of Edinburgh* No.14, 1845, pp.208-16.

て忘れてはならない水脈だと考える。彼の業績はバベッジ、ピーコック、ハーシェルによる解析協会の業績の延長上にある。

3 'On the real nature of symbolical algebra'について

ダンカン・グレゴリーを論じるにあたり1838年のこの論文を選んだのは、彼の最初の論文であり、さらにこの論文にはタイトルを含めSymbolical Algebraという言葉があり、文中でピーコックの業績についても論じられているからである。

そして本論文の中でグレゴリーが「それらが従う演算（操作）の法則によって定義された組み合わせの研究」を行っていることである。

さらにグレゴリーは「量を表わす記号から演算（操作）を表わす記号への分離」を主張し、そして代数を演算の組合せとしたことにより、それらの組み合わせを検討していることも本論文を検討する理由である。

今述べたように、本論文では代数を演算の組み合わせとしたのだが、その演算の組合せについて具体的に5つの種類を提示している。

まず第一の例を取り上げてみよう。

(1) $FF(a) = F(a)$ (2) $ff(a) = F(a)$

(3) $Ff(a) = f(a)$ (4) $fF(a) = f(a)$

これは、＋と－という加算と減算の記号のように考えられる。例で言えば、(1)は＋と＋で+、(2) は－と－で+、(3)は＋と－で−、(4)は－と＋で－となると説明することが出来る。

続く第二の例では次のようになる。

(1) $f_m(a)f_n(a) = f_{m+n}(a)$ (2) $f_m f_n(a) = f_{mn}(a)$

$f_1(a) = a$とすると、 $f_m(a) = a^m$、$f_n = a^n$ で、$f_{m+n}(a) = a^{m+n}$ と指数法則のように理解できる。

ここで、 $(+)^m$と$(-)^n$ということを考えてみる。これらの意味であるが、算術的演算の意味から、mやnが整数の場合はそれらが奇数や偶数の場合を考えても、容易に結論を得ることができるだろう。ところが、グレゴリーはこれらが分数の場合はどうなるのであろうかと考えている。そこでは、$(+)^m = +$ であるから$(+)^{\frac{1}{m}} = +$ 、 $(-)^{2m} = +$ であるから $(+)^{\frac{1}{2m}} = -$ となると説明している。ここで $(+)^{\frac{1}{2m}} = -$ の意味であるが、その前にある$(-)^{2m} = +$ の逆の演算であることから$(+)^{\frac{1}{2m}} = -$ となることを主張しているのである。

第三の例での説明は次のようになっている。

（1） $f(a) + f(b) = f(a + b)$

（2） $f_1 f(a) = f f_1(a)$

これらは分配法則と交換法則を意識したものである。

第四の例では、次のようになっている。

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

この例は、xとyが数値であれば、以下のように演算は log であることがわかる。

$$logA + logB = logAB$$

しかし、xやyが数値以外の場合は違う意味を持ってくるとしている。

第五の例では、次のようになっている。

(1) $aF(x + y) = F(x)\, f(y) + f(x) F(y)$

(2) $af(x + y) = f(x)\, f(y) - cF(x)\, F(y)$

$a = 1$、$c = 1$ であれば、sin と cos の加法定理となる。

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

また、座標回転の式も同様と考えられる。

文中において、この関数の種類で最も重要なものは、ド・モアブルの定理であるとしている。

$$(\cos x + (-)^{\frac{1}{2}} \sin x)^n = \cos n\, x + (-)^{\frac{1}{2}} \sin nx$$

これらの主張をアレイールは次のように、まとめている[2]。

1. その分野一般に証明できることは、その分野のすべての特定の操作にも当てはまる。(これは同義反復のように見えるかもしれないが、グレゴリー・クリアリーはこの点を明示的に述べる必要があると感じた)。

2, 定理、ここで述べた中での二項定理は、記号で表現された異なるクラスの演算間の関係である。さらに、あらゆる科学、すなわち数学におけるあらゆる演算がこれらの分野と同じ組合わせの法則に従うことが示されれば、一般的な場合に含まれる定理はこれらにも当てはまることになる。ただし、結果として生じる組み合わせはすべて、考えられる特定の演算で可能であることが常に条件となる。

---

[2] R. Allaire, “Symbolical Algebra as a Foundation for Calculus: D. F. Gregory’s Contribution”, *Historia Mathematica* 29, 2002, p.407.

3. ある科学分野において 2 つの演算の組み合わせがその科学分野では不可能である場合、その主張、例えば$\sqrt{-1}$というのは算術では成り立たない。

4. 定理が 1 つの科学から別の科学へ応用されるのは、両者の間に類似性があるからではなく、同じ組み合わせの法則に従うからである。グレゴリーは、二項定理とライプニッツの微分公式との類似性について語ったラグランジュの立場と明確に対比させている。

5. 算術は多くの組み合わせの法則の元となる科学であるかもしれないが、必ずしもそうとは限らない。

結論

以上のように本論文でグレゴリーは代数学を「量を表わす記号から演算（操作）を表わす記号への分離」と位置づけ、それに基づいた組み合わせ検討している。

ここではふれなかったが数値のかわりに演算を指数として適用した例も見受けられる。例えば$(1+a)!''$といったものである。このように代数学の定義、それらを展開していったという意味でも重要な論文と考える。さらに 1841 年の Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus では Symbolic Algebra を適用した微分を論じている。

この「量を表わす記号から演算（操作）を表わす記号への分離」のはチャールズ・バベッジの主張と一致する。バベッジはこの主張から解析機関(Analytical Engine)の発想へと繋がっている。

今後の課題

今後の課題としては、グレゴリーの業績全般を 19 世紀英国代数学の歴史に位置付けていき、グレゴリーとド・モルガンの業績から、ピーコックの業績を考えてみたい。可能であれば、ジョージ・ブールの業績まで踏み込んでいきたいと考えている。

最後になりましたが、シンポジウムでの発表の際に貴重なご意見や文献を教示いただきました立教大学名誉教授の佐藤文広先生に心からお礼を申し上げます。

参考文献

[1] V. J. カッツ, K. H. パーシェル, 『代数学の歴史』, 佐藤勝造・佐藤文広訳, 共立出版, 2023.

[2] J. タバク, 『代数学』, 松浦俊輔訳, 青土社, 2005.

[3] A. A. マルティネス, 『負の数学』, 小屋良祐訳, 青土社, 2006.

[4] P. R. Allaire, "Symbolical Algebra as a Foundation for Calculus: D. F. Gregory's Contribution", *Historia Mathematica*, Vol.29, No.4, 2002, pp.395-426.

[5] H. M. Pycior, "Early Criticism of the Symbolical Approach to Algebra", *Historia Mathematica*, Vol.9, No.4, 1982, pp.392-412.

[6] Dictionary of Scientific Biography (1972)

[7] The Dictionary of Nineteenth-Century British Scientists (2004)