Fundamenta nova に於ける Jacobi の勘違いではないかと思われる事に就いて

Yukitaka Miyagawa

2025.10.12.(sunday) 12:20—13:00　於いて、津田塾大学

目 次

1　sn u, cn u, dn u の導関数と、sn $^n u$ の高階導関数

$$\underline{u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

の時、逆函数として $\underline{x=\mathrm{sn}\ u}$ であったのですが [正確には $x=\mathrm{sn}\ (u;k)$ ですが、以下では母数 k は省略します]、これは、$\underline{x=\sin\mathrm{am}\ u}$ とも書かれました。この時、u は $\phi=\mathrm{am}\ u$ の函数として

$$\underline{u=\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}}$$

だったわけです。(逆函数 ϕ を u の函数として $\underline{\phi=\mathrm{am}\ u}$ と表したわけです)[正確には $\phi=\mathrm{am}\ (u,k)$ ですが、矢張り以下では母数 k は省略します]

$\Big[$ $\because$ (1)($1page$) に於いて、$x=\sin\phi$ と変数変換すると、$\begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow x \\ \hline \phi & 0 \longrightarrow \phi \end{array}$, $dx=\cos\phi d\phi$

に依って、 $u = \displaystyle\int_0^\phi \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{(1-\sin^2\phi)(1-k^2\sin^2\phi)}} = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$ となり、

$x = \sin\phi = \sin \mathrm{am}\ u$ であるからです。]

楕円関数 $\mathrm{sn}\ u$ を $\mathrm{am}\ u$ の三角函数として $\sin \mathrm{am}\ u$ と表すという着想こそ、Jacobi の卓抜した着想であり、この一点だけでも、Jacobi は楕円関数論や theta 函数論の正統派であると思います。実際、楕円関数 $\mathrm{sn}\ u$ を $\mathrm{am}\ u$ の三角函数として $\sin \mathrm{am}\ u$ と表せたので、以下の通りに、楕円関数の導関数が滑らかに求まるのです：2番目の楕円関数は、

$\underline{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 u} = \sqrt{1-\sin^2 \mathrm{am}\ u} = \cos \mathrm{am}\ u}$ ですが、これは、$\mathrm{cn}\ u$ とも書かれました。3番目の楕円関数は、$\underline{\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 u} = \sqrt{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\ u} = \mathrm{dn}\ u}$ ですが、これは、$\Delta\mathrm{am}\ u$ とも表すことにします。

先ず、 $\underline{\dfrac{d}{du}\mathrm{am}\ u} = \dfrac{d\phi}{du} = 1\Big/\dfrac{du}{d\phi} = 1\Big/\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\ \underline{= \Delta\mathrm{am}\ u},$

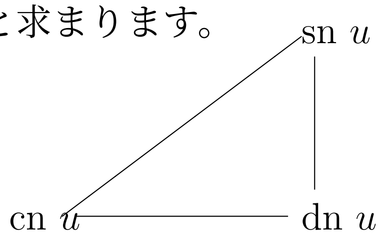
従って、 次々と、 $\underline{\dfrac{d}{du}\sin \mathrm{am}\ u} = (\cos \mathrm{am}\ u)\dfrac{d}{du}\mathrm{am}\ u\ \underline{= (\cos \mathrm{am}\ u)\Delta\mathrm{am}\ u},$

$$\underline{\frac{d}{du}\cos \mathrm{am}\ u} = (-\sin \mathrm{am}\ u)\frac{d}{du}\mathrm{am}\ u\ \underline{= (-\sin \mathrm{am}\ u)\Delta\mathrm{am}\ u},$$

$$\underline{\frac{d}{du}\Delta\mathrm{am}\ u} = \frac{d}{du}\sqrt{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\ u}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-k^2\sin^2 \mathrm{am}\ u}}(-2k^2\sin \mathrm{am}\ u)(\cos \mathrm{am}\ u)\Delta\mathrm{am}\ u\ \underline{= -k^2(\sin \mathrm{am}\ u)\cos \mathrm{am}\ u}$$

と求まります。



$\mathrm{sn}\ u$ の導関数は $\mathrm{cn}\ u$ と $\mathrm{dn}\ u$ との積であり、
$\mathrm{cn}\ u$ の導関数は $\mathrm{sn}\ u$ と $\mathrm{dn}\ u$ との積に
マイナスを付けたものであり、
$\mathrm{dn}\ u$ の導関数は $\mathrm{sn}\ u$ と $\mathrm{cn}\ u$ との積に
$-k^2$ を掛けたものです。

以上から、 $\dfrac{d}{du}\sin^n \mathrm{am}\ u = (n\sin^{n-1} \mathrm{am}\ u)(\cos \mathrm{am}\ u)\Delta\mathrm{am}\ u$ が成り立ちますが、

之をもう1度微分すると、3つの積の導関数であるから、 $\underline{\underline{\dfrac{d^2\sin^n \mathrm{am}\ u}{du^2} =}}$

$$n\Big[\frac{d\sin^{n-1}\mathrm{am}\ u}{du}\Big](\cos\mathrm{am}\ u)\Delta\mathrm{am}\ u+(n\sin^{n-1}\mathrm{am}\ u)\Big[\frac{d\cos\mathrm{am}\ u}{du}\Big]\Delta\mathrm{am}\ u$$

$+(n\sin^{n-1}\mathrm{am}\ u)(\cos\mathrm{am}\ u)\dfrac{d\Delta\mathrm{am}\ u}{du}=n(n-1)\sin^{n-2}\mathrm{am}\ u(\cos^2\mathrm{am}\ u)\Delta^2\mathrm{am}\ u$

$-(n\sin^n\mathrm{am}\ u)\Delta^2\mathrm{am}\ u-nk^2(\sin^n\mathrm{am}\ u)\cos^2\mathrm{am}\ u$

「ここで、$\sin\mathrm{am}\ u=:s$　と置くと、」

$=n(n-1)s^{n-2}(1-s^2)(1-k^2s^2)-ns^n(1-k^2s^2)-nk^2s^n(1-s^2)$

$=n(n-1)s^{n-2}(1-k^2s^2-s^2+k^2s^4)-ns^n(1-k^2s^2)-nk^2s^n(1-s^2)$

$=n(n-1)s^{n-2}-n(n-1)k^2s^n-n(n-1)s^n+n(n-1)k^2s^{n+2}-ns^n(1-k^2s^2)-nk^2s^n(1-s^2)$

$=n(n-1)s^{n-2}-n(n-1)k^2s^n-n(n-1)s^n+n(n-1)k^2s^{n+2}-ns^n+nk^2s^{n+2}-nk^2s^n+nk^2s^{n+2}$

$=n(n-1)s^{n-2}-n^2k^2s^n+nk^2s^n-n^2s^n+ns^n+n^2k^2s^{n+2}-nk^2s^{n+2}+nk^2s^{n+2}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad -nk^2s^n\qquad\qquad -ns^n\qquad\qquad\qquad +nk^2s^{n+2}$

$=n(n-1)s^{n-2}-n^2k^2s^n-n^2s^n+n^2k^2s^{n+2}+nk^2s^{n+2}$

$=n(n-1)\sin^{n-2}\mathrm{am}\ u-n^2(1+k^2)\sin^n\mathrm{am}\ u+n(n+1)k^2\sin^{n+2}\mathrm{am}\ u$　即ち、

$$\frac{d^2s^n}{du^2}=n(n-1)s^{n-2}-n^2(1+k^2)s^n+n(n+1)k^2s^{n+2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

が成り立ちます。($\sin\mathrm{am}\ u=:s$　と置きました。)

(2)(3page) で、次々と $n=2,4,6,8,\cdots$ と置くと、以下の等式の系列が形成されます：(以下、常に、　$\sin\mathrm{am}\ u=:s$　と置きます。)

II.

$$\frac{d^2s^2}{du^2}=2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

$$\frac{d^2s^4}{du^2}=12s^2-16(1+k^2)s^4+20k^2s^6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (4)$$

$$\frac{d^2s^6}{du^2}=30s^4-36(1+k^2)s^6+42k^2s^8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (5)$$

$$\frac{d^2s^8}{du^2}=56s^6-64(1+k^2)s^8+72k^2s^{10}$$

$$\vdots$$

等式$II.$から、次々と下記の系列が見つかります：

$$II.a.$$

$$3!k^2s^4=\frac{d^2s^2}{du^2}+B_2^{(1)}s^2+B_2^{(2)},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

$$5!k^4s^6=\frac{d^4s^2}{du^4}+B_3^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)},\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

$$7!k^6s^8=\frac{d^6s^2}{du^6}+B_4^{(1)}\frac{d^4s^2}{du^4}+B_4^{(2)}\frac{d^2s^2}{du^2}+B_4^{(3)}s^2+B_4^{(4)},\cdots\cdots \quad (8)$$

$$\vdots$$

ここで、

$\underline{B_2^{(2)}=-2, B_2^{(1)}=4(1+k^2)}$

$\underline{B_3^{(3)}=-32(1+k^2), B_3^{(2)}=8(8+7k^2+8k^4), B_3^{(1)}=20(1+k^2)}$

$\underline{B_4^{(4)}=-48(24+23k^2+24k^4), B_4^{(3)}=128(18+15k^2+15k^4+18k^6),}$

$\underline{B_4^{(2)}=112(7+8k^2+7k^4), B_4^{(1)}=56(1+k^2)}$

です。

(6)(4page) は、$II.$の最初の等式の項を入れ替えたものに過ぎない、即ち、$II.$の最初の等式と同値ですから、当然、成り立ちます。

(7)(4page) や (8)(4page) の成立の証明は、これから与えます。

まず、$(4)(3page)\dfrac{d^2s^4}{du^2}=12s^2-16(1+k^2)s^4+20k^2s^6$ に注意しましょう。

この式の両辺に$3!k^2$を掛けると、$6k^2\frac{d^2s^4}{du^2}=72k^2s^2-96k^2(1+k^2)s^4+5!k^4s^6$

$\therefore 5!k^4s^6=6k^2\frac{d^2s^4}{du^2}-72k^2s^2+16(1+k^2)\times 6k^2s^4$

$\therefore 5!k^4s^6=6k^2\frac{d^2s^4}{du^2}-72k^2s^2+16(1+k^2)\left[\frac{d^2s^2}{du^2}-2+4(1+k^2)s^2\right][\because (3)]$

$\therefore 5!k^4s^6=6k^2\frac{d^2s^4}{du^2}+16(1+k^2)\frac{d^2s^2}{du^2}-32(1+k^2)+64(1+k^2)^2s^2-72k^2s^2$

$\therefore 5!k^4s^6=6k^2\frac{d^2s^4}{du^2}+16(1+k^2)\frac{d^2s^2}{du^2}-32(1+k^2)+64(1+2k^2+k^4)s^2-72k^2s^2$

$\therefore 5!k^4s^6=6k^2\frac{d^2s^4}{du^2}+16(1+k^2)\frac{d^2s^2}{du^2}-32(1+k^2)+(64+56k^2+64k^4)s^2$

$\therefore 5!k^4s^6=6k^2\frac{d^2s^4}{du^2}+16(1+k^2)\frac{d^2s^2}{du^2}+8(8+7k^2+8k^4)s^2-32(1+k^2)$

これが (7)(4page)

$\left[5!k^4s^6=\frac{d^4s^2}{du^4}+20(1+k^2)\frac{d^2s^2}{du^2}+8(8+7k^2+8k^4)s^2-32(1+k^2)\right]$ に等しいことを示す為には、

$$6k^2\frac{d^2s^4}{du^2}=\frac{d^4s^2}{du^4}+4(1+k^2)\frac{d^2s^2}{du^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

の成立を示すことが必要十分ですが、
$\frac{d^3s^2}{du^3}=\frac{d}{du}\frac{d^2s^2}{du^2}=\frac{d}{du}[2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4]=-8(1+k^2)s\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}$
$+24k^2s^3\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}=8[3k^2s^3-(1+k^2)s]\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}$　故、
$\frac{d^4s^2}{du^4}=8[9k^2s^2-(1+k^2)][1-s^2][1-k^2s^2]-8[3k^2s^3-(1+k^2)s]s[1-k^2s^2]$

$$-8k^2[3k^2s^3-(1+k^2)s]s[1-s^2]\cdots\cdots (10)$$

一方、$6k^2\frac{d^2s^4}{du^2}-4(1+k^2)\frac{d^2s^2}{du^2}=72k^2s^2-96k^2(1+k^2)s^4+120k^4s^6$

$$-4(1+k^2)[2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4]\cdots\cdots (11)$$

であって、(11) の s^0 の項$=-8(1+k^2)=$(10) の s^0 の項,
(10) の s^6 の項の係数$=72k^4+24k^4+24k^4=120k^4=$(11) の s^6 の項の係数,
(10) の s^2 の項の係数$=72k^2+8(1+k^2)+8k^2(1+k^2)+8(1+k^2)+8k^2(1+k^2)$
$=72k^2+16(1+k^2)+16k^2(1+k^2)=72k^2+16(1+k^2)^2=$(11) の s^2 の項の係数,
(10) の s^4 の項の係数$=-72k^2-72k^4-8k^2(1+k^2)-24k^2-8k^2(1+k^2)-24k^4-8k^2(1+k^2)=-72k^2(1+k^2)-24k^2(1+k^2)-24k^2(1+k^2)=$(11) の s^4 の項の係数

故、(9)(4page) は確かに成り立ちます。i.e., (7)(4page) も成り立ちます。

$II.$ の１番目の等式は、(3)(3$page$)$\frac{d^2s^2}{du^2}=2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4$,

$II.$ の２番目の等式は、(4)(3$page$)$\frac{d^2s^4}{du^2}=12s^2-16(1+k^2)s^4+20k^2s^6$　でした。

(5)(3$page$)　$\frac{d^2s^6}{du^2}=30s^4-36(1+k^2)s^6+42k^2s^8$ に注意しましょう。この式の両辺に $5!k^4$ を掛けると、$120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}=3600k^4s^4-4320k^4(1+k^2)s^6+7!k^6s^8$

$\therefore 7!k^6s^8=120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}-600k^2\times 6k^2s^4+216k^2(1+k^2)\times 20k^2s^6$

$\therefore 7!k^6s^8=120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}-600k^2\left[\frac{d^2s^2}{du^2}-2+4(1+k^2)s^2\right]$
$+216k^2(1+k^2)\left[\frac{d^2s^4}{du^2}-12s^2+16(1+k^2)s^4\right][\because (3)(3page),(4)(3page)]$

$\therefore 7!k^6s^8=120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}-600k^2\frac{d^2s^2}{du^2}+1200k^2-2400k^2(1+k^2)s^2$
$+216k^2(1+k^2)\frac{d^2s^4}{du^2}-2592k^2(1+k^2)s^2+3456k^2(1+k^2)^2s^4$

$\therefore 7!k^6s^8=120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}-600k^2\frac{d^2s^2}{du^2}+1200k^2-2400k^2(1+k^2)s^2$
$+216k^2(1+k^2)\frac{d^2s^4}{du^2}-2592k^2(1+k^2)s^2+576(1+k^2)^2\times 6k^2s^4$

$\therefore 7!k^6s^8=120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}-600k^2\frac{d^2s^2}{du^2}+1200k^2-2400k^2(1+k^2)s^2$
$+216k^2(1+k^2)\frac{d^2s^4}{du^2}-2592k^2(1+k^2)s^2+576(1+k^2)^2\left[\frac{d^2s^2}{du^2}-2+4(1+k^2)s^2\right][\because (3)]$

$\therefore 7!k^6s^8=120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}-600k^2\frac{d^2s^2}{du^2}+1200k^2-2400k^2(1+k^2)s^2$
$+216k^2(1+k^2)\frac{d^2s^4}{du^2}-2592k^2(1+k^2)s^2+576(1+k^2)^2\frac{d^2s^2}{du^2}-1152(1+k^2)^2+2304(1+k^2)^3s^2$

$\therefore 7!k^6s^8 = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2} + 216k^2(1+k^2)\frac{d^2s^4}{du^2} + 576(1+k^2)^2\frac{d^2s^2}{du^2} - 600k^2\frac{d^2s^2}{du^2}$
$+2304(1+k^2)^3s^2 - 2400k^2(1+k^2)s^2 - 2592k^2(1+k^2)s^2$
$+1200k^2 - 1152(1+k^2)^2$
$\therefore 7!k^6s^8 = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2} + 216k^2(1+k^2)\frac{d^2s^4}{du^2} + (576+552k^2+576k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}$
$+[2304(1+k^2)^2 - 2400k^2 - 2592k^2](1+k^2)s^2 - (1152+1104k^2+1152k^4)$
$\therefore 7!k^6s^8 = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2} + 216k^2(1+k^2)\frac{d^2s^4}{du^2} + (576+552k^2+576k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}$
$+[2304 - 384k^2 + 2304k^4](1+k^2)s^2 - (1152+1104k^2+1152k^4)$
$\therefore 7!k^6s^8 = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2} + 216k^2(1+k^2)\frac{d^2s^4}{du^2} + (576+552k^2+576k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}$
$+[2304-384k^2+2304k^4+2304k^2-384k^4+2304k^6]s^2-(1152+1104k^2+1152k^4)$
$\therefore 7!k^6s^8 = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2} + 36(1+k^2)\times 6k^2\frac{d^2s^4}{du^2} + (576+552k^2+576k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}$
$+128(18+15k^2+15k^4+18k^6)s^2 - 48(24+23k^2+24k^4)$

$$\therefore 7!k^6s^8 = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}+36(1+k^2)\left[\frac{d^4s^2}{du^4}+4(1+k^2)\frac{d^2s^2}{du^2}\right]+(576+552k^2+576k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}$$

$+128(18+15k^2+15k^4+18k^6)s^2 - 48(24+23k^2+24k^4)[\because (9)(4page)]$

$$\therefore 7!k^6s^8 = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}+36(1+k^2)\frac{d^4s^2}{du^4}+144(1+k^2)^2\frac{d^2s^2}{du^2}+(576+552k^2+576k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}$$

$+128(18+15k^2+15k^4+18k^6)s^2 - 48(24+23k^2+24k^4)$
$\therefore 7!k^6s^8 = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2} + 36(1+k^2)\frac{d^4s^2}{du^4} + (720+840k^2+720k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}$
$+128(18+15k^2+15k^4+18k^6)s^2 - 48(24+23k^2+24k^4)$
$\therefore 7!k^6s^8 = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2} + 36(1+k^2)\frac{d^4s^2}{du^4} - (64+56k^2+64k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}$

$$+112(7+8k^2+7k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}+128(18+15k^2+15k^4+18k^6)s^2-48(24+23k^2+24k^4).$$

これが (8)(4page) $\Big[7!k^6s^8 = \frac{d^6s^2}{du^6} + 56(1+k^2)\frac{d^4s^2}{du^4} +$

$$112(7+8k^2+7k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}+128(18+15k^2+15k^4+18k^6)s^2-48(24+23k^2+24k^4)\Big]$$

に等しいことを示す為には、

$$\frac{d^6s^2}{du^6}+20(1+k^2)\frac{d^4s^2}{du^4} = 120k^4\frac{d^2s^6}{du^2}-(64+56k^2+64k^4)\frac{d^2s^2}{du^2}\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

の成立を示すことが必要十分です。

$$(9)(4page)\text{ は }\quad 3!k^2\frac{d^2s^4}{du^2} = \frac{d^4s^2}{du^4}+B_2^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

(12) は　$5!k^4\dfrac{d^2s^6}{du^2}=\dfrac{d^6s^2}{du^6}+B_3^{(1)}\dfrac{d^4s^2}{du^4}+B_3^{(2)}\dfrac{d^2s^2}{du^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (14)

と書けますが、実は、これ等は自明だったのです。何となれば、

$$3!k^2s^4=\frac{d^2s^2}{du^2}+B_2^{(1)}s^2+B_2^{(2)}$$ の両辺を u で微分すれば、

$$3!k^2\frac{ds^4}{du}=\frac{d^3s^2}{du^3}+B_2^{(1)}\frac{ds^2}{du},$$ この両辺を更に u で微分すれば、

$$3!k^2\frac{d^2s^4}{du^2}=\frac{d^4s^2}{du^4}+B_2^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2},$$ つまり、(13) が成り立ちます。次に、

$$5!k^4s^6=\frac{d^4s^2}{du^4}+B_3^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}$$ の両辺を u で微分すれば、

$$5!k^4\frac{ds^6}{du}=\frac{d^5s^2}{du^5}+B_3^{(1)}\frac{d^3s^2}{du^3}+B_3^{(2)}\frac{ds^2}{du},$$ この両辺を更に u で微分すれば、

$$5!k^4\frac{d^2s^6}{du^2}=\frac{d^6s^2}{du^6}+B_3^{(1)}\frac{d^4s^2}{du^4}+B_3^{(2)}\frac{d^2s^2}{du^2},$$ つまり、(14) が成り立ち、(8) が成り立ちます。

この様にして、一般に次の様に置ける事が分かります：

$$(2n-1)!k^{2n-2}s^{2n}=\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}}+B_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+\cdots+B_n^{(n-1)}s^2+B_n^{(n)}$$

ここで、$B_n^{(m)}$ は k^2 の m 次の多項式を表しますが、$B_n^{(n)}$ だけは例外で、$B_n^{(n)}$ は k^2 の $n-2$ 次の多項式です。例えば $n=1$ の場合、

$$1!k^0s^2=\frac{d^0s^2}{du^0}+B_1^{(1)},\quad \underline{i.e.,\quad B_1^{(1)}=0}$$

となり、$B_1^{(1)}$ だけは、k^2 の $-\infty$ 次の多項式です。-1 次とは $-\infty$ 次の事です。

『我々の出発点である一般式 (2)(3page)

$$\frac{d^2s^n}{du^2}=n(n-1)s^{n-2}-n^2(1+k^2)s^n+n(n+1)k^2s^{n+2}$$

に依って

$$B_n^{(m)}=B_{n-1}^{(m)}+(2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(m-1)}-(2n-3)^2(2n-2)(2n-4)k^2B_{n-2}^{(m-2)}\cdots\quad(15)$$

となるのは自明です。ここで、$m>n$ のときは、$B_n^{(m)}=0$ と置かねばなりません。』

これは、Fundamenta nova の第 43 節に Jacobi に依って書かれている事です。すると、

$$B_4^{(3)} = B_{4-1}^{(3)} + (2\times4-2)^2(1+k^2)B_{4-1}^{(3-1)} - (2\times4-3)^2(2\times4-2)(2\times4-4)k^2B_{4-2}^{(3-2)},$$

$$i.e.,\quad B_4^{(3)} = B_3^{(3)} + 6^2(1+k^2)B_3^{(2)} - 5^2\times6\times4k^2B_2^{(1)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

が成り立つ筈ですが、実は、これは成立しません。成り立たない事を確認しましょう：

$B_4^{(3)} = 128(18+15k^2+15k^4+18k^6)$, $\quad B_3^{(3)} = -32(1+k^2)$,

$B_3^{(2)} = 8(8+7k^2+8k^4)$, $\quad B_2^{(1)} = 4(1+k^2)$ 　であり、

(16) の右辺 $= B_3^{(3)} + 36(1+k^2)B_3^{(2)} - 25\times24k^2B_2^{(1)}$

$= -32(1+k^2) + 36(1+k^2)\times8(8+7k^2+8k^4) - 25\times24k^2\times4(1+k^2)$

$= -32(1+k^2) + (36+36k^2)(64+56k^2+64k^4) - 2400k^2(1+k^2)$

ですが、この式の k^0 の項の係数は、$-32+36\times64 = 2272$ 　となります。然るに、(16) の左辺 $= B_4^{(3)} = 128(18+15k^2+15k^4+18k^6)$ の k^0 の項の係数は、$128\times18 = 2304$ 　となり、明らかに、2272 とは異なります。

故に、(16)(8page) は成り立ちません。私は此の事に少なくとも 2021.7.23. 以前に気付いて居ました。Jacobi は何か勘違いしていると思われます。

また、前々ページ以前の証明から、有理整数の間の、「神秘的な関連」が感知されます。即ち、

$(7)(4page)5!k^4s^6 = \frac{d^4s^2}{du^4} + B_3^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2} + B_3^{(2)}s^2 + B_3^{(3)}$

$$\Longleftrightarrow (13)(6page)3!k^2\frac{d^2s^4}{du^2} = \frac{d^4s^2}{du^4} + B_2^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}$$

と $(8)(4page)7!k^6s^8 = \frac{d^6s^2}{du^6} + B_4^{(1)}\frac{d^4s^2}{du^4} + B_4^{(2)}\frac{d^2s^2}{du^2} + B_4^{(3)}s^2 + B_4^{(4)}$

$$\Longleftrightarrow (14)(7page)5!k^4\frac{d^2s^6}{du^2} = \frac{d^6s^2}{du^6} + B_3^{(1)}\frac{d^4s^2}{du^4} + B_3^{(2)}\frac{d^2s^2}{du^2}$$

という 2 つの同値式の中に、有理整数の間の、「神秘的な関連」が感知されます。楕円函数論は、まさしく、整数論であると思います。

Jacobi は、

『(15)(7page)

$B_n^{(m)} = B_{n-1}^{(m)} + (2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(m-1)} - (2n-3)^2(2n-2)(2n-4)k^2B_{n-2}^{(m-2)}$

となるのは自明です。ここで、$m > n$ のときは、$B_n^{(m)} = 0$ と置かねばなりません。』

と言って居ますが、$(n,m)=(4,3)$ のときは成立しない事は、既に確かめた通りです。しかし、$(n,m)=(4,4)$, $(n,m)=(3,3)$ のときは成立して居ます。これ等の事は、私の電子書籍「参考文献 [3](和訳したもの)」で、確かめてあります。つまり、(15) は、何らかの制限付きで、定理になると思います。

ついでながら、Jacobi, Fundamenta nova「参考文献 [1]」に於ける殆ど全ての数式に対しては、其の成立の確かさを、私の電子書籍「参考文献 [2], [3](和訳したもの)」では、確かめてあります (一般的に確かめる事が難しく、具体例で確かめる事しか出来なかった箇所も在りますが！)。それをしない、即ち、数式の成立の確かさを確かめない翻訳では、Jacobi の言う事を盲目的に信じて、ただ横のものを縦にするだけの翻訳になって仕舞うのではないでしょうか !? 私は、その様な翻訳は避けたく、可能な限り、数式の成立の確かさを確かめる翻訳を心掛けたかったのです。しかし、私が確かめることが出来なかった数式も、二三在ります。其の様な箇所には、?????を付けて、そのままにしてあります。

それにしても、Jacobi にしても、Eisenstein にしても、19 世紀のドイツ人の計算力は、素晴らしいです。私の様な現代人は、とても敵いません。

参考文献

[1] Jacobi, Fundamenta Nova Theoriæ Functionum Ellipticarum

[2] Jacobi 著、Yukitaka Miyagawa 翻訳、電子書籍「Fundamenta nova(上巻)」(本文は日本語です)、電子書籍販売サイト：Rakuten Kobo ebook ストア。

[3] Jacobi 著、Yukitaka Miyagawa 翻訳、電子書籍「Fundamenta nova(下巻)」(本文は日本語です)、電子書籍販売サイト：Rakuten Kobo ebook ストア。

2 附録

$$(6)(4page)3!k^2s^4=\frac{d^2s^2}{du^2}+B_2^{(1)}s^2+B_2^{(2)}\quad \text{を}$$

$$(7)(4page)5!k^4s^6=20k^2s^2\cdot 3!k^2s^4=\frac{d^4s^2}{du^4}+B_3^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}\quad \text{に代入すると、}$$

$$20k^2s^2\Big[\frac{d^2s^2}{du^2}+B_2^{(1)}s^2+B_2^{(2)}\Big]=\frac{d^4s^2}{du^4}+B_3^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}.$$

$$\therefore [20k^2s^2-B_3^{(1)}]\frac{d^2s^2}{du^2}+20k^2B_2^{(1)}s^4+20k^2B_2^{(2)}s^2=\frac{d^4s^2}{du^4}+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}.\quad \text{これに}$$

(13)(6page)$3!k^2\frac{d^2s^4}{du^2}=\frac{d^4s^2}{du^4}+B_2^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}$から得られる$\frac{d^4s^2}{du^4}=3!k^2\frac{d^2s^4}{du^2}-B_2^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}$ を代入すると、

$$[20k^2s^2-B_3^{(1)}]\frac{d^2s^2}{du^2}+20k^2B_2^{(1)}s^4+20k^2B_2^{(2)}s^2=\left[3!k^2\frac{d^2s^4}{du^2}-B_2^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}\right]+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}.$$

$$\therefore [20k^2s^2-B_3^{(1)}+B_2^{(1)}]\frac{d^2s^2}{du^2}+20k^2B_2^{(1)}s^4+20k^2B_2^{(2)}s^2=3!k^2\frac{d^2s^4}{du^2}+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}.$$

これに、(3)(3page)$\frac{d^2s^2}{du^2}=2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4,$

(4)(3page)$\frac{d^2s^4}{du^2}=12s^2-16(1+k^2)s^4+20k^2s^6$　を代入すると、

$[20k^2s^2-B_3^{(1)}+B_2^{(1)}][2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4]+20k^2B_2^{(1)}s^4+20k^2B_2^{(2)}s^2=3!k^2[12s^2-16(1+k^2)s^4+20k^2s^6]+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}.$

$$\therefore 20k^2s^2[2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4]+[B_2^{(1)}-B_3^{(1)}][2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4]$$
$$=3!k^2[12s^2-16(1+k^2)s^4+20k^2s^6]+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}-20k^2B_2^{(1)}s^4-20k^2B_2^{(2)}s^2.$$

$$\therefore 20k^2s^2[2-4(1+k^2)s^2]+[B_2^{(1)}-B_3^{(1)}][2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4]$$
$=3!k^2[12s^2-16(1+k^2)s^4]+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}-20k^2B_2^{(1)}s^4-20k^2B_2^{(2)}s^2.$　両辺の

s^4の項の係数を比較して、$6k^2[B_2^{(1)}-B_3^{(1)}]-80k^2(1+k^2)+20k^2B_2^{(1)}+96k^2(1+k^2)=0$

$\therefore 26k^2B_2^{(1)}-6k^2B_3^{(1)}+16k^2(1+k^2)=0.$　s^2の項の係数を比較して、

$40k^2-4(1+k^2)[B_2^{(1)}-B_3^{(1)}]=72k^2+B_3^{(2)}-20k^2B_2^{(2)}.$　s^0の項の係数を比較して、

$$2[B_2^{(1)}-B_3^{(1)}]=B_3^{(3)} \cdots\cdots (17)$$

$$-4(1+k^2)[B_2^{(1)}-B_3^{(1)}]=32k^2+B_3^{(2)}-20k^2B_2^{(2)} \cdots\cdots (18)$$

$B_2^{(1)}=4(1+k^2)$,　$B_3^{(1)}=20(1+k^2),$　$B_2^{(2)}=-2$ 故、2 番目の式 (18) は、

$$64(1+k^2)^2=72k^2+B_3^{(2)} \cdots\cdots (19)$$

となります。次に、(7)(4page)$5!k^4s^6=\frac{d^4s^2}{du^4}+B_3^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}$　を

$(8)(4page)7!k^6s^8 = \dfrac{d^6s^2}{du^6} + B_4^{(1)}\dfrac{d^4s^2}{du^4} + B_4^{(2)}\dfrac{d^2s^2}{du^2} + B_4^{(3)}s^2 + B_4^{(4)}$ に代入すると、

$$42k^2s^2\Big[\frac{d^4s^2}{du^4}+B_3^{(1)}\frac{d^2s^2}{du^2}+B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}\Big] = \frac{d^6s^2}{du^6}+B_4^{(1)}\frac{d^4s^2}{du^4}+B_4^{(2)}\frac{d^2s^2}{du^2}+B_4^{(3)}s^2+B_4^{(4)}.$$

故に、

$$[42k^2s^2-B_4^{(1)}]\frac{d^4s^2}{du^4}+[42k^2s^2B_3^{(1)}-B_4^{(2)}]\frac{d^2s^2}{du^2}+42k^2s^2[B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}] = \frac{d^6s^2}{du^6}+B_4^{(3)}s^2+B_4^{(4)}.$$

これに、$(14)(7page)5!k^4\dfrac{d^2s^6}{du^2} = \dfrac{d^6s^2}{du^6} + B_3^{(1)}\dfrac{d^4s^2}{du^4} + B_3^{(2)}\dfrac{d^2s^2}{du^2}$ から得られる

$\dfrac{d^6s^2}{du^6} = 5!k^4\dfrac{d^2s^6}{du^2} - B_3^{(1)}\dfrac{d^4s^2}{du^4} - B_3^{(2)}\dfrac{d^2s^2}{du^2}$ を代入すると、

$$[42k^2s^2 - B_4^{(1)}]\frac{d^4s^2}{du^4} + [42k^2s^2B_3^{(1)} - B_4^{(2)}]\frac{d^2s^2}{du^2} + 42k^2s^2[B_3^{(2)}s^2 + B_3^{(3)}] =$$

$$5!k^4\frac{d^2s^6}{du^2} - B_3^{(1)}\frac{d^4s^2}{du^4} - B_3^{(2)}\frac{d^2s^2}{du^2} + B_4^{(3)}s^2 + B_4^{(4)}.$$

$$\therefore [42k^2s^2-B_4^{(1)}+B_3^{(1)}]\frac{d^4s^2}{du^4}+[42k^2s^2B_3^{(1)}-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}]\frac{d^2s^2}{du^2}+42k^2s^2[B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}]$$

$$= 5!k^4\frac{d^2s^6}{du^2} + B_4^{(3)}s^2 + B_4^{(4)}.$$ これに

$(13)(6page)3!k^2\dfrac{d^2s^4}{du^2} = \dfrac{d^4s^2}{du^4} + B_2^{(1)}\dfrac{d^2s^2}{du^2}$ から得られる $\dfrac{d^4s^2}{du^4} = 3!k^2\dfrac{d^2s^4}{du^2} - B_2^{(1)}\dfrac{d^2s^2}{du^2}$

を代入すると、$[42k^2s^2 - B_4^{(1)} + B_3^{(1)}]\Big[3!k^2\dfrac{d^2s^4}{du^2} - B_2^{(1)}\dfrac{d^2s^2}{du^2}\Big]$

$$= 5!k^4\frac{d^2s^6}{du^2}+B_4^{(3)}s^2+B_4^{(4)}-[42k^2s^2B_3^{(1)}-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}]\frac{d^2s^2}{du^2}-42k^2s^2[B_3^{(2)}s^2+B_3^{(3)}].$$

故に、

$$3!k^2[42k^2s^2-B_4^{(1)}+B_3^{(1)}]\frac{d^2s^4}{du^2}+\Big[[42k^2s^2B_3^{(1)}-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}]-B_2^{(1)}[42k^2s^2-B_4^{(1)}+B_3^{(1)}]\Big]\frac{d^2s^2}{du^2}$$

$$= 5!k^4\frac{d^2s^6}{du^2} + B_4^{(3)}s^2 + B_4^{(4)} - 42k^2s^2[B_3^{(2)}s^2 + B_3^{(3)}].$$

$B_4^{(1)} = 56(1+k^2)$, $B_3^{(1)} = 20(1+k^2)$, $B_2^{(1)} = 4(1+k^2)$, $B_3^{(3)} = -32(1+k^2)$
を代入すると、

$$3!k^2[42k^2s^2-56(1+k^2)+20(1+k^2)]\frac{d^2s^4}{du^2}+$$

$$\Big[[42k^2\cdot 20(1+k^2)s^2-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}]-4(1+k^2)[42k^2s^2-56(1+k^2)+20(1+k^2)]\Big]\frac{d^2s^2}{du^2}$$

$$=5!k^4\frac{d^2s^6}{du^2}+B_4^{(3)}s^2+B_4^{(4)}-42k^2s^2[B_3^{(2)}s^2-32(1+k^2)].$$

$$\therefore 3!k^2[42k^2s^2-36(1+k^2)]\frac{d^2s^4}{du^2}+$$

$$\Big[[42k^2\cdot 20(1+k^2)s^2-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}]-4(1+k^2)[42k^2s^2-36(1+k^2)]\Big]\frac{d^2s^2}{du^2}$$

$$=5!k^4\frac{d^2s^6}{du^2}+B_4^{(3)}s^2+B_4^{(4)}-42k^2s^2[B_3^{(2)}s^2-32(1+k^2)].$$

これに、$(3)(3page)\dfrac{d^2s^2}{du^2}=2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4,$

$(4)(3page)\dfrac{d^2s^4}{du^2}=12s^2-16(1+k^2)s^4+20k^2s^6$

$(5)(3page)\dfrac{d^2s^6}{du^2}=30s^4-36(1+k^2)s^6+42k^2s^8$　を代入すると、

$$3!k^2[42k^2s^2-36(1+k^2)][12s^2-16(1+k^2)s^4+20k^2s^6]+$$

$$\Big[[42k^2\cdot 20(1+k^2)s^2-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}]-4(1+k^2)[42k^2s^2-36(1+k^2)]\Big][2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4]$$

$$=5!k^4[30s^4-36(1+k^2)s^6+42k^2s^8]+B_4^{(3)}s^2+B_4^{(4)}-42k^2s^2[B_3^{(2)}s^2-32(1+k^2)].$$

両辺から s^8 の項は消えるから、s^6 の項の係数を比較して、

$$3!k^2\Big[42k^2[-16(1+k^2)]+20k^2[-36(1+k^2)]\Big]$$
$$+42k^2\cdot 16(1+k^2)\cdot 6k^2=5!k^4[-36(1+k^2)]$$

$$\therefore k^2\Big[7k^2[-4(1+k^2)]+5k^2[-6(1+k^2)]\Big]+7k^2\cdot 4(1+k^2)\cdot k^2=30k^4[-(1+k^2)]$$

$\therefore 7k^2[-2(1+k^2)]+5k^2[-3(1+k^2)]+7k^2\cdot 2(1+k^2)=15k^2[-(1+k^2)]$　これは、tautology です。s^4 の項の係数を比較して、

$$3!k^2[42k^2\cdot 12+36\cdot 16(1+k^2)^2]+[42k^2\cdot 16(1+k^2)][-4(1+k^2)]$$
$$+[144(1+k^2)^2-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}]\cdot 6k^2=3600k^4-42k^2B_3^{(2)}$$

$$\therefore 3![42k^2\cdot 12+36\cdot 16(1+k^2)^2]+42\cdot 16(1+k^2)[-4(1+k^2)]$$
$$+[144(1+k^2)^2-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}]\cdot 6=3600k^2-42B_3^{(2)}$$

$$\therefore 42k^2\cdot 12+36\cdot 16(1+k^2)^2+7\cdot 16(1+k^2)[-4(1+k^2)]$$
$$+144(1+k^2)^2-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}=600k^2-7B_3^{(2)}$$

$$\therefore 42k^2\cdot 12+[36-28]\cdot 16(1+k^2)^2+144(1+k^2)^2-B_4^{(2)}=600k^2-8B_3^{(2)}$$

$$\therefore 504k^2+128(1+k^2)^2+144(1+k^2)^2-B_4^{(2)}=600k^2-8B_3^{(2)}$$

$$\therefore 272(1+k^2)^2-B_4^{(2)}=96k^2-8B_3^{(2)} \qquad \therefore 8B_3^{(2)}=96k^2+B_4^{(2)}-272(1+k^2)^2.$$

$$3!k^2[42k^2s^2-36(1+k^2)][12s^2-16(1+k^2)s^4+20k^2s^6]+$$
$$\left[42k^2\cdot 16(1+k^2)s^2-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}+144(1+k^2)^2\right][2-4(1+k^2)s^2+6k^2s^4]$$
$$=5!k^4[30s^4-36(1+k^2)s^6+42k^2s^8]+B_4^{(3)}s^2+B_4^{(4)}-42k^2s^2[B_3^{(2)}s^2-32(1+k^2)]$$

の両辺の s^2 の項の係数を比較して、

$$3!k^2[-36(1+k^2)]\cdot 12+2\cdot 42k^2\cdot 16(1+k^2)+[144(1+k^2)^2-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}][-4(1+k^2)]$$
$$=B_4^{(3)}-42k^2[-32(1+k^2)]$$
$$\therefore -2592k^2(1+k^2)+1344k^2(1+k^2)-576(1+k^2)^3+4(1+k^2)[B_4^{(2)}-B_3^{(2)}]$$
$$=B_4^{(3)}+1344k^2(1+k^2)$$

$$\therefore B_4^{(3)}=-2592k^2(1+k^2)-576(1+k^2)^3+4(1+k^2)[B_4^{(2)}-B_3^{(2)}]\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

s^0 の項の係数を比較して、

$$2[144(1+k^2)^2-B_4^{(2)}+B_3^{(2)}]=B_4^{(4)}$$

$$\therefore 288(1+k^2)^2-2B_4^{(2)}+2B_3^{(2)}=B_4^{(4)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (21)$$

さて、(19)(10page)$64(1+k^2)^2=72k^2+B_3^{(2)}$

と、(20)(13page)$B_4^{(3)}=-2592k^2(1+k^2)-576(1+k^2)^3+4(1+k^2)[B_4^{(2)}-B_3^{(2)}]$

を比較してみましょう。先ず、(20) に依り、$B_4^{(3)}=$

$$-4(1+k^2)B_3^{(2)}-2592k^2(1+k^2)-576(1+k^2)^3+4(1+k^2)[112(7+8k^2+7k^4)]$$

$$=-4(1+k^2)B_3^{(2)}+4(1+k^2)[112(7+8k^2+7k^4)-648k^2-144(1+k^2)^2]$$

$$=-4(1+k^2)B_3^{(2)}+4(1+k^2)[640-40k^2+640k^4]$$

$$=-4(1+k^2)B_3^{(2)}+4(1+k^2)[640+1280k^2+640k^4-1320k^2]$$

$$=-4(1+k^2)B_3^{(2)}+4(1+k^2)[640+1280k^2+640k^4]-5280k^2(1+k^2)$$

$$=-4(1+k^2)B_3^{(2)}+4(1+k^2)[10\cdot 64(1+k^2)^2]-5280k^2(1+k^2)$$

　この $B_4^{(3)} = -4(1+k^2)B_3^{(2)} + 4(1+k^2)[10\cdot 64(1+k^2)^2] - 5280k^2(1+k^2)$ に、(19)(10page)$64(1+k^2)^2 = 72k^2 + B_3^{(2)}$ を代入すると、

$B_4^{(3)} = -4(1+k^2)B_3^{(2)} + 40(1+k^2)[72k^2 + B_3^{(2)}] - 5280k^2(1+k^2)$

$= 36(1+k^2)B_3^{(2)} + 40(1+k^2)[72k^2] - 5280k^2(1+k^2)$

$= 36(1+k^2)B_3^{(2)} - 2400k^2(1+k^2) = 36(1+k^2)B_3^{(2)} - 600k^2\cdot 4(1+k^2)$

$= 36(1+k^2)B_3^{(2)} - 600k^2B_2^{(1)}$　となりますが、これは

$$B_4^{(3)} = 6^2(1+k^2)B_3^{(2)} - 5^2\times 6\times 4k^2B_2^{(1)}$$

に他なりません。講演の時点では、私には以上の様な計算しか出来ませんでした。

　さて、

$$B_4^{(4)} = 6^2(1+k^2)B_3^{(3)} - 5^2\times 6\times 4k^2B_2^{(2)} \cdots\cdots \quad (22)$$

の成立も確かめてみましょう。

(21)(13page)$288(1+k^2)^2 - 2B_4^{(2)} + 2B_3^{(2)} = B_4^{(4)}$ を利用しましょう。

$B_3^{(3)} = -32(1+k^2)$　故、$6^2(1+k^2)B_3^{(3)} = -1152(1+k^2)^2$

$\therefore B_4^{(4)} = 288(1+k^2)^2 - 2B_4^{(2)} + 2B_3^{(2)} =$

$6^2(1+k^2)B_3^{(3)} + 1440(1+k^2)^2 - 2B_4^{(2)} + 2B_3^{(2)}$

$\Big[B_4^{(2)} = 112(7+8k^2+7k^4),\quad B_3^{(2)} = 8(8+7k^2+8k^4)$　を代入すると、

$= 6^2(1+k^2)B_3^{(3)} + 1440(1+k^2)^2 - 2[112(7+8k^2+7k^4)] + 2[8(8+7k^2+8k^4)]$

$= 6^2(1+k^2)B_3^{(3)} + 1440 + 2880k^2 + 1440k^4 - 1568 - 1792k^2 - 1568k^4$

$+128 + 112k^2 + 128k^4$

$= 6^2(1+k^2)B_3^{(3)} + 2880k^2 - 1792k^2 + 112k^2 = 6^2(1+k^2)B_3^{(3)} + 1200k^2$

$= 6^2(1+k^2)B_3^{(3)} - 600k^2\times(-2) = 6^2(1+k^2)B_3^{(3)} - 600k^2B_2^{(2)}$

　これは、(22) に他なりません。(21)(13page) を用意していたので、こんなにもアッサリと確かめられたのです。また、

$B_n^{(m)} = (2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(m-1)} - (2n-3)^2(2n-2)(2n-4)k^2B_{n-2}^{(m-2)}$

に於いて、$(n,m) = (3,3)$ とすると、

$$B_3^{(3)} = (2\times 3-2)^2(1+k^2)B_{3-1}^{(3-1)} - (2\times 3-3)^2(2\times 3-2)(2\times 3-4)k^2B_{3-2}^{(3-2)}$$

$$i.e.,\quad B_3^{(3)} = 4^2(1+k^2)B_2^{(2)} - 3^2\times 4\times 2k^2B_1^{(1)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

となりますが、これも確かめてみましょう。

(18)(10page)$-4(1+k^2)[B_2^{(1)} - B_3^{(1)}] = 32k^2 + B_3^{(2)} - 20k^2B_2^{(2)}$　に
(17)$(10page)2[B_2^{(1)} - B_3^{(1)}] = B_3^{(3)}$　を代入すると、
$-2(1+k^2)B_3^{(3)} = 32k^2 + B_3^{(2)} - 20k^2B_2^{(2)}$　これに、
$B_3^{(2)} = 8(8+7k^2+8k^4)$　を代入すると、
$-2(1+k^2)B_3^{(3)} = 32k^2 + 8(8+7k^2+8k^4) - 20k^2B_2^{(2)}$

$$\therefore (1+k^2)B_3^{(3)} = -16k^2 - 4(8+7k^2+8k^4) + 10k^2B_2^{(2)}$$

$\therefore (1+k^2)B_3^{(3)} = -16k^2 - 32 - 28k^2 - 32k^4 + 10k^2B_2^{(2)}$　これに、
$B_2^{(2)} = -2$　を代入すると、
$(1+k^2)B_3^{(3)} = -32 - 44k^2 - 32k^4 - 20k^2 = -32(1+2k^2+k^4)$

$$\therefore B_3^{(3)} = -32(1+k^2) = 4^2(1+k^2)B_2^{(2)} - 3^2\times 4\times 2k^2B_1^{(1)}$$
$$\left[\because B_2^{(2)} = -2,\quad B_1^{(1)} = 0.\right]$$

依って、(23)(15page)$B_3^{(3)} = 4^2(1+k^2)B_2^{(2)} - 3^2\times 4\times 2k^2B_1^{(1)}$　も確かめられました。

本稿では、至る所で、長い計算を行いましたが、長い計算も、まんざら無駄では無いと思います。何故なら Fundamenta nova は、半分以上どころか殆どが数式である、最も数学書らしい数学書でして、私は、いたずらに言語に酔ったりせずに、Fundamenta nova の様に数式で数学を語るのが理想だと思って居るからです。

3　演繹的な証明への挑戦

$$(2n-1)!k^{2n-2}s^{2n} = \frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + B_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}} + \cdots + B_n^{(n-1)}s^2 + B_n^{(n)} \quad \text{から、}$$

$$s^{2n} = \frac{1}{(2n-1)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + B_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}} + \cdots + B_n^{(n-1)}s^2 + B_n^{(n)}\Big]. \quad (24)$$

之を $\dfrac{d^2s^n}{du^2} = n(n-1)s^{n-2} - n^2(1+k^2)s^n + n(n+1)k^2s^{n+2}$ から得られる

$\dfrac{d^2s^{2n}}{du^2} = 2n(2n-1)s^{2n-2} - (2n)^2(1+k^2)s^{2n} + 2n(2n+1)k^2s^{2n+2}$ に代入すると、

$$\frac{d^2s^{2n}}{du^2} = 2n(2n-1)\cdot\frac{1}{(2n-3)!k^{2n-4}}\Big[\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}} + B_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}} + \cdots + B_{n-1}^{(n-2)}s^2 + B_{n-1}^{(n-1)}\Big]$$

$$-(2n)^2(1+k^2)\cdot\frac{1}{(2n-1)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + B_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}} + \cdots + B_n^{(n-1)}s^2 + B_n^{(n)}\Big]$$

$$+2n(2n+1)k^2\cdot\frac{1}{(2n+1)!k^{2n}}\Big[\frac{d^{2n}s^2}{du^{2n}} + B_{n+1}^{(1)}\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + \cdots + B_{n+1}^{(n)}s^2 + B_{n+1}^{(n+1)}\Big]. \quad \text{之に、}$$

(24)から得られる $\dfrac{d^2s^{2n}}{du^2} = \dfrac{1}{(2n-1)!k^{2n-2}}\Big[\dfrac{d^{2n}s^2}{du^{2n}} + B_n^{(1)}\dfrac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + \cdots + B_n^{(n-1)}\dfrac{d^2s^2}{du^2}\Big]$

を代入すると、 $\dfrac{1}{(2n-1)!k^{2n-2}}\Big[\dfrac{d^{2n}s^2}{du^{2n}} + B_n^{(1)}\dfrac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + \cdots + B_n^{(n-1)}\dfrac{d^2s^2}{du^2}\Big]$

$$= 2n(2n-1)\cdot\frac{1}{(2n-3)!k^{2n-4}}\Big[\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}} + B_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}} + \cdots + B_{n-1}^{(n-2)}s^2 + B_{n-1}^{(n-1)}\Big]$$

$$-(2n)^2(1+k^2)\cdot\frac{1}{(2n-1)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + B_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}} + \cdots + B_n^{(n-1)}s^2 + B_n^{(n)}\Big]$$

$$+2n(2n+1)k^2\cdot\frac{1}{(2n+1)!k^{2n}}\Big[\frac{d^{2n}s^2}{du^{2n}} + B_{n+1}^{(1)}\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + \cdots + B_{n+1}^{(n)}s^2 + B_{n+1}^{(n+1)}\Big].$$

$$\therefore \frac{1}{(2n-1)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n}s^2}{du^{2n}} + B_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + \cdots + B_n^{(n-1)}\frac{d^2s^2}{du^2}\Big]$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{(2n-3)!k^{2n-4}}\Big[\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}} + B_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}} + \cdots + B_{n-1}^{(n-2)}s^2 + B_{n-1}^{(n-1)}\Big]$$

$$-\frac{(2n)^2(1+k^2)}{(2n-1)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + B_n^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}} + \cdots + B_n^{(n-1)}s^2 + B_n^{(n)}\Big]$$

$$+\frac{1}{(2n-1)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n}s^2}{du^{2n}} + B_{n+1}^{(1)}\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}} + \cdots + B_{n+1}^{(n)}s^2 + B_{n+1}^{(n+1)}\Big].$$

此の式で、n を $n-1$ にすると、

$$\frac{1}{(2n-3)!k^{2n-4}}\Big[\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}}+B_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+\cdots+B_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^2s^2}{du^2}\Big]$$

$$=\frac{2(n-1)(2n-3)}{(2n-5)!k^{2n-6}}\Big[\frac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}}+B_{n-2}^{(1)}\frac{d^{2n-8}s^2}{du^{2n-8}}+\cdots+B_{n-2}^{(n-3)}s^2+B_{n-2}^{(n-2)}\Big]$$

$$-\frac{(2n-2)^2(1+k^2)}{(2n-3)!k^{2n-4}}\Big[\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+B_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}}+\cdots+B_{n-1}^{(n-2)}s^2+B_{n-1}^{(n-1)}\Big]$$

$$+\frac{1}{(2n-3)!k^{2n-4}}\Big[\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}}+B_{n}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+\cdots+B_{n}^{(n-1)}s^2+B_{n}^{(n)}\Big].$$

両辺を $(2n-3)!k^{2n-4}$ 倍すると、

$$\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}}+B_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+\cdots+B_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^2s^2}{du^2}=$$

$$2(n-1)(2n-3)^2(2n-4)k^2\Big[\frac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}}+B_{n-2}^{(1)}\frac{d^{2n-8}s^2}{du^{2n-8}}+\cdots+B_{n-2}^{(n-3)}s^2+B_{n-2}^{(n-2)}\Big]$$

$$-(2n-2)^2(1+k^2)\Big[\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+B_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}}+\cdots+B_{n-1}^{(n-2)}s^2+B_{n-1}^{(n-1)}\Big]$$

$$+\frac{d^{2n-2}s^2}{du^{2n-2}}+B_{n}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+\cdots+B_{n}^{(n-1)}s^2+B_{n}^{(n)}.$$

$$\therefore B_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+\cdots+B_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^2s^2}{du^2}=$$

$$2(n-1)(2n-3)^2(2n-4)k^2\Big[\frac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}}+B_{n-2}^{(1)}\frac{d^{2n-8}s^2}{du^{2n-8}}+\cdots+B_{n-2}^{(n-3)}s^2+B_{n-2}^{(n-2)}\Big]$$

$$-(2n-2)^2(1+k^2)\Big[\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+B_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}}+\cdots+B_{n-1}^{(n-2)}s^2+B_{n-1}^{(n-1)}\Big]$$

$$+B_{n}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+\cdots+B_{n}^{(n-1)}s^2+B_{n}^{(n)}.$$

此の式から、

$B_n^{(1)}-(2n-2)^2(1+k^2)=B_{n-1}^{(1)},$
$B_n^{(2)}-(2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(1)}+2(n-1)(2n-3)^2(2n-4)k^2=B_{n-1}^{(2)},$
$B_n^{(3)}-(2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(2)}+2(n-1)(2n-3)^2(2n-4)k^2B_{n-2}^{(1)}=B_{n-1}^{(3)},$
$\vdots$
$B_n^{(n-2)}-(2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(n-3)}+2(n-1)(2n-3)^2(2n-4)k^2B_{n-2}^{(n-4)}=B_{n-1}^{(n-2)},$
$B_n^{(n-1)}-(2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(n-2)}+2(n-1)(2n-3)^2(2n-4)k^2B_{n-2}^{(n-3)}=0,$
$B_n^{(n)}-(2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(n-1)}+2(n-1)(2n-3)^2(2n-4)k^2B_{n-2}^{(n-2)}=0$

が成り立ちます。

$\Big[\because 1, \quad s^2, \quad \dfrac{d^2s^2}{du^2}, \quad \cdots, \quad \dfrac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}$ は$\mathbb{C}$上一次独立であるからです。もし、一次従属であるならば、 $\dfrac{d^{2n-4}s^2}{du^{2n-4}}+c_{n-3}\dfrac{d^{2n-6}s^2}{du^{2n-6}}+\cdots+c_1\dfrac{d^2s^2}{du^2}+c_0s^2+c_{-1}=0$ という関係式が成り立ちますが、

$$\frac{d^{2m}s^2}{du^{2m}}$$

はすべて、s^2の多項式で書けますから、もし、上のような関係式が成立ったとすれば、上の関係式はs^2の代数方程式に書き直せて、s^2はその方程式の根という定数になってしまいますから、矛盾です。$\Big]$

故に、

$$B_n^{(m)}-(2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(m-1)}+2(n-1)(2n-3)^2(2n-4)k^2B_{n-2}^{(m-2)}=B_{n-1}^{(m)} \quad (25)$$

が成り立ちます。但し、$1 \leq m \leq n-2,\ B_{n-2}^{(0)}=1,\ B_{n-1}^{(0)}=1,\ B_{n-2}^{(-1)}=0$ です。

Jacobi は、以上の様に証明したのでしょう。しかし、Jacobi の時代に、ベクトル空間の要素の間の一次独立性などという概念が浸透して居たのでしょうか !?

しかし、もし、浸透して居なかったとしても、Jacobi の様な一流の数学者には、使いこなせたのかも知れません！

私は、此の演繹的な証明を Jacobi 先生に直接教えて貰いたかったのですが、講演直後に、座長を遣って下さった佐藤文広先生に直接教えて頂きました。ここに明記して謝意を表したいと思います。

$m=n-1, n$のときには、漸化式(25)(18page)を修正する必要があります。すなわち、漸化式の右辺の$B_{n-1}^{(m)}$を0にしないとなりません。しかし、$m=n$のときは、$B_{n-1}^{(m)}$は$B_n^{(m)}$の規約に依り、自動的に0になりますから、修正しなければならない例外は$m=n-1$のときのみになります。$B_4^{(3)}$は、正しく、此の例外の場合だったわけです。Jacobi は勘違いしているというよりは、例外的なケースや漸化式の成立条件などについて、丁寧に説明してくれてはいない、ということの様です。それは、当時、このような論文を読むのは、ごく少数の一流の数学者だけで、このくらいに書いておけば、十分予備知識があり細部は自分で詰められるという人以外は相手にしていなかったからかも知れません。

4　漸化式を使ってみよう！

$\underline{\underline{B_1^{(-1)}, B_1^{(0)}, B_1^{(1)}}} \cdots\cdots\cdots B_1^{(-1)} = 0, B_1^{(0)} = 1, B_1^{(1)} = 0$ 確定！
$\underline{\underline{B_2^{(-1)}, B_2^{(0)}, B_2^{(1)}, B_2^{(2)}}} \cdots B_2^{(-1)} = 0, B_2^{(0)} = 1, B_2^{(1)} = 4(1+k^2), B_2^{(2)} = -2$ 確定！
$\underline{\underline{B_3^{(-1)}, B_3^{(0)}}}, B_3^{(1)}, B_3^{(2)}, B_3^{(3)} \cdots\cdots\cdots B_3^{(-1)} = 0, B_3^{(0)} = 1$ 確定！
$B_4^{(-1)}, B_4^{(0)}, B_4^{(1)}, B_4^{(2)}, B_4^{(3)}, B_4^{(4)}$

上の様に確定して居ます。

$B_n^{(m)} = (2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(m-1)} - (2n-3)^2(2n-2)(2n-4)k^2 B_{n-2}^{(m-2)}$ を漸化式と考えれば、先ず、
$\underline{\underline{B_3^{(3)} = 4^2(1+k^2)B_2^{(2)} - 3^2 \cdot 4 \cdot 2k^2 B_1^{(1)} = -32(1+k^2)}}$　と求まります。次に、
$\underline{\underline{B_3^{(2)} = 4^2(1+k^2)B_2^{(1)} - 3^2 \cdot 4 \cdot 2k^2 B_1^{(0)} = 64(1+k^2)^2 - 72k^2 = 8(8+7k^2+8k^4)}}$
と求まります。それでは $B_3^{(1)}$ はどの様に求めれば良いのでしょうか？
この場合は漸化式
$B_n^{(m)} = B_{n-1}^{(m)} + (2n-2)^2(1+k^2)B_{n-1}^{(m-1)} - (2n-3)^2(2n-2)(2n-4)k^2 B_{n-2}^{(m-2)}$
を使うわけですね。
$\underline{\underline{B_3^{(1)} =}} B_2^{(1)} + 4^2(1+k^2)B_2^{(0)} - 3^2 \cdot 4 \cdot 2k^2 B_1^{(-1)} = B_2^{(1)} + 4^2(1+k^2)$
$= 4(1+k^2) + 4^2(1+k^2) \underline{\underline{= 20(1+k^2)}}$ と求まります。
$B_4^{(3)}$,　$B_4^{(4)}$ は漸化式 $B_4^{(m)} = 6^2(1+k^2)B_3^{(m-1)} - 5^2 \cdot 6 \cdot 4k^2 B_2^{(m-2)}$ に依り、
$\underline{\underline{B_4^{(3)} =}} 6^2(1+k^2)B_3^{(2)} - 5^2 \cdot 6 \cdot 4k^2 B_2^{(1)} = 288(1+k^2)(8+7k^2+8k^4) -$
$2400k^2(1+k^2) = 32(1+k^2)[9(8+7k^2+8k^4) - 75k^2]$
$= 32(1+k^2)[72 - 12k^2 + 72k^4] = (1+k^2)[2304 - 384k^2 + 2304k^4] = 2304 -$
$384k^2 + 2304k^4 + 2304k^2 - 384k^4 + 2304k^6 = 2304 + 1920k^2 + 1920k^4 + 2304k^6$
$\underline{\underline{= 128(18 + 15k^2 + 15k^4 + 18k^6)}},$
$\underline{\underline{B_4^{(4)} =}} 6^2(1+k^2)B_3^{(3)} - 5^2 \cdot 6 \cdot 4k^2 B_2^{(2)} = 1200k^2 - 1152(1+k^2)^2 = -1152 +$
$[1200 - 2304]k^2 - 1152k^4 \underline{\underline{= -48[24 + 23k^2 + 24k^4]}}$　と求まります。
$B_4^{(1)}$,　$B_4^{(2)}$ は漸化式 $B_4^{(m)} = B_3^{(m)} + 6^2(1+k^2)B_3^{(m-1)} - 5^2 \cdot 6 \cdot 4k^2 B_2^{(m-2)}$ に依り、
$\underline{\underline{B_4^{(1)} =}} B_3^{(1)} + 6^2(1+k^2)B_3^{(0)} - 5^2 \cdot 6 \cdot 4k^2 B_2^{(-1)} = 20(1+k^2) + 6^2(1+k^2) \underline{\underline{= 56(1+k^2)}},$
$\underline{\underline{B_4^{(2)} =}} B_3^{(2)} + 6^2(1+k^2)B_3^{(1)} - 5^2 \cdot 6 \cdot 4k^2 B_2^{(0)} = 8(8+7k^2+8k^4) +$
$6^2(1+k^2) \cdot 20(1+k^2) - 5^2 \cdot 6 \cdot 4k^2 = 8[8 + 7k^2 + 8k^4 + 90(1+2k^2+k^4) - 75k^2]$
$= 8[98 + 112k^2 + 98k^4] \underline{\underline{= 112(7 + 8k^2 + 7k^4)}}$　と求まります。

(2)(3page)$\frac{d^2s^n}{du^2} = n(n-1)s^{n-2} - n^2(1+k^2)s^n + n(n+1)k^2s^{n+2}$ で、次々と $n = 1, 3, 5, 7, \cdots$ と置くと、以下の等式の系列が形成されます：

$$I.$$

$$\frac{d^2s}{du^2} = -(1+k^2)s + 2k^2s^3 \cdots\cdots \quad (26)$$

$$\frac{d^2s^3}{du^2} = 6s - 9(1+k^2)s^3 + 12k^2s^5 \cdots\cdots \quad (27)$$

$$\frac{d^2s^5}{du^2} = 20s^3 - 25(1+k^2)s^5 + 30k^2s^7 \cdots\cdots \quad (28)$$

$$\frac{d^2s^7}{du^2} = 42s^5 - 49(1+k^2)s^7 + 56k^2s^9 \cdots\cdots \quad (29)$$

$$\vdots$$

等式 $I.$ から、次々と下記の系列が見つかります：

$$I.a.$$

$$2!k^2s^3 = \frac{d^2s}{du^2} + A_1^{(1)}s \cdots\cdots \quad (30)$$

$$4!k^4s^5 = \frac{d^4s}{du^4} + A_2^{(1)}\frac{d^2s}{du^2} + A_2^{(2)}s \cdots\cdots \quad (31)$$

$$6!k^6s^7 = \frac{d^6s}{du^6} + A_3^{(1)}\frac{d^4s}{du^4} + A_3^{(2)}\frac{d^2s}{du^2} + A_3^{(3)}s \cdots\cdots \quad (32)$$

$$8!k^8s^9 = \frac{d^8s}{du^8} + A_4^{(1)}\frac{d^6s}{du^6} + A_4^{(2)}\frac{d^4s}{du^4} + A_4^{(3)}\frac{d^2s}{du^2} + A_4^{(4)}s \cdots\cdots \quad (33)$$

$$\vdots$$

ここで、$\underline{A_1^{(1)} = (1+k^2), \quad A_2^{(2)} = 3(3+2k^2+3k^4), A_2^{(1)} = 10(1+k^2),}$
$\underline{A_3^{(3)} = 45(5+3k^2+3k^4+5k^6), A_3^{(2)} = 7(37+38k^2+37k^4), A_3^{(1)} = 35(1+k^2),}$
$\underline{A_4^{(4)} = 315(35+20k^2+18k^4+20k^6+35k^8),}$
$\underline{A_4^{(3)} = 4(3229+3315k^2+3315k^4+3229k^6),}$
$\underline{A_4^{(2)} = 42(47+58k^2+47k^4), A_4^{(1)} = 84(1+k^2)}$
です。

$I.a.$ の諸式は、どうやら、成り立つ様です。そして、
一般に次の様に置ける事が分かります：

$$(2n)!k^{2n}s^{2n+1} = \frac{d^{2n}s}{du^{2n}} + A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}} + A_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}} + \cdots + A_n^{(n)}s$$

ここで、$A_n^{(m)}$はk^2のm次の多項式を表します。

『我々の出発点である一般式(2)(3page)

$$\frac{d^2s^n}{du^2}=n(n-1)s^{n-2}-n^2(1+k^2)s^n+n(n+1)k^2s^{n+2}$$

に依って

$$A_n^{(m)}=A_{n-1}^{(m)}+(2n-1)^2(1+k^2)A_{n-1}^{(m-1)}-(2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2A_{n-2}^{(m-2)}\cdots \quad (34)$$

となるのは自明です。ここで、$m>n$のときは、$A_n^{(m)}=0$と置かねばなりません。』

これは、矢張り、Fundamenta nova の第43節に Jacobi に依って書かれている事ですが、こちらの方は、どうやら、成り立つ様です。証明してみましょう：

$$(2n)!k^{2n}s^{2n+1}=\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+A_n^{(2)}\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+\cdots+A_n^{(n)}s \quad \text{から、}$$

$$s^{2n+1}=\frac{1}{(2n)!k^{2n}}\Big[\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_n^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}+A_n^{(n)}s\Big]. \quad (35)$$

之を $\dfrac{d^2s^n}{du^2}=n(n-1)s^{n-2}-n^2(1+k^2)s^n+n(n+1)k^2s^{n+2}$ から得られる

$\dfrac{d^2s^{2n+1}}{du^2}=2n(2n+1)s^{2n-1}-(2n+1)^2(1+k^2)s^{2n+1}+(2n+2)(2n+1)k^2s^{2n+3}$に代入すると

$$\frac{d^2s^{2n+1}}{du^2}=2n(2n+1)\cdot\frac{1}{(2n-2)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-1}^{(n-1)}s\Big]$$

$$-(2n+1)^2(1+k^2)\cdot\frac{1}{(2n)!k^{2n}}\Big[\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_n^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}+A_n^{(n)}s\Big]$$

$$+(2n+2)(2n+1)k^2\cdot\frac{1}{(2n+2)!k^{2n+2}}\Big[\frac{d^{2n+2}s}{du^{2n+2}}+A_{n+1}^{(1)}\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+\cdots+A_{n+1}^{(n)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n+1}^{(n+1)}s\Big].$$

之に、(35)から得られる

$$\frac{d^2s^{2n+1}}{du^2}=\frac{1}{(2n)!k^{2n}}\Big[\frac{d^{2n+2}s}{du^{2n+2}}+A_n^{(1)}\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+\cdots+A_n^{(n-1)}\frac{d^4s}{du^4}+A_n^{(n)}\frac{d^2s}{du^2}\Big]$$

を代入すると、

$$\frac{1}{(2n)!k^{2n}}\Big[\frac{d^{2n+2}s}{du^{2n+2}}+A_n^{(1)}\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+\cdots+A_n^{(n-1)}\frac{d^4s}{du^4}+A_n^{(n)}\frac{d^2s}{du^2}\Big]$$

$$=2n(2n+1)\cdot\frac{1}{(2n-2)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-1}^{(n-1)}s\Big]$$

$$-(2n+1)^2(1+k^2)\cdot\frac{1}{(2n)!k^{2n}}\Big[\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_n^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}+A_n^{(n)}s\Big]$$

$$+(2n+2)(2n+1)k^2\cdot\frac{1}{(2n+2)!k^{2n+2}}\Big[\frac{d^{2n+2}s}{du^{2n+2}}+A_{n+1}^{(1)}\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+\cdots+A_{n+1}^{(n)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n+1}^{(n+1)}s\Big].$$

此の式で、n を $n-1$ にすると、

$$\frac{1}{(2n-2)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^4s}{du^4}+A_{n-1}^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}\Big]$$

$$=(2n-2)(2n-1)\cdot\frac{1}{(2n-4)!k^{2n-4}}\Big[\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+A_{n-2}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s}{du^{2n-6}}+\cdots+A_{n-2}^{(n-3)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-2}^{(n-2)}s\Big]$$

$$-(2n-1)^2(1+k^2)\cdot\frac{1}{(2n-2)!k^{2n-2}}\Big[\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-1}^{(n-1)}s\Big]$$

$$+(2n)(2n-1)k^2\cdot\frac{1}{(2n)!k^{2n}}\Big[\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_n^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}+A_n^{(n)}s\Big].$$

両辺を $(2n-2)!k^{2n-2}$ 倍すると、

$$\Big[\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^4s}{du^4}+A_{n-1}^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}\Big]$$

$$=(2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2\Big[\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+A_{n-2}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s}{du^{2n-6}}+\cdots+A_{n-2}^{(n-3)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-2}^{(n-2)}s\Big]$$

$$-(2n-1)^2(1+k^2)\Big[\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-1}^{(n-1)}s\Big]$$

$$+\Big[\frac{d^{2n}s}{du^{2n}}+A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_n^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}+A_n^{(n)}s\Big].$$

$$\therefore A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^4s}{du^4}+A_{n-1}^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}$$

$$=(2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2\Big[\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+A_{n-2}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s}{du^{2n-6}}+\cdots+A_{n-2}^{(n-3)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-2}^{(n-2)}s\Big]$$

$$-(2n-1)^2(1+k^2)\Big[\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-1}^{(n-1)}s\Big]$$

$$+A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_n^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}+A_n^{(n)}s.$$

$$\therefore A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^4s}{du^4}+A_{n-1}^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}$$

$$=(2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2\Big[\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+A_{n-2}^{(1)}\frac{d^{2n-6}s}{du^{2n-6}}+\cdots+A_{n-2}^{(n-3)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-2}^{(n-2)}s\Big]$$

$$-(2n-1)^2(1+k^2)\Big[\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+A_{n-1}^{(1)}\frac{d^{2n-4}s}{du^{2n-4}}+\cdots+A_{n-1}^{(n-2)}\frac{d^2s}{du^2}+A_{n-1}^{(n-1)}s\Big]$$

$$+A_n^{(1)}\frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}+\cdots+A_n^{(n-1)}\frac{d^2s}{du^2}+A_n^{(n)}s.$$

此の式から、

$A_n^{(1)}-(2n-1)^2(1+k^2)=A_{n-1}^{(1)},$
$A_n^{(2)}-(2n-1)^2(1+k^2)A_{n-1}^{(1)}+(2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2=A_{n-1}^{(2)},$
$A_n^{(3)}-(2n-1)^2(1+k^2)A_{n-1}^{(2)}+(2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2A_{n-2}^{(1)}=A_{n-1}^{(3)},$
$\vdots$
$A_n^{(n-1)}-(2n-1)^2(1+k^2)A_{n-1}^{(n-2)}+(2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2A_{n-2}^{(n-3)}=A_{n-1}^{(n-1)},$
$A_n^{(n)}-(2n-1)^2(1+k^2)A_{n-1}^{(n-1)}+(2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2A_{n-2}^{(n-2)}=A_{n-1}^{(n)},$

が成り立ちます。

$$\Big[\because s,\quad \frac{d^2s}{du^2},\quad \cdots,\quad \frac{d^{2n-2}s}{du^{2n-2}}\quad \text{は}\mathbb{C}\text{上一次独立であるからです。}\Big]$$

故に、

$$A_n^{(m)}-(2n-1)^2(1+k^2)A_{n-1}^{(m-1)}+(2n-1)(2n-2)^2(2n-3)k^2A_{n-2}^{(m-2)}=A_{n-1}^{(m)}\quad(36)$$

が成り立ちます。但し、$1\leq m\leq n,\ A_{n-2}^{(0)}=1,\ A_{n-1}^{(0)}=1,\ A_{n-2}^{(-1)}=0$ です。依って、

$$(34)(21page)A_n^{(m)}=A_{n-1}^{(m)}+(2n-1)^2(1+k^2)A_{n-1}^{(m-1)}-(2n-2)^2(2n-1)(2n-3)k^2A_{n-2}^{(m-2)}$$

が証明されたわけです。この漸化式を使ってみましょう：

$\underline{\underline{A_0^{(-1)}, A_0^{(0)}}}$
$\underline{\underline{A_1^{(-1)}, A_1^{(0)}, A_1^{(1)}}}$
$\underline{\underline{A_2^{(-1)}, A_2^{(0)}}}, A_2^{(1)}, A_2^{(2)}$
$\underline{\underline{A_3^{(-1)}, A_3^{(0)}}}, A_3^{(1)}, A_3^{(2)}, A_3^{(3)}$
$A_4^{(-1)}, A_4^{(0)}, A_4^{(1)}, A_4^{(2)}, A_4^{(3)}, A_4^{(4)}$

上の二重下線部が、$A_0^{(-1)} = 0, A_0^{(0)} = 1, A_1^{(-1)} = 0, A_1^{(0)} = 1, A_1^{(1)} = 1 + k^2,$

$$A_2^{(-1)} = 0, A_2^{(0)} = 1, A_3^{(-1)} = 0, A_3^{(0)} = 1$$

の様に確定して居るとして、話を進めましょう。漸化式

$A_2^{(m)} = A_1^{(m)} + 3^2(1+k^2)A_1^{(m-1)} - 2^2(3)(1)k^2A_0^{(m-2)}$　と

$A_3^{(m)} = A_2^{(m)} + 5^2(1+k^2)A_2^{(m-1)} - 4^2(5)(3)k^2A_1^{(m-2)}$　と

$A_4^{(m)} = A_3^{(m)} + 7^2(1+k^2)A_3^{(m-1)} - 6^2(7)(5)k^2A_2^{(m-2)}$　を使います。

$\underline{\underline{A_2^{(1)} =}} A_1^{(1)} + 3^2(1+k^2)A_1^{(0)} - 2^2(3)(1)k^2A_0^{(-1)} = A_1^{(1)} + 9(1+k^2) \underline{\underline{= 10(1+k^2)}}.$

$\underline{\underline{A_2^{(2)} =}} A_1^{(2)} + 3^2(1+k^2)A_1^{(1)} - 2^2(3)(1)k^2A_0^{(0)} = 3^2(1+k^2)A_1^{(1)} - 2^2(3)(1)k^2$
$= 9(1+k^2)^2 - 12k^2 = 9 + 6k^2 + 9k^4 \underline{\underline{= 3(3 + 2k^2 + 3k^4)}}.$

$\underline{\underline{A_3^{(1)} =}} A_2^{(1)} + 5^2(1+k^2)A_2^{(0)} - 4^2(5)(3)k^2A_1^{(-1)} = A_2^{(1)} + 25(1+k^2) \underline{\underline{= 35(1+k^2)}}.$

$\underline{\underline{A_3^{(2)} =}} A_2^{(2)} + 5^2(1+k^2)A_2^{(1)} - 4^2(5)(3)k^2A_1^{(0)} = A_2^{(2)} + 5^2(1+k^2)A_2^{(1)} - 4^2(5)(3)k^2$
$= 3(3 + 2k^2 + 3k^4) + 25(1+k^2) \cdot 10(1+k^2) - 240k^2$
$= 9 + 6k^2 + 9k^4 + 250(1 + 2k^2 + k^4) - 240k^2$
$= 259 + 266k^2 + 259k^4 \underline{\underline{= 7(37 + 38k^2 + 37k^4)}}.$

$\underline{\underline{A_3^{(3)} =}} A_2^{(3)} + 5^2(1+k^2)A_2^{(2)} - 4^2(5)(3)k^2A_1^{(1)} = 5^2(1+k^2)A_2^{(2)} - 4^2(5)(3)k^2A_1^{(1)}$
$= 25(1+k^2) \cdot 3(3 + 2k^2 + 3k^4) - 240k^2(1+k^2)$
$= 75(3 + 2k^2 + 3k^4 + 3k^2 + 2k^4 + 3k^6) - 240k^2 - 240k^4$
$= 75(3 + 5k^2 + 5k^4 + 3k^6) - 240k^2 - 240k^4 = 225 + 135k^2 + 135k^4 + 225k^6$
$\underline{\underline{= 45(5 + 3k^2 + 3k^4 + 5k^6)}}.$

$$
\begin{aligned}
&\underline{\underline{A_4^{(1)}}} = A_3^{(1)} + 7^2(1+k^2)A_3^{(0)} - 6^2(7)(5)k^2A_2^{(-1)} = A_3^{(1)} + 7^2(1+k^2) \\
&= 35(1+k^2) + 49(1+k^2) \underline{\underline{= 84(1+k^2)}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underline{\underline{A_4^{(2)}}} = A_3^{(2)} + 7^2(1+k^2)A_3^{(1)} - 6^2(7)(5)k^2A_2^{(0)} = A_3^{(2)} + 7^2(1+k^2)A_3^{(1)} - 6^2(7)(5)k^2 \\
&= 7(37+38k^2+37k^4) + 7^2(1+k^2)\cdot 35(1+k^2) - 7\cdot 180k^2 \\
&= 7[37+38k^2+37k^4+245(1+2k^2+k^4) - 180k^2] \\
&= 7[282+348k^2+282k^4] \underline{\underline{= 42[47+58k^2+47k^4]}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underline{\underline{A_4^{(3)}}} = A_3^{(3)} + 7^2(1+k^2)A_3^{(2)} - 6^2(7)(5)k^2A_2^{(1)} = 45(5+3k^2+3k^4+5k^6) \\
&+7^2(1+k^2)\cdot 7(37+38k^2+37k^4) - 1260k^2\cdot 10(1+k^2) = 45(5+3k^2+3k^4+5k^6) \\
&+7^3(37+38k^2+37k^4+37k^2+38k^4+37k^6) - 12600k^2 - 12600k^4 \\
&= 45(5+3k^2+3k^4+5k^6) + 7^3(37+75k^2+75k^4+37k^6) - 12600k^2 - 12600k^4 \\
&= 225 + 12691 + [135 + 25725 - 12600]k^2 + 13260k^4 + 12916k^6 \\
&= 121916 + 13260k^2 + 13260k^4 + 12916k^6 \\
&\underline{\underline{= 4[3229 + 3315k^2 + 3315k^4 + 3229k^6]}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underline{\underline{A_4^{(4)}}} = A_3^{(4)} + 7^2(1+k^2)A_3^{(3)} - 6^2(7)(5)k^2A_2^{(2)} = 7^2(1+k^2)A_3^{(3)} - 6^2(7)(5)k^2A_2^{(2)} \\
&= 7^2(1+k^2)\cdot 45(5+3k^2+3k^4+5k^6) - 6^2(7)(5)k^2\cdot 3(3+2k^2+3k^4) \\
&= 7\cdot 5\cdot 9[7(5+3k^2+3k^4+5k^6+5k^2+3k^4+3k^6+5k^8) - 12(3k^2+2k^4+3k^6)] \\
&= 315[7(5+8k^2+6k^4+8k^6+5k^8) - 36k^2 - 24k^4 - 36k^6] \\
&\underline{\underline{= 315[35+20k^2+18k^4+20k^6+35k^8]}}.
\end{aligned}
$$

最後に、私が Jacobi のことを、どう思っているかを宣言して、本稿を終えたいと思います。

私は、代数学に革命を齎した革命児 Galois も、Abel 函数論に繋がる Abel 積分論の Abel も、孤独に、初期の最も素朴な Jacobi の逆問題を研究した Göpel も、矢張り孤独に、高等学校教師として、Abel 函数論を研究した Weierstrass も、Gauss に認められたが夭折した Eisenstein も、大好きですが、theta 函数論の創始者であり、Jacobi の逆問題を数学界に提出し、更には、「Fourier 氏の如きは、『数学は人間の精神の名誉の為に行うべきです』と発言すべきです」と諭した、火の玉の様な Jacobi も大好きです！

完了