佐藤幹夫と数理物理学

神保　道夫

目次

1　はじめに

佐藤幹夫先生は, 若い頃から数学のみならず理論物理学にも強い興味を持っておられた. そのことは次の経歴からもうかがうことができる.

- 1950–1952 東京大学理学部数学科
- 1952–1954 東京大学理学部物理学科
- 1954–1958 東京文理科大学大学院　朝永研究室

京都大学退官時の講演 [O] の中で朝永研究室時代に触れて次のように述べられている.

> 「一番興味を持ったことというと場の理論の方で, いわゆる Lehman-Symanzik-Zimmermann なんていうのが 50 年代の初め頃でしたか後の方でしたか, 私がいたのが 54 年から 58 年まで朝永先生の研究室におりましたのですが, そのころに南部先生のものとか, それから統計力学の伏見康治先生なんかが「量子統計力学」なんていう本をお書きになって, そんなのもそのころだったと思うのですが, Ising model のことは抽象代数を使って解けるというようなことが書いてあって, 面白いと思ったのもそのころです. 」

しかしこの時期は学問に集中できる環境が整っていたわけではなかった. 旧制高校卒業後 1948 年から 1958 年の 10 年間にわたって, 佐藤先生は家計を支えるため都立高校の先生をされていたのである. なかなか時間がとれないなか, 岩波の数学辞典や雑誌「数学」などを頼りに独学を続けられていたという. Andronikov 氏のインタビュー [A] の中に当時を回顧して次のような発言がある：

> 「私は, この 10 年間に自分が理論物理学や数学のさまざまな分野に関するすばらしいアイディアを得たと思っています. 10 年間, 私は蜘蛛が巣を張るようにいろいろな分野に網を拡げました. あるものはひっかかり, あるものは通り抜ける. ある部分を考えている間, 他の部分は後回しになりますが, 捨ててはいません. 」

ここで私たちの興味を惹くのは, 「さまざまな分野に関するすばらしいアイディア」とは何だったのか, ということだろう. 数学に関する部分, すくなくともその一部分について, 1960 年 6 月の東大大談話会において D 加群と代数解析学に関する構想を発表されたことはよく知られている. 他方, 理論物理学に関してまとまった構想を話されたことはなく, それがどのような内容で

あったかは折々の発言から想像するしかない.

佐藤先生が物理学に関する仕事を本格的に始められたのは, いわゆる SKK 論文 [SKK] にまとめられた超局所解析学の大きな仕事が一段落した 1973 年以降である. 本稿ではこの時期から 1970 年代末までの研究活動を振り返り, 佐藤先生の関心のありかを辿ってみる. それ以後のソリトン理論, および完全 WKB 解析も, 広い意味で数理物理学の研究ではあるが, 手を広げすぎて話が散漫になるおそれがあるので, 今回はそれらには立ち入らない.

2　解析的 S 行列と Infinite System (1973-1975)

佐藤先生の関心が物理学へ向かう直接のきっかけとなったのは, 1972 年から 1973 年にかけて河合隆裕さん, 柏原正樹さんとともに Nice 大学に滞在したことである. ここで F. Pham, D. Iagolnitzer, J. Bros ら数理物理学者と交流し, なかでも Pham から超局所解析学と解析的 S 行列理論との関係を指摘されることになった. 再び [O] から引用する：

> 「Pham の影響をわれわれはすいぶん受けている, 恩恵と影響を受けているんですが, その時に, 要するに microlocal analysis と場の理論を p 表示したものとは非常に関係があるというようなことを盛んに吹き込まれまして, その影響で, 場の理論には元々色気があったわけですから, さっそくそれに飛びついたわけです. それで, Olive とか, そういう人たちとそのころ知り合いになりまして, 河合さんが一番そのころ影響をもろに受けて, Stapp なんかとずっと長いことそっちの方をやっておられて. 」

以下その内容を簡単に見ていくことにしよう.

2.1　解析的 S 行列理論とは

解析的 S 行列は, 素粒子論において 1960 年代の一時期に研究された主題である. 簡単のため正の質量 m をもつ中性スカラー粒子を考える.

$$M = \{p = (\mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \mathsf{p}_3) \in \mathbb{R}^4 \mid p^2 = m^2\}, \qquad p^2 = (\mathsf{p}_0)^2 - (\mathsf{p}_1)^2 - (\mathsf{p}_2)^2 - (\mathsf{p}_3)^2$$

を質量殻 (mass shell) という．素粒子の散乱を記述する S 行列は $M^n = M \times \cdots \times M$ 上の超関数で次の形をしたものである．[*1]

$$S_n(p_1, \ldots, p_n) = \delta\bigl(\sum_{i=1}^{n} p_i\bigr) A_n(p_1, \ldots, p_n)$$

ここで A_n は（一般には特異性を持つ）解析関数．重要なのは $|A_n|^2$ が直接観測にかかる量だということである．解析的 S 行列理論は, 特定の場の理論を仮定しないで, 一般的な要請

(i) ローレンツ不変性

(ii) 巨視的因果律 (と, 後述のミクロ解析性)

(iii) ユニタリ性 (確率保存)

だけから S 行列がどれだけ決まるかを問題とする．

2.2 ミクロ解析性

時空間における巨視的因果律は運動量空間における S 行列の解析的性質に言い換えることができる．

(ii) 巨視的因果律 $\Longleftrightarrow$ (ii') ミクロ解析性　(Iagolnitzer-Stapp 1971 [IS])

ここでいうミクロ解析性とは, 現代の言葉でいうところの超関数の特異スペクトルに関する言明である．超局所解析とは独立に, 物理学者は超関数の特異スペクトルに相当する概念を発見していた．

詳しく述べれば, S 行列の特異スペクトル $S.S.\,(S_n)$ は M^n の余接束 $T^*(M^n)$ の中のランダウ-中西特異点集合と呼ばれる部分集合 $\mathscr{L}_M^+(G)$ の合併に含まれる: [*2]

$$S.S.\,(S_n) \subset \bigcup_{G} \mathscr{L}_M^+(G) \quad \subset T^*(M^n)$$

ここで合併はあらゆるファインマン図形 G にわたる．

簡単のため M^n の余接束 $T^*(M^n)$ を $T^*\mathbb{R}^{4n}$ で置き換えたバージョンについてランダウ-中西特異点集合を例示する．

[*1] より正確には入射粒子の組 p_I と射出粒子の組 p_J を区別して $S_{I,J}(p_I, p_J)$ を考えるのであるが, ここでは記述を簡単にするため $(-p_I, p_J)$ をまとめて $(p_1, \ldots, p_n)$ と表している．

[*2] 物理学者は底空間への射影像 $\pi\bigl(\mathscr{L}_M^+(G)\bigr) \subset M^n$, $\pi : T^*(M^n) \to M^n$, を考えていた．補助のパラメータ u_i が余接束成分と解釈され $\mathscr{L}_M^+(G)$ がラグランジアン多様体であることなど, あたかも超局所解析にあつらえたかのような設定になっている．

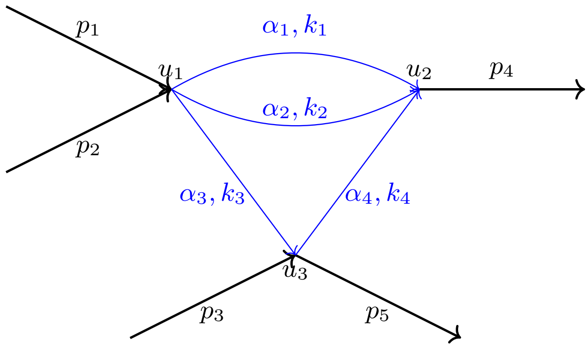

図 1　ファインマン図形 G, $n = 5$

上のファインマン図の例では, ランダウ-中西特異点集合 ($T^*\mathbb{R}^{4n}$ のバージョン) とその複素化はつぎのように定義される.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^+(G) = \{(p,u) \in T^*\mathbb{R}^{4n} \mid & \exists k_l \in \mathbb{R}^4\,,\ \exists \alpha_l \geq 0 \\
& p_1 + p_2 = k_1 + k_2 + k_3\,,\ k_3 + p_3 = k_4 + p_5\,,\ k_1 + k_2 + k_4 = p_4 \\
& u_2 - u_1 = \alpha_1 k_1 = \alpha_2 k_2\,,\ u_3 - u_1 = \alpha_3 k_3\,,\ u_2 - u_3 = \alpha_4 k_4 \\
& \alpha_l (k_l^2 - m^2) = 0 \quad l = 1,2,3\}\,, \\
\mathscr{L}^{\mathbb{C}}(G) = \{(p,u) \in T^*\mathbb{C}^{4n} \mid & \exists k_l \in \mathbb{C}^4\,,\ \exists \alpha_l \in \mathbb{C}\,, \cdots\}
\end{aligned}
$$

2.3　場の理論と S 行列の関係

場の理論から出発する場合は, $\phi(x)$ を中性スカラー場として時間順序グリーン関数（タウ関数) を考える. 作用素 A の真空期待値を $\langle A \rangle = \langle \mathrm{vac}|A|\mathrm{vac}\rangle$ と書くとタウ関数は

$$
\begin{aligned}
\tau_n(x_1, \ldots, x_n) &= \langle T\big\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\big\}\rangle \\
&= \langle \phi(x'_1)\cdots\phi(x'_n)\rangle \quad ((x'_1)^0 \geq \cdots \geq (x'_n)^0)
\end{aligned}
$$

である. ここで $x'_1, \ldots, x'_n$ は $x_1, \ldots, x_n$ を時間成分 $(x_i)^0$ の大きさの順に従って並べ直したものをあらわす. 関数 τ_n のフーリエ変換を $\tilde{\tau}_n(p_1, \ldots, p_n)$ とすると, 後者は各 p_i の関数として質量殻上に極を持つ. その極を払って質量殻に制限したものが S 行列を与える (LSZ reduction formula)：

$$
S_n(p_1, \cdots, p_n) = \prod_{i=1}^{n} (q_i^2 - m^2) \cdot \tilde{\tau}_n(q_1, \cdots, q_n)\Big|_{q_i \to p_i}, \quad p_1, \ldots, p_n \in M\,.
$$

タウ関数を今後は相関関数ともいう.

2.4 Infinite System

佐藤先生は S 行列のミクロ解析性をさらに強めて, $\{\tilde{\tau}_n\}_{n=0}^{\infty}$ が満たす線形微分方程式の存在を予想し, 以下の性質 (i)-(iii) を満たす関数系を Infinite System と呼んだ.

Sato's postulate 1975 [S]

(i) $S.S.(\tilde{\tau}_n) \subset \bigcup_G \mathscr{L}^+(G) \quad (\subset T^*\mathbb{R}^{4n})$

(ii) $\tilde{\tau}_n$ は例外的な点を除き複素化 $\bigcup_G \mathscr{L}^{\mathbb{C}}(G)$ を特性多様体とするホロノミー系 (一般の点では単純ホロノミー系) を満たす.

(iii) $\{\tilde{\tau}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は一般化されたユニタリ性（無限連立の積分方程式) を満たす.

一般には複素化した族 $\mathscr{L}^{\mathbb{C}}(G)$ が局所有限でなくなるような点が存在し, そのような点はホロノミー系の特性多様体にはなり得ないので (ii) で除外されている. S 行列について言えば, 高々２重線を持つような G について $\mathscr{L}_M^{\mathbb{C}}(G)$ の一般点でホロノミック (Kawai-Stapp 1977 [KS]) であるが, ３重線が現れるとホロノミックでなくなることが知られている. Sato's postulate の現状に関しては [HK] をご参照ください.

当時はまた, 単純ホロノミー系の理論が, 概均質ベクトル空間の b 関数や相対不変式のフーリエ変換の計算に非常に有効であることがわかって進展していた時期でもある.

> 「僕はどっちかと言うと特殊関数みたいなのが好きで, holonomic なものが好きと言うか, なるべくきっちり最後まで僕の方法をやりたかったんで」[O]

と述べられているように, ホロノミー系で S 行列やタウ関数を統制するという提案は佐藤先生の理念に沿ったものといえる.

3 モデルの探索 (1974-1976)

3.1 トイモデル

上に述べた postulate のうち (iii) だけは他と比べて異質である. これは「1 点関数, 2 点関数の個々が閉じているんじゃなくて, N 点関数全体で初めて閉じた関係が成り立こと」[O] を述べ

ている．佐藤先生の考えでは, 問題の本質はこの「無限自由度」にあった.

状況について自分なりのイメージをつくるため, きっちり最後まで計算できるような Infinite System のモデルを作りたいと考えいろいろと実験を重ねておられた．手始めに取り上げたのは 1 次元時空のトイモデル（1 次元イジングモデル, 流体のモデル, 1975) で, $\tilde{\tau}_n$ を具体的に計算し, ホロノミー図式によってそれらを特徴づけるという計算をされていた [SKM]．しかし 1 次元時空とはつまり時間しかないので, これらはあくまで量子力学のモデルであって, 場の理論とは言い難い.

3.2　2 次元イジング場の理論 (1976)

もう少し非自明な例として次に取り上げられたのが, 佐藤先生が朝永研究室以来親しんでいた 2 次元イジングモデルである．これは古典統計力学のモデルで, 2 次元格子の各点 $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$ に ± 1 の値をとるスピン変数 $\sigma_{i,j}$ が配置され, 隣合うスピン変数と相互作用をするという単純なものである．モデルの分配関数は Onsager により厳密解が得られている．当時佐藤先生のオフィスに行くと伏見先生の本とか, ランダウ・リフシッツの統計力学の巻（組み合わせ的な解法の解説がある）などが広げられていて, そういう文献もひとつひとつ当たっておられた様子だった. イジングモデルでもう一つ重要なのは, うまくフェルミオンを導入するとその時間発展が線形になる（つまり自由フェルミオンが得られる）という事実で, 現在これはモデルの標準的な解法になっている.

格子モデルの臨界温度 $T=T_c$ の近傍でスケールしながら連続極限をとることによって[*3]場の理論のモデルが得られる．このときスピン変数 $\sigma_{i,j}$ の高温側 $T>T_c$ および低温側 $T<T_c$ からの極限として 2 つの非自明な場が得られる．これらをスピン場 $\sigma(x)$, disorder 場 $\mu(x)$ とよぶ. この計算には三輪哲二さんと筆者も加えていただいた．Bariev という人の論文を参考にしつつ行った内容はつぎのようなものである [SHQF1].

- $\sigma(x)$, $\mu(x)$ について, : $\exp\bigl($ フェルミオンの 2 次式 $\bigr)$: の形の明示式を得た.
- 漸近場と S 行列を定義通りに計算した．2 体の場合は $S_2=-1$, S_n は S_2 の積に分解し, いずれも運動量変数によらない定数になる.
- $\sigma(x)$, $\mu(x)$ の相関関数 (タウ関数) の無限級数表示を導出した.

[*3] 場の理論としてはさらに相関関数を Euclid 時空から Minkowski 時空に解析接続するのであるが, 以下この 2 つはあまり区別せずに扱う

- タウ関数の Fourier 変換をとり一般化ユニタリ性の検証, ランダウ-中西特異点における order の計算を行った.

4　ホロノミック量子場 (1977–1979)

このような計算をしていた頃, Wu-McCoy-Tracy-Barouch による画期的な論文 [WMTB] が出版されている. イジングモデルの 2 点相関関数 τ_2 はスケール極限で 2 点間の距離だけの関数になる. 彼らはそれが III 型パンルヴェ方程式の解で明示的に書けることを発見した.

Wu らの結果を知った経緯を佐藤先生はこう述べられている：

> 「あの頃毎年のように東大へ行って集中講義をしておりましたから, $(\cdots)$ ときどき物理教室へ顔出しして, たまたま鈴木 [増雄] さんの部屋へよって, この頃こんなことをやっているというと, ついでに Bariev という人の論文が面白そうだという話をしたら, そんならこういうものがあると言って, Wu-McCoy-Tracy-Barouch というのを教えてもらった. それは長い論文で, 僕は長い論文なんか見るのは全然だめで, 読んでも全然頭に入らないのですけれども, めくっていたら Panilevé 関数がでてくるんですね. それで後ろの方に積分方程式がでてくる. あっ, これはなにかあるとそのとき思いまして, それで帰って, 二人のセミナーでそれをやったわけです. 」[O]

最後のところは少し記憶違いをされているようで, 実際にパンルヴェ関数のことに取り組んだのは, Wu et al. を知ってから半年以上経過した 1977 年 1 月になってからである. 始めてから 2 ヶ月ほどで「あるクラス（クリフォード群）の場の理論とモノドロミー保存変形との対応」に行き着き, その後数年にわたるホロノミック量子場 (Holonomic Quantum Fields, 以下 HQF) という一連の仕事につながった. モノドロミーは p 空間では見えにくいので, 結果的にはもとのユークリッド時空で考えることが重要だったことになる.

HQF の関係論文は佐藤先生の全集 [Co] に収録されている.　以下その主な内容を見ていこう.

4.1　イジングモデルとモノドロミー保存変形 (1977)

イジング場の理論ではスピン場 $\sigma(z)$, disorder 場 $\mu(z)$, およびフェルミオン $\psi(z) = (\psi_+(z), \psi_-(z))$ が主役となる.

ユークリッド時空（虚時間) で考え, 2 点 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ を固定して期待値

$$w^{(1)}(z) = \langle \psi(z)\sigma(a_1)\mu(a_2) \rangle, \quad w^{(2)}(z) = \langle \psi(z)\mu(a_1)\sigma(a_2) \rangle,$$

を z の関数と見る．このとき $\psi(z)$ と $\sigma(a)$, $\mu(a)$ との交換関係から $w^{(i)}(z)$ について次の性質が導かれる ($\partial = \partial/\partial z$, $\bar\partial = \partial/\partial \bar z$)：

(1) ユークリッド・ディラック方程式 $\begin{pmatrix} m & -\partial \\ -\bar\partial & m \end{pmatrix} w^{(i)} = 0,$

(2) $z = a_i$ の周りで解析接続すると符号が変わる（モノドロミーが -1),

(3) $w^{(i)}(z) = O(|z - a_i|^{-1/2})$ $(z \to a_i)$, $\quad w^{(i)}(z) = O(1)$ $(z \to \infty)$

このような性質を持つ関数の空間は 2 次元となる．特に性質 (2) により a_1, a_2 を動かすとき $w^{(i)}$ の満たすホロノミック系（モノドロミー保存変形の方程式）が導かれ, その帰結として 2 点相関関数

$$\langle \sigma(a_1)\sigma(a_2) \rangle, \quad \langle \mu(a_1)\mu(a_2) \rangle,$$

が III 型のパンルヴェ方程式の解で表示される．これが Wu et al. の結果を再現する．さらに以上は容易に n 点の場合に拡張できる．

「場の量子論のあるクリティカルな場合を考えると, 無限自由度の開いたシステムが微分方程式という, きつく閉じたシステムで完全にコントロールできる.」[So] 佐藤先生はこの仕事に手応えを感じられたようである．

> 「理論物理の具体的な問題に, しかも私の好きな主題の 1 つであるイジング模型の中に, そのような特殊関数が実際に現れているということは私にとってうれしい驚きでした．そこで三輪さんと神保さんと一緒にこれを発展させました．我々は 1976 年あたりから始めました．この主題に馴染むため, それに先行する三年間をもっと初等的なことに費やしていたのです．」[A]

4.2 リーマンの問題と場の理論 (1977)

前節の手法を拡張することにより, リーマンの問題に場の理論的な解釈を与えることができる．ここでいうリーマンの問題とは次の意味である．

「複素球面上の点 $a_1, \ldots, a_n, a_\infty = \infty \in \mathbb{CP}^1$ と, 行列 $M_1, \ldots, M_n, M_\infty \in GL(m)$ を条

件 $M_1\cdots M_n M_\infty = I$ のもとに与える．このとき行列値解析関数 $Y(x)$ で各点 a_μ で M_μ をモノドロミー行列に持つようなものを構成せよ．」

そのためにまず m 成分を持つ荷電フェルミオン $\psi_j(x), \psi_j^*(x)$ で次の反交換関係

$$[\psi_i(x), \psi_j(y)]_+ = [\psi_i^*(x), \psi_j^*(y)]_+ = 0\,, \quad [\psi_i(x), \psi_j^*(y)]_+ = \delta_{i,j}\delta(x-y)$$

を満たすものを導入する．ここで $[A,B]_+ = AB + BA$ である．これらフェルミオンから具体的に構成された場 $\varphi(a;L)$ を用いて行列 $Y(x) = (Y_{j,k}(x))$ を

$$Y(x)_{j,k} = 2\pi i(x_0 - x)\frac{\langle \psi_j^*(x_0)\psi_k(x)\varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle}{\langle \varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle}\,,$$

と定める．ただし x_0 は基点, $M_j = \exp(2\pi i L_j)$ である．

このとき, $L_1, \ldots, L_n$ が十分小さければこれがリーマン問題の解を与えることがわかる．

標準的な議論により, $Y(x)$ は正規フックス型微分方程式

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y\,, \quad A(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_\mu}{x - a_\mu}$$

を満たす． さらにモノドロミーが点 $a_1, \ldots, a_n$ に依存しないことから, 係数行列 A_μ は Schlesinger 方程式

$$dA_\nu = \sum_{\mu(\neq\nu)} [A_\mu, A_\nu]\, d\log\frac{a_\nu - a_\mu}{x_0 - a_\mu}$$

を満たすことが知られている．

ここで構成した場 $\varphi(a;L)$ には物理的な内容は乏しいが, 相関関数

$$\tau = \langle \varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle$$

を考えることは自然である．形式的な計算によるとこれは次の公式で与えられる:

$$d\log\tau = \sum_{\mu<\nu} \mathrm{tr}\left(A_\mu A_\nu\right) d\log(a_\mu - a_\nu)\,.$$

ここで議論を逆転すると, Schlesinger 方程式の解に対して右辺は閉形式であることが容易にわかり, したがって上式を満たすタウ関数 $\tau(a_1, \ldots, a_n)$ が（局所的には）存在する．こうして場の理論的な解釈がモノドロミー保存変形のタウ関数の発見につながった．

4.3 非透過ボーズ気体 (1979)

ついで扱ったのは「１次元非透過ボーズ気体の密度行列」という主題で, これは HQF の応用問題といえる．後述の理由により前節とは 1 年の gap がある．

物理的な背景は省略するが, この問題は数学的にはサイン核を持つ次の積分作用素

$$\big(K_J f\big)(x) = \int_J \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y)dy\,,$$
$$J = [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{2n-1}, a_{2n}] \subset \mathbb{R}$$

のフレドホルム行列式 $\det(I - \lambda K_J)$ の計算に帰着する．これは Schlesinger 方程式を少し拡張した次の形のモノドロミー保存変形の問題となる:

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y\,, \quad A(x) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{A_j}{x-a_j} + A_\infty\,.$$

特に $n = 1$ のとき V 型のパンルヴェ方程式に帰着する．

この仕事は, 副産物としてモノドロミー保存変形のハミルトン形式が得られたことなど, それ自身としては実りがあったが, ここではもう「場の理論のモデルを作る」とか「場の理論とモノドロミー保存変形の関係」という観点は希薄になっている．

5 物理学者との交流

この頃佐藤先生が主催ないし参加講演された研究会をみると, 佐藤先生の関心が物理学へ傾斜していた様子が伺える．以下それらを順に列挙してみよう．

- 国際数理物理学会 ($M \cap \Phi$) 京都（1975 年 1 月）
  これは荒木不二洋先生がホストで開催されたものである．佐藤先生は Infinite System についての講演 [S] を行っている．
- 代数解析王子セミナー (1976 年 4 月)
  佐藤先生の主催で, 超局所解析の専門家のほか, 物理サイドでは T.Regge, F.Pham, D.Olive らを招聘している．
- 京都大学数理解析研究所の研究集会
  佐藤先生が代表者になり毎年主催されたもの．括弧内は物理に関連する話題の講演者である．

(1) 代数解析学の諸問題　(佐藤幹夫 1975/07/29–08/01)

[伊東恵一, 長町重昭・麦林布道]

(2) 場の量子論の代数解析的研究 (佐藤幹夫 1978/01/30–02/01)

[中西襄]

(3) ソリトンと Holonomic Quantum Fields の研究 (佐藤幹夫 1978/12/22–12/26)

[広田良吾, 吉川圭二, 冨松彰]

(4) 完全積分可能な非線形系の古典論と量子論　(佐藤幹夫 1979/11/19–11/22)

[細谷暁夫, 大石進一, 広田良吾, 中村明]

- 物理学者との短期共同研究（多分 1976,1977）

  これについての記録は残っていない. 筆者の記憶では佐藤先生のお知り合いである先生方

  西島和彦・宮澤弘成・吉川圭二・伊豆山健夫・和田靖・鈴木増雄

  に声をかけて来ていただいた. 吉川先生が初回に弦理論, 2 回目にインスタントンの解説をされたと思う.

- Weinberg-Salam 理論の勉強会（多分 1976）

  これも記憶が怪しいが, 数理研の図書室で解説論文

  E.S. Abers and B.W. Lee, *Gauge Theories*, Physics Reports 9 (1973) 1-141.

  を見つけて三輪さんと筆者が交代で 5-6 回セミナーを行い, 佐藤先生に聞いてもらったように思う.

本稿の主題からは外れてしまうが, ソリトン関係の研究会にも触れておく.

- 名古屋大プラズマ研 workshop (1978 年 1 月)

  戸田盛和先生が主催されたもので, 海外から D.McLaghlin, H.Flaschka が参加していた. この会で佐藤先生は広田良吾先生と薩摩順吉さんの知己を得た.

- ソリトンセミナー (1978 年 2 月—1980 年 1 月)

  上記 workshop が一つの契機になり, 毎月 1 回のセミナーが開かれた. 広田・薩摩氏のほかに田中俊一先生, 伊達悦朗さん, 中村佳正さんらが常連参加者である.

1979 年と 1980 年は物理絡みで海外出張が多い. 数学と比べ, 物理では論文に対する反応が早いことに驚いておられた. 1979 年のものと関連する講演者を挙げておく.

- Erhart Science Training (1979 年 1 月)

Wu, McCoy, Brezin, Itzykson, Polyakov, ...

- Clarkson 大学 Nonlinear waves 研究会 (1979 年 7-8 月)

  Flaschka, Newell, Wilson, ...

- $M \cap \Phi$ Lausanne (1979 年 8 月)
- Les Houches 研究会 (1979 年 9 月)

  Bros, Iagolnitzer, Verdier, ...

  IHES, Saclay で Gaudin, Mehta, Zinn Justin, ...

6 高次元化への苦闘 (1978 前後)

ここで現在から見たホロノミック量子場の位置付けを試みよう. 筆者自身も関わったことなので少し烏滸がましいが, あくまで個人的な見方であるということでお許しいただきたい.

- 物理への影響はほとんどなかった

イジングモデルは自由フェルミオンで記述できるという点で, 極めて特殊で孤立している. ベーテ仮設やヤン・バクスター方程式などに基づくより広いクラスの 2 次元可解モデルは沢山あるのだが, これらの S 行列や相関関数はイジングモデルに比べてはるかに複雑になる. そのため HQF の物理への影響は極めて限定的といえる. 強いて言えば後年の

(i) ランダム行列 (Tracy-Widom 1993–)

(ii) パンルヴェ方程式と共形場理論の関係 (Lisovyy ら 2012–)

などの仕事に繋がっているが, これらの話題はむしろ可積分系と言うべきかもしれない.

- 可積分系にはインパクトがあった

パンルヴェ方程式やモノドロミー保存変形は数学の表舞台からは忘れられていた. Wu らの結果とともに, HQF はそれらが再び活発に研究される契機になった. 場の理論的な見方によってタウ関数やハミルトン構造などの進展も得られている.

それでは佐藤先生ご自身は HQF をどのように見ていたのだろうか.

上に触れたようなイジング以外の 2 次元可解モデルには興味を持たれなかった. Faddeev らの量子逆散乱法が登場した時は, ある程度興味を持たれたが, 踏み込まれなかった. 佐藤先生の関心はあくまで場の理論にあったようにみえる.

QED のように相互作用が弱い場合, 自由場からの摂動で精密な結果が得られる. もし強い相互

作用を持つ場の良い理論が作れれば, 自由場に代わってそれを摂動の出発点にとることができるだろう. イジング場の理論はそのような例だが, 時空 2 次元にとどまっていては仕方ない. 高次元のよいモデルを作ることが最も重要である.

このように考えられ, 高次元モデルの構成に全力で取り組まれていた. 表現論的な方法を試みられていたようであるが詳細はわからない. 筆者の記憶では一時期 Hua Loo-Keng(華 羅庚) の本 “Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains” を見ておられた.

2 年くらいはずっと考えておられたようだが, 結果がまとまるには至らなかった.

7 結語

ここまで 1973 年から 1979 年にわたる佐藤先生の物理学関係の研究活動を概観してきた. うまくいった場合もあるし, いかなかった場合もあるが, 佐藤先生はつねに遠くを見ておられた.

当然の事かもしれないが, 佐藤先生の物理学に対するスタンスは物理学者のそれと同じというわけではない.

> 「僕自身は著しい特徴を持つ数学的構造を発見していくことがおもしろいので, 物理の問題を解くことを必ずしも直接の目標にはしていないけれど, 微分方程式の一般的な理論が進歩すれば現実の問題に適用できるという点で, 数学的実在, 数学的自然というものの客観的な存在は非常に実感する」[So]

佐藤先生にとって場の理論は一つの普遍的な数学形式であった.

> 「場の理論というものは何も場の量子論, 素粒子論専売のものじゃ決してないわけで, あらゆる無限自由度を持つ structure にはいつでも出てくるわけです. 物性の理論にもでてくるし, それから京都で言うと, 松原先生の温度 Green 関数なんてのも, あるいは流体力学の方でも乱流を表すのに, 乱流場というのか, やはり Green 関数みたいなものを使っているようですね, あんまり細かいことは知りませんが. 」[O]

最後に, 佐藤先生のオイラーに対する深い共感が伺われる発言を引用したい.

「オイラーのやっている仕事を見ると, 一見, 雑多な問題をやっているように見えても, オイラー自身にとっては一貫した, 彼自身の感覚にはっきり見えるものに従っているとしか思えないわけで, そういうところに彼の業績の素晴らしさがある. 普通評価されている以上に, 彼は偉大な人だったとぼくは感じるんです. 」 [K]

佐藤先生の物理学に関する構想は, D 加群の場合のように他者に了解可能な形で明瞭に定式化されたものではなかっただろう. それでも佐藤先生にとって

代数解析学, 場の理論, 無限次元, 無限階, 無限自由度, 非線形, ・・・

は一体の, 「一貫して感覚にはっきり見えているもの」であったのではないだろうか.

参考文献

[O] 「代数解析学と私」, 佐藤幹夫, 大山陽介記, 数理解析研究所講究録 **810** (1992) 164–217

[A] 「佐藤幹夫氏へのインタビュー」, エマニュエル・アンドロニコフ, 佐藤幹夫の数学, 木村達夫 編, 日本評論社 2007 年

[SKK] M.Sato, T.Kawai and M. Kashiwara, *Microfunctions and Psuedo-differential Equations*, Lect. Notes in Math. **287** Springer 1973, 265–529.

[IS] D.Iagolnitzer and H.Stapp, *Microscopic casality and physical regin analyticity in S-matrix theory*, Commun. Math. Phys. **14** (1969) 15-55.

[P] F.Pham, *Microanalyticité de la Matrice S*, Hyperfunctions and Theoretical Physics, Lecture Notes in Mathematics **449**, Springer 1975

[S] M. Sato, *Recent development in hyperfunction theory and its appication to physics (Microlocal analysis of S-matrices and related quantities)*, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Kyoto 1975, Lecture Notes in Physics **39**, Springer 1975, 13–29

[KS] T.Kawai and H.Stapp, *Discontinuity Formula and Sato's Conjecture*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **12** Suppl. (1977) 155-232

[HK] N. Honda and T. Kawai, N. Honda and T. Kawai, *An invitation to Sato's postulates in micro-analytic S-matrix theory*, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B61** (2017) 23–56.

[SKM] 佐藤幹夫, 柏原正樹, 三輪哲二 Microlocal study of infinite systems, 数理解析研究所講究録 28 巻 1975 年 261–292

[WMTB] T.T.Wu, B.McCoy, C.Tracy and E. Barouch, *Spin-spin correlation functions for the two dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region.* Phys. Rev. B **13**, 316–374 (1976)

[SHQF1] Sato, M., Miwa, T. and Jimbo, M., *Studies on Holonomic Quantum Fields.I*, Proc. Jpn. Acad. **A 53** (1977) 6–10

[So] 「方程式に秘匿された世界構造」, 佐藤幹夫, 十川治江 [インタビュー], 「遊」, 工作舎, 1980 年; 佐藤幹夫の数学, 木村達夫 編, 日本評論社 2007 年

[Co] Collected Papers, Mikio Sato, Springer (in press)

[K] 「オイラーの数学」, 数学セミナー 1983 年 11 月号; 佐藤幹夫の数学, 木村達夫 編, 日本評論社 2007 年