第 34 回数学史シンポジウム

北京大学蔵秦簡牘中の算術書について

田村　誠　（大阪産業大学）

Abstract

2023 年北京大学蔵秦簡牘について、全資料のカラー図版・赤外線写真・釈文注釈が公開された。この小文では北京大学蔵秦簡牘の概略および、とくにその中の『算書』甲種の内容について、同時期の他の古算書と比較しつつ紹介する。また、『算書』甲種中の算題【8】と【26】で扱う方田術を、張家山漢簡『算数書』のものと比較し、それが開方術への兆しとなっていることを明らかにする。さらにそれと、おそらく後漢期以降の『九章算術』の開平術との差について考える。

１．北京大学蔵秦簡牘について

北京大学蔵秦簡牘（以下「北大秦簡」）とは、中国の所在不明の墓から盗掘され、一旦香港の骨董市場に持ち込まれたが、香港の馮燊均国学基金によって買い戻され、2009 年に北京大学に寄贈された竹簡や木牘などからなる文字資料のことである。その内訳は、竹簡 761 枚、木簡 21 枚、木牘 6 枚、竹牘 4 枚、不規則な形状の木觚 1 枚、木骰 1 枚の他、竹製の算籌 61 本とそれを納める竹製容器の残片が含まれていた。その後 2023 年 5 月付で、

[1]北京大学出土文献与古代文明研究所編『北京大学蔵秦簡牘』全 5 冊（上海古籍出版社）

が刊行され、全資料のカラー図版・赤外線写真・釈文注釈が公開された。

北大秦簡の成書は、『質日』に「秦始皇三十一年」の記述が見え，紀元前 216 年が下限とされる。これはこれまで出土した古算書である、張家山漢簡『算数書』（以下『算数書』、内容の詳細は[2]参照）を 30 年、岳麓書院蔵秦簡『数』（以下『数』、内容の詳細は[3]参照）をわずかに 4 年遡るものであった。本稿では[4]～[6]に基づき、北大秦簡中の『算書』甲種について紹介・考察する。これまで出土した秦漢期の古算書は北大秦簡を含め 4 つ、これを表 1 に示す。ただし、北大秦簡については『算書』甲種のみ表に挙げる。

書名	成書	簡数	出土／発見年
北大秦簡『算書』甲種	紀元前 216 年	235	2009 年
岳麓書院蔵秦簡『数』	紀元前 212 年	215	2007 年
張家山漢簡『算数書』	紀元前 186 年	185	1984 年
睡虎地漢簡『算術』	紀元前 157 年	216	2006 年

表 1：秦漢期の古算書（睡虎地漢簡『算術』は未公開）

北大秦簡中の算術関連資料としては、以下のものがあった。

①『算書』甲種　（235 簡）　②『算書』乙種　（38 簡分）
③『算書』丙種　（71 簡）　④『成田』　（22 簡）
⑤『田書』　（50 簡）　⑥「九九表」（木牘 1 枚）

『算書』甲種と乙種は、最大の巻物（巻四）に他の書とともに書かれおり、整理者が内容によって分割し書名を付けたものである。巻四は多くの簡で両面にわたって書かれており、『算書』乙種の 38 簡分というのは、先頭のみ簡の表に書かれており、その後の 37 簡は簡の背面に書かれているためである。『算書』丙種、『成田』、『田書』はそれぞれ独立した巻の表側に書かれている。『算書』丙種の背面には、巻物全体に渡る引っかき傷が付けられていて、編縄がほどけても簡順の復元が容易にできるような工夫がされている。『成田』の名は整理者によるもの。『田書』については、第 1 簡の背面にその名が記されており、それが書名となった。「九九表」については、ほぼ同じものが『算書』甲種の中にあり、これは後述する。

冒頭で述べたように北大秦簡の出土は不明であるが、内容を通して考えると秦南部の中級官吏のものと思われる。『算書』の性格としては、『算数書』と同様に中級地方官吏の徴税のための計算マニュアルであるとともに、『数』に含まれるものと同様の軍事関係の計算も含んでいる。なお、甲種・乙種・丙種で相当部分が重複しており、当時このようなマニュアルが数種あったことがうかがえる。『成田』や『田書』は田の面積計算とそれにかかる租税計算の一覧となっている。

２．『算書』甲種について

『算書』甲種の内容としては、大きく次の 3 つに分かれている。

(1)　「魯久次問数」　（1 正 ～ 32 正）
(2)　「九九表」　（33 正 ～ 40 正）
(3)　算題彙編　（41 正 ～ 220 正，220 正貳～235 正貳）

ここで、「正」は簡の表側（通常字が書かれる側）を表す。220 簡からは上下 2 段組で書かれており、「貳」はその下段に書かれていることを示す。

２－1.『算書』甲種「魯久次問数」について

「魯久次問數于陳起曰」に始まり、『算書』甲種の序文に相当するものである。弟子の魯久次が師の陳起に数について問うという形式で、このような問答形式は、諸子百家の書で一般的に見られるものであるが、これまでの中国古算書には見られなかった。質問は３問で、質問、および回答の要旨は次のようである。詳しくは[4]を見られたい。

（質問 1）「久次讀語計數、弗能竝휊。欲휊一物、何物爲急」
（私め久次は、語を学び、数を習っていますが、両者に完全に通達することはできません。どちらか一方に完全に通達しようと思うのですが、どちらが緊要でしょうか）

（回答 1）「舍語而휊數。數可語也、語不可數也」
（語を置いて数の方を完全に習熟しなさい。数は語を包摂するが、語は数を包摂できないからです）

（質問 2）「天下之物孰不用數」
（天下の物で、どれが数を用いないでしょうか）

（回答 2）「天下之物无不用數者」
（天下の物で数を用いないものはない）

（質問 3）「臨官立政、立度興事、何數爲」
（官に臨んで政策を立て、基準をたてて傜役の事を起こすに、どうして数が緊要なのでしょうか）

（回答 3）「夫臨官立政、立度興事、數无不急者」
（官に臨んで政策を立て、基準をたてて傜役の事を起こすに、数の中で緊要でないものはない）

回答２と回答３の後には多くの例示がなされる。そして回答３の例示の後で分数の重要性について述べ、最後に

> 「凡夫數者、恒人之行也。（中略）學者必愼毋忘數。凡數之寶莫急隸首、隸首者筭之始也。少廣者、筭之市也。所求者毋不有也」
> （おおよそ数というものは、常人の行いに用いるものである。（中略）学ぶ者は必ず謹んで数を忘れることがないようにせよ。凡そ数の宝として隷首より緊要なるものはない。隷首は算の始めである。少広術はいわば算の市場のようなもので、求める物でないものはない）

と結んでいる。「隷首」は伝説上の人物。『算法統宗』序文に、黄帝が隷首に命じて算を作らせたとする記述がある。ただ、「數之寶」という表現、『算書』甲種のこの後に「九九表」「少広」題と続く構成から、「隷首」は「九九表」を指して述べられているのかもしれない。

２－2.『算書』甲種「九九表」について

九= 八十一	八= 六十四	六七卌二	三六十八	二四而八33正
八九七十二	八五十六	五七卅五	二六十二	三= 而九34正
七九六十三	六八卌八	四七廿八	五= 廿五	二參而六35正
六九五十四	五八卌	三七廿一	四五廿	二= 而四36正
五九卌五	四八卅二	二七十四	三五十五	一= 而二37正
四九卅六	三八廿四	六= 卅六	二五而十	凡千一百一十二字38正
三九廿七	二八十六	五六卅	四= 四十六39正	
二九十八	七= 七卌九	四六廿四	三四十二 40正	

33簡から40簡は九九表である。各行末尾の数字が簡番号で、「正」は簡の表側に書かれていることを示す。「九九表」の題字は無い。「= 」は重文符号で、字画の右上に小さく書かれ、前の文字を繰り返すことを示す。8簡に5段組みで書かれており、竹簡では上段から横に（上の釈文は横書きにしているので左列から縦に）簡をまたぐように進んでいる。

「八十」「七十」「六十」「五十」は合字、上下を詰めてそれぞれ1字として書かれている。したがって、各句は一部が3字句であることを除いてほぼ4字句である。

九九は「九九八十一、八九七十二、七九六十三」のように大から小の順で並んでいる。「九八七十二」などは書かれておらず、積の可換性がよく知られていたことがわかる。また1との積は無い。末尾の「凡千一百一十二字」とは、各句の演算結果（81，72，63，．．．）の和のことである。

九九表は『算書』木牘、里耶秦簡木牘や居延漢簡木牘にもあり、本題のものとほぼ同じである。ほぼというのは、たとえば『算書』木牘では「凡千一百一十二字」の前に「二半而一」があり、「凡千一百一十三字」となっている。

この九九表には、1つ不可解な点がある。「一= 而二」である。これを「1×1＝2」とするのは明らかに誤りである。また、この表で1との積は無かったことにも矛盾する。中国の多くの研究者はこれを「1＋1＝2」と解するが、直前まで積を述べてきたものが、この句だけ和であるとするのはやはり疑問が残る。何より『算書』木牘では直後が「二半而一」と、再び積に戻っているのである。ここは存疑としたい。

２－3.『算書』甲種　算題彙編について

『算書』甲種の残りの部分は、『数』や『算数書』と似た形式の51題の算題が続く。各算題では、問題・解答・術文の全部または一部が、順不同で述べられている。算題の区切りは『数』には見られず、『算数書』では上部の編縄の上に算題名が書かれていた。『算書』甲種では、上部編縄の上に2種類の区切り記号が用いられている。

1つは上部編縄の上が黒く塗りつぶされているもの、これを「■」で表し、6か所ある。■の下には、直接本文が続く簡3つと、「田」などの題字だけ記して次の簡へ進む簡3つとがある。いずれにせよ、■は一連の内容をとりまとめてつけられたものであり、これは章

立ての意であるとわかる。

もう１つは上部編縄の上に書かれた黒い墨点、これを「●」で表す。●は■で章立てされたものの下位分類で、節にあたるものの開始を示すものと考えられる。そこで筆者は、■または上部編縄の上の●によって区切られた一連の内容を算題とし、算題番号【1】～【51】を付すことにした。なお、墨点については文中にも用いられているが、これは問題と術文などの内容の転換を示しているもので、算題の区切りとは見なさないものとした。

なお、これらの区切り方は『算書』乙種と丙種ではまた異なるようで、乙種では■は用いられず、丙種では■によって算題の区切りとしているようである。

以下で、各算題を算術の面から分類する。各算題の詳細については[5], [6]を参照されたい。とくに脚注 A~D を付けたもの以外は、『数』や『算数書』にほぼ同様、または類題が見られるものである。

・分数の計算
- 除法（少広術、分数の除数を整数化して計算する術）【1】
- 乗法【24】【25】【41】，加法【38】，
- 約分（互除法で最大公約数を求めて約分）【39】，減法【40】

・面積計算
- 長方形（分数計算）【24】【25】
- 長方形の面積および１辺から、他の辺長【2】【3】【4】
- 等脚台形【5】，二等辺三角形【6】，円【7】
- 方田術[A]（平方根の近似分数）【8】【26】

・比例計算、比例配分
- 租税の計算
  - 禾（穀類）【11】【12】【13】【17】
  - 枲（麻）【18】【19】【20】
  - 誤券（税率を税額に合わせる）:
    - 禾【14】【15】，枲【22】【23】
  - 耗程（損耗分の補充）【21】【28】【29】【30】
- 軍事
  - 営軍之術[B]（陣営警備の延長と人数）【32】【33】
  - 食攻之術[B]（包囲網の延長と人数）【34】
  - 陣地拡張による周長の増加【27】
- 盈不足術【16】【49】
- 女織（等比数列の和から初項）【31】【37】
- 利息の日割り計算【50】

[A] 『算数書』に同一問題があるが、『数』にはない。『算書』甲種では『算数書』と術が多少異なる。

[B] 『数』に類題があるが、『算数書』にはない。

・三平方の定理の応用[B] $\left(弦=\frac{\left(句^2+股弦差^2\right)}{2\times股弦差}\right)$【36】

・単位換算

面積の換算定数（里田術）[C]【9】

面積の単位換算の速算法[D]【10】

穀物の等価交換【35】

面積体積の単位換算【42】【43】，衡制【51】

・体積計算

四角錐台【44】，くさび型【46】

体積公式 $\frac{\{(上袤\times2+下袤)\times上広+(下袤\times2+上袤)\times下広\}\times高}{6}$ はよく知られていた

立方体から正四角錐台へ等積変形するときの高さ【45】

立体の体積から辺長を求める、詳細不明【47】

円錐【48】

３．方田題（平方根の近似分数）について

【8】題と【26】題では、$\sqrt{240}$ の近似分数として$15\frac{15}{31}$ を与えている。２－3.で述べたように、『算数書』には同一問題があり、次のように述べている。

『算数書』【4】$\boxed{68}$ 方田題

方田。田一畝方幾何歩。曰、方十五歩卅一分歩十五。術曰、方十五歩不足十五歩、方十六歩有余十六歩。曰、盈・不足以爲法。不足子乘盈母、盈子乘不足母、以爲實。

面積 240 平方歩の正方形の１辺（の近似分数）を、盈不足術によって $\frac{15\times16+16\times15}{15+16}=15\frac{15}{31}$ 歩と与えている。盈不足術とは過不足算のことで、１辺 A のときa不足し、１辺 B のときb余るならば、答は $\frac{\mathrm{A}b+\mathrm{B}a}{a+b}$ であるというもの[E]で、現代的に言えばＡとＢの間を $a:b$ に内分する点を求めるものである。

一方、【8】題と【26】題ではこれと少し異なる術を示す。【8】題の術文に関わるところ

[C] 換算定数 $375=(124+1)\times3$ についての口訣(口伝の暗記法)は『数』や『算数書』にはない。

[D] 大きな数を避けて割り算を行う速算法、『数』や『算数書』にはない。

[E] 『算数書』の術文に従えば、値は同じであるが $\frac{\mathrm{B}a+\mathrm{A}b}{b+a}$ と書くべきかもしれない。

を見ると、次のように書かれている。

藉方十六而有餘十六。藉方十五不足十五。即并赢・不足以爲法而置十五。
（1 辺 16 とすれば余り 16 が出る。1 辺 15 とすれば 15 不足する。（不足の 1 辺 15 に対し、）ただちに余りと不足を合わせて法とし、（不足する）15 を置いて（実とする）

ここでは、$15^2 < 240$ であり $16^2 > 240$ であるから、まだ不足している 1 辺 15 に $\frac{15}{15+16}$ を加えて上記の答を得ている。上記の記号を用いれば $A + \frac{a}{a+b}$ とするもので、これは $B = A + 1$ のときに限られるが、この方が計算は易しい。後代の『算数書』よりも北大秦簡の方が易しい計算方法なのはどういうことなのか。

これを考えるために、【8】題の術文の後の検算らしきものを見たい。単純に$\left(15\frac{15}{31}\right)^2$を計算したのでは、当然 240 にはならない。そこで、次のように"検算"を行っている。

亦藉十五令相乘也、即成步。又藉卅一分十五、令維乘上十五。又令十五自乘也、十五成一。從維乘者而卅一成一、乃得從上、即成爲田一畝。
（また 15 を自乗するとそのまま平方歩を成す。また $\frac{15}{31}$ について、上の整数の 15 歩に維乗させる。また分子の 15 を自乗させ、15 で割る。維乗した者を合わせ、31 で割り、上の整数に加えたものを得れば、それは田 1 畝となすこととなる。）

この"検算"は次のようなものである。
$\left(15\frac{15}{31}\right)^2$（らしきもの）を計算するために、算木で整数部分 15、分子 15、分母 31 と縦に並べ、もう 1 列これを横に布算する。

(1) 整数部分の 15 を自乗し 225、これが図 1 の①の面積である。
(2) 整数部分の 15 と分子の 15 が 2 列に並んでいる。これを維乗し（斜めに掛け合わし）225 と 225、これを分母 31 で割れば、図 1 の②の面積となる。
(3) 分子の 15 を自乗し、15 で割る。これを分母 31 で割れば、図 1 の③の

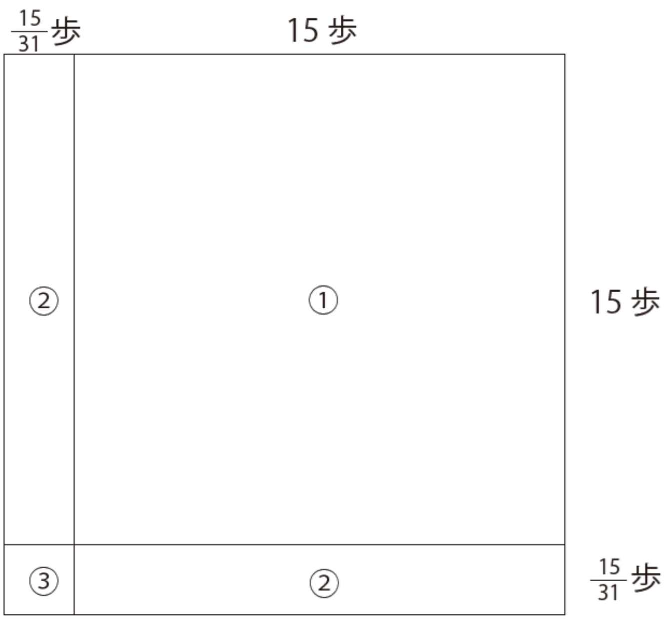

図 1

面積に近いものとなる。

(1)～(3)を合わせると 240 になる。(3)では$\left(\frac{15}{31}\right)^2$ではなく$\frac{15^2 \div 15}{31} = \frac{15}{31}$ と無駄な計算をしてまで、分数部分を取り出している。このことから、【8】題の術文は、盈不足術ではなく、開平方の近似値を与える方法と同じ考え方によるものだということがわかる。すなわち$\sqrt{240} \fallingdotseq 15 + \frac{15}{15+16}$ を次のように求めたと考えられる。

自乗が 240 を超えない最大の整数として 15 を求める。$15^2 = 225$ は、図 1 の①の部分の面積である。面積 240 の正方形からこの部分を除いた残りは、図 1 の②および③の部分で、その面積は 15 である。さらに図 1 の①の部分から、②および③の部分への拡張幅

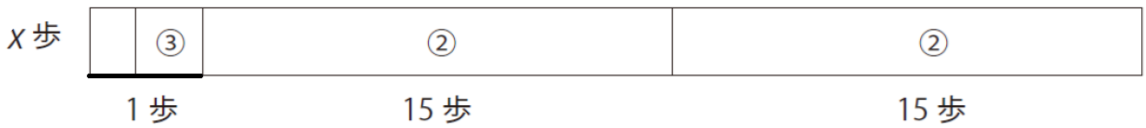

図 2

$\left(\frac{15}{31}\right)$ を求めたい。そこでこの幅をxとする。、②および③の部分を図 2 のように並べ直す。並べ直してできた長方形の面積は 15 で、底辺は $x + 15 \times 2$、③の底辺を 1 に変えて、これを $1 + 15 \times 2 = 31$と近似する。このとき長方形の高さは$x = \frac{15}{31}$ となる。

この方法は十分に実用的ではあったと思われる。しかし、後に『九章算術』少広章の開方術に付けられた劉徽注[14]で批判されている。[7]注(50)参照。

術或有以借算加定法而命分者、雖粗相近、不可用也。
(術に(開平が尽きない時の)別法として、借算(1)を定法(ここでは 15×2)に加えて(分母とし、余りを)分数にするというものがある。ほぼ相い近いといえども、用いるべきではない)

劉徽の批判の本質はこの後にある。劉徽は続ける、1 辺の自乗は面積にならなければならない。借算 1 を加えて作った近似分数でも、借算 1 を加えずに作った近似分数でも、自乗の値は面積と一致しない。そこで桁を下げ、辺長を延長し、計算を繰り返していくのだ、と。そのまとめが以下である。

不以面命之、加定法如前、求其微數。微數無名者以爲分子、其一退以十爲母。其再退以百爲母。退之彌下、其分彌細、則朱冪雖有所棄之數、不足言之也。
(側面の長さを用いて分数にするのではなく、定法(1 辺の 2 倍、割る数のこと)に前と同じように加えていき、その微細な余りを求める。微細な数が単位を持たなければ分子として、それが位を一つ下げたものならば 10 を分母とする。それが位をさらに下げたものならば 100 を分母とする。位を下げれば下げるほど、その分数も微細になるの

で、朱冪の張るところに棄てる所(③の部分からはみ出るところ)の数があるとはいっても、それは言うに足りないものとなるのである）

劉徽の批判からわかるように、1 辺を延長していき、計算を繰り返して、誤差をどこまでも小さくしていけることが開方術の本質であった。『九章算術』原文には、この繰り返しのアルゴリズムが示され、劉徽注には上記の通り、平方根が無理数になるときの考え方についても述べられている。

一方、北大秦簡、『数』、『算数書』に開方術は見えない。「方田」にだけ平方根の近似分数が見えるが、計算の繰り返しの発想はない。この点に、秦代・前漢期の算書と『九章算術』あるいはその劉徽注との差異が見える。

４．まとめ

北大秦簡には、これまで出土した古算書よりもはるかに大量の算書が含まれ、とくに『算書』甲種は最大・最古の中国古算書である。『算書』甲種は、「魯久次問数」、「九九表」と 51 題の算題で構成され、「魯久次問数」は序文としての性格を持ち、『数』や『算数書』には見られなかったものである。「九九表」や各算題は、これまでの出土資料や『数』、『算数書』の算題と同一あるいは類似のものがほとんどであるが、一部に特徴的なものもある。

『算書』甲種【8】題と【26】題では、いわゆる「方田」題が扱われている。『算数書』では盈不足術を用いて解かれているが、『算書』甲種では『九章算術』開方術に似た手法で解かれている。しかしながらそこに繰り返しの発想はなく、その点が秦代・前漢期の古算書と『九章算術』あるいはその劉徽注との差を示すものとなっている。

参考文献

[1] 北京大学出土文献与古代文明研究所　『北京大学蔵秦簡牘』　上海古籍出版社（2023 年 5 月）
[2] 張家山漢簡『算数書』研究会編　『漢簡『算数書』－中国最古の数学書－』　朋友書店（2006 年 10 月）
[3] 中国古算書研究会編　『岳麓書院蔵秦簡『数』訳注』　朋友書店（2016 年 11 月）
[4] 大川俊隆「北京大学蔵秦簡算術書訳注稿(1)」　大阪産業大学論集　人文・社会科学編 51 号（2024 年 7 月）https://osu.repo.nii.ac.jp/record/2000148/files/001-027.pdf
[5] 田村誠「北京大学蔵秦簡算術書訳注稿(2) －『算書』甲種［二］－」　大阪産業大学論集　人文・社会科学編 52 号（2024 年 11 月）https://osu.repo.nii.ac.jp/records/2000199

[6] 田村誠「北京大学蔵秦簡算術書訳注稿(3) － 『算書』甲種［三］－ 」 大阪産業大学論集　人文・社会科学編 53 号 投稿予定
[7] 田村誠、吉村昌之「『九章算術』訳注稿(10)」 大阪産業大学論集　人文・社会科学編 11 号（2011 年 2 月）https://osu.repo.nii.ac.jp/record/1064/files/KJ00007157401.pdf

[4], [5], [7] は、中国古算書研究会 http://pal.las.osaka-sandai.ac.jp/~suanshu/ からもダウンロード可能