交錯定理とその周辺

高崎金久（大阪公立大学数学研究所）

概 要

n 次実対称行列の固有値はすべて実数であるが，同じ番号の行と列を除去して得られる $n-1$ 次実対称行列の固有値は除去前の行列の固有値の間に 1 個ずつ存在する．この事実は Cauchy と Sturm によって 1829 年の論文において指摘されて以来，Courant らのミニマックス定理の観点からの見直しなどを経て，今日では「交錯定理」や「分離定理」などの名称で知られている．本報告では Cauchy と Sturm のそれぞれの論文の内容を紹介し，彼らの考察やその後の研究との関わりを探る．

1　はじめに

大学初級の線形代数では，実対称行列の固有値はすべて実数であり，実対称行列は直交行列によって対角化できる，ということを学ぶ．実対称行列の固有値がすべて実数であることが Cauchy によって見出されたという事実は比較的よく知られているが，原論文である 1829 年の論文 [4] を読めば，いろいろと興味深いことがわかる．第 1 に，そこで扱われているのは実対称行列ではなく 2 次形式である．行列の概念は当時まだ存在せず，1850 年頃に Cayley や Sylvester によって導入された．ただし，Cauchy の論文にも行列に相当するものが “tableau” という呼び名で登場する．第 2 に，Cauchy は 2 次形式に対して変数の平方和が 1 に等しいという条件の下で（言い換えれば単位球面の上で）条件付き極値問題を考えて，2 次形式の係数行列に対する固有値問題を導いている．ラグランジュ未定乗数が固有値に相当する．固有値に対する方程式を行列式によって書き下すやり方は今日の線形代数と同じである．第 3 に，Cauchy はこの行列式だけでなく，その主小行列式（principal minors）も用いてこれらの多項式の根の配置を調べている．そこからもとの行列の固有値とその主小行列（それも実対称行列になる）の固有値の間にある関係が成り立つことを見出している．この事実は今日では**交錯定理**（interlace theorem）と呼ばれている．第 4 に，Cauchy は固有値問題の解を用いて変数の直交変換を構成し，それによって 2 次形式が変数の平方項だけからなる形（標準形）に変換されることを示している．このことと交錯定理がこの論文の主結果であり，固有値が実数であることはそのごく一部でしかない．第 5 に，Cauchy は論文の最後に，Sturm が固有値に関して別の方法で同じ結果を得ていたことや，その報告

が科学アカデミーに提出されることを書き添えている．Cauchy は翌年の短い論文 [5] で剛体問題への応用を紹介している．

Sturm の報告は Extrait d'un Mémoire として発表された [23]．Mémoire 自体は結局公刊されなかったようである．この報告 [23] は惑星運動の永年摂動に関する Lagrange と Laplace の研究を背景にして，定数係数連立 1 階線形常微分方程式の指数函数解を定める固有値問題を論じている．その主結果は交錯定理の主張そのものであるが，それに加えて，多項式の実根の個数に関する**ストゥルムの定理**[1]（同じ年の先行する論文 [22] の主結果）とよく似た主張を述べていることが注目される．これらの論文 [22, 23] に共通するのは，与えられた多項式の根を調べるために補助的な多項式列を用意する，という考え方である．Sturm が固有値問題に対して用いた多項式列は Cauchy が用いた小行列式と実質的に同じものである．Sturm は行列式を使わずに直接的な計算によってこれらの多項式を得ている．ただし，Sturm の 2 篇の論文はいずれも主結果に対する証明を欠いている．正確に言えば，先行する論文 [22] は証明を省略して結果のみを述べているが（後に証明付きの解説 [24] が書かれた），固有値を扱った論文 [23] の「証明」と称するものはまったく証明になっていない．

Cauchy の論文 [4] には表題にいささか誇大宣伝の面がある，ということも言い添えておきたい．そこには惑星運動という言葉が入っているが，本文は惑星運動に 1 箇所触れているだけであり，その部分もあまり説得力がない．応用としてはむしろ 2 次曲面の幾何学や剛体の慣性モーメントを掲げており，次の年の論文 [5] では剛体運動への応用を前面に掲げている．そもそも Cauchy がこの論文で 2 次形式とその直交変換による標準形への変換を論じたのは，3 次元空間の 2 次曲面や剛体運動の研究においてその原型が知られていたからだろう．Cauchy 自身もこれらの論文を書く前の数年間，剛体運動に関わる研究を行っていたが（数学史家 Hawkins の論文 [11] の引用文献を参照されたい），天体力学にはあまり関心がなかったように見える．おそらく，Sturm の結果を聞いて，それに合わせて論文の表題を決めたのだろう．

以下では交錯定理の内容を解説した後，Cauchy の論文 [4] と Sturm の論文 [23] に関して上に述べたことを詳しく説明する．さらに，これらの論文に関連してその後なされたさまざまな研究も紹介する．なお，ここでは説明の便宜上，固有値や固有ベクトルなどの言葉を用いているが，これらは Cauchy と Sturm の論文が書かれた時代にはまだ使われていなかった．そそそもベクトルや n 次元空間の概念もまだ存在していなかったということを注意しておきたい．

[1]高木の本 [27] の第 3 章において，関連する話題とともに詳しく解説されている．

2　交錯定理

2.1　交錯定理とその帰結

実対称行列の固有値の交錯定理は次のように定式化される．

定理　n 次実対称行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ に対して k 行と k 列（k は任意）を除去して得られる行列を A' とする．A の固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$，$A'$ の固有値を $\lambda'_1 \geq \cdots \geq \lambda'_{n-1}$ とする．このとき**交錯関係**（interlace relation）

$$\lambda_1 \geq \lambda'_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda'_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda'_{n-1} \geq \lambda_n \tag{1}$$

が成立する．

この定理を繰り返し適用することによって次のことが従う．

系　n 次実対称行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ の左上の $k \times k$ 小行列 $A^{(k)} = (a_{ij})_{i,j=1}^k$，の固有値を $\lambda_1^{(k)} \geq \cdots \geq \lambda_k^{(k)}$ とする．このとき

$$\lambda_j^{(k)} \geq \lambda_j^{(k-1)} \geq \lambda_{j+1}^{(k)} \tag{2}$$

という不等式が $1 \leq j \leq k-1$, $2 \leq k \leq n$ にわたって成立する．

たとえば $n = 3$ の場合には，(2) は

$$\lambda_1^{(3)} \geq \lambda_1^{(2)} \geq \lambda_2^{(3)} \geq \lambda_2^{(2)} \geq \lambda_3^{(3)}$$
$$\lambda_1^{(2)} \geq \lambda_1^{(1)} \geq \lambda_2^{(2)}$$

を意味する．$\lambda_j^{(k)}$ を図 1 のように逆三角形に並べれば，各行とその上下に隣接する行に並んでいる数は水平方向の位置が左にあるほどより大きくなるか等しい，ということになる．このような逆三角形の数の並びをゲルファント-ツェトリンパターン（Gelfand-Zetlin pattern）という．また，$R^{n(n+1)/2}$ の錐体

$$C = \{(\lambda_j^{(k)})_{1 \leq j \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \mid (2) \text{ が成立する} \}$$

をゲルファント-ツェトリン錐体（Gelfand-Zetlin cone）という．上の系は n 次実対称行列全体の集合

$$\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid {}^{\mathrm{t}}A = A\}$$

から $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ への写像 $A \mapsto (\lambda_j^{(k)})_{1 \leq j \leq k \leq n}$ の像が C に含まれることを意味する．

$$
\begin{array}{ccccc}
\lambda_1^{(3)} & & \lambda_2^{(3)} & & \lambda_3^{(3)} \\
& \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & \\
& & \lambda_1^{(1)} & &
\end{array}
$$

図 1: $n = 3$ の場合のゲルファント・ツェトリンパターン

2.2 表現論やグラフ理論との関わり

ゲルファント-ツェトリンパターンは一般線形群の表現論と関係がある．実際，非負整数が並ぶゲルファント-ツェトリンパターンはヤング図形のある条件を満たす単調減少列を表していて，$\lambda = (\lambda_1^{(n)}, \cdots, \lambda_n^{(n)})$ が表すヤング図形の半標準盤と 1 対 1 に対応する [28]．

実数が並ぶゲルファント-ツェトリンパターンはゲルファント-ツェトリン系と呼ばれる可積分力学系と関係がある [10, 18, 19]．じつは，交錯定理の主張 (1), (2) はエルミート行列に対してもそのまま成立する．したがって，エルミート行列の空間

$$\mathrm{Herm}(n) = \{A \in M(n, n, \mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

から $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ への写像 $A \mapsto (\lambda_j^{(k)})_{1 \leq j \leq k \leq n}$ の像も $C(n)$ に含まれる．さらに，実数の組 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ に対して上の写像を

$$O_\lambda = \{A \in \mathrm{Herm}(n) \mid A \text{ の固有値は } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \text{ である }\}$$

に制限したものはゲルファント-ツェトリン多面体（Gelfand-Tsetlin polytope）と呼ばれる多面体

$$\Delta_\lambda = \{(\lambda_j^{(k)})_{1 \leq j \leq k \leq n-1} \mid (2) \text{ が成り立つ }\} \quad (\lambda_j^{(n)} = \lambda_j \text{ とみなす})$$

への全射になる [10, 18]．この写像 $\phi_\lambda : O_\lambda \to \Delta_\lambda$ によって O_λ に可積分力学系の構造が入る．この可積分力学系はポアソン幾何学や表現論・幾何学的量子化の観点から関心を集めたが，直交多項式系 [26] とも密接に関連している [18]．

これらとまったく別の方向の応用にグラフ理論がある．辺に向きを指定しないグラフは無向グラフと呼ばれるが，無向グラフには隣接行列やラプラシアン行列と呼ばれる実対称行列が付随する [29]．これらの行列の固有値（スペクトル）によってグラフの性質を研究する分野をスペクトルグラフ理論という [31]．グラフの 1 つの頂点を取り除いたグラフに対する隣接行列は元のグラフの隣接行列から同じ番号の行と列を除去したものになる．交錯定理によって，それらの行列の固有値の間には交錯関係が成り立つ．このことはある種のグラフを研究する際の手がかりになる．

3　Cauchy の 1829 年の論文

3.1　2 次形式に対する条件付き極値問題

Cauchy は n 変数の 2 次形式

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$$

（A_{ij} は実数値で対称性 $A_{ij} = A_{ji}$ をもつとする）に対する拘束条件

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \tag{3}$$

の下での極値問題から出発する[2]．ラグランジュ未定乗数法を適用すれば（Cauchy はここで自著 *Leçons sur le calcul infinitésimal* を引用している），$f(x_1, \cdots, x_n)$ が極値（実際には停留値）を取る点の方程式として

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - s x_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{4}$$

が得られる．s はラグランジュ未定乗数である．いうまでもなくこれは実対称行列 $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$ に対する固有値問題であり，s が固有値，x_i を縦に並べたベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^{n}$ が固有ベクトルになる．

Cauchy は (4) を

$$\begin{aligned} (A_{11} - s)x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= 0, \\ A_{21}x_1 + (A_{22} - s)x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + (A_{nn} - s)x_n &= 0 \end{aligned}$$

と書き直して，$x_1, \cdots, x_n$ を消去した方程式

$$S = \begin{vmatrix} A_{11} - s & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - s & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} - s \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

を得た．ただし，ここでは説明の都合で行列式を縦線で表す記法を使っているが，Cauchy は行列式を表す特別な記法を使っていない．その代わりに S の定義を言

[2] 原論文では変数を $x, y, \cdots$ と表しているが，ここでは $x_1, x_2, \cdots$ に変えた．その他の記号や記法も今日風に改めた．

葉で説明している．Cauchy はここで自著 *Analyse algébrique* を引用しているが，Hawkins [11] によれば，1815 年の論文 [3] で展開した行列式論がここに生かされている．実際，後で述べるように，Cauchy は固有ベクトルの記述にも行列式を用いている．

S は今日では特性多項式あるいは固有多項式と呼ばれている[3]．(5) の解（すなわち S の根）が得られれば，(4) の $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 以外の解を求めてそれを $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ で割り算することによって，(3) を満たす $x_1, \cdots, x_n$ が得られる．ただし，その大前提として，$s, x_1, \cdots, x_n$ は実数でなければならない．こうして S の根が実数であるかどうかが問題になる．

3.2 固有ベクトルに関する考察

固有値が実数であることを示す前に，Cauchy は固有ベクトル，すなわち (4) の解についていくつかの事実を指摘している．その 1 つは相異なる固有値に対する固有ベクトルの「直交関係」である．Cauchy は S の相異なる 2 つの根 s, s' に対して，対応する (4) の解 $x_1, \cdots, x_n$, $x'_1, \cdots, x'_n$ の間に

$$\sum_{j=1}^{n} x_j x'_j = 0 \tag{6}$$

という等式が成立することを注意している．その証明は今日の線形代数の教科書に書いてあるものと同じである．x_j, x'_j が実数であれば，これはそれらを並べたベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ が直交することを意味する，ただし，x_j, x'_j が実数値でなければ，これは本来の直交関係ではない．ちなみに，いうまでもないことではあるが，Cauchy の論文では「直交」や「ベクトル」という言葉も使われていない．

もう 1 つの指摘は (5) の行列式の第 1 行の成分の余因子 $(-1)^{j-1}\Delta_{1j}$, $j = 1, \cdots, n$（Δ_{ij} は (5) の行列式から第 i 行と第 j 列を除去した小行列式を表す）が (4) の 1 つの解を与えるという事実である．すなわち，$S = 0$ のもとで

$$\begin{aligned}
x_1 &= \begin{vmatrix} A_{22} - s & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} - s & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} - s \end{vmatrix}, \\
x_2 &= -\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{33} - s & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} - s \end{vmatrix}, \\
&\ \vdots
\end{aligned} \tag{7}$$

[3] 特性多項式という呼び名は Cauchy が定数係数線形微分方程式の指数函数解を論じた論文 [6] で導入した特性方程式（équation charactéristique）に由来すると思われる．

は (4) を満たす[4]．こうして行列式表示をもつ固有ベクトルが得られる．S の重根に対してはこれを定数倍したもの以外の固有ベクトルが存在するが，そのことは Cauchy の意識の外にある．

3.3　補助多項式列

(7) の x_1 の表示に現れた行列式を Cauchy に従って R と表す：

$$R = \begin{vmatrix} A_{22}-s & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33}-s & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn}-s \end{vmatrix}$$

これは行列 A から第 1 行と第 1 列を除去した行列（それも実対称行列であることに注意されたい）の特性多項式である．興味深いことに，Cauchy はこれで終わりにせず，引き続いて同じ形の一連の主小行列式

$$Q = \begin{vmatrix} A_{33}-s & A_{34} & \cdots & A_{3n} \\ A_{43} & A_{44}-s & \cdots & A_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n3} & A_{n4} & \cdots & A_{nn}-s \end{vmatrix}, \cdots$$

を導入して，S の根が実数であることや根の配置の説明に利用している．

3.4　固有値に対する考察

S のすべての根が実数であることの証明は，S のある根 s が虚数であると仮定して，矛盾を導くやり方で行われている．S は実数係数の多項式であるから，s が虚数であれば，その複素共役 $\bar{s}$ も S の根である．Cauchy は s に対して (7) の形で得られる (4) の解と $\bar{s}$ に対して同様に得られる (7) の解が互いに複素共役であることに注目する．すなわち，前者を $x_1, \cdots, x_n$ とすれば，Δ_{1j} は s の実数係数多項式であるから，後者は $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ となる．$s \neq \bar{s}$ と仮定しているから，すでに述べた「直交関係」(6) によって

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \bar{x}_j = 0$$

が成り立つ[5]．これは $x_1 = \cdots = x_n = 0$ を意味する．今日の線形代数ではここで「固有ベクトルは $\mathbf{0}$ ではないから，これは矛盾である」として証明を終えるところだ

[4] Cauchy は x_3 の符号を間違えている．この間違いはその後の計算にも影響しているが，幸いにして訂正可能なものにとどまる．

[5] エルミート内積に関して $\boldsymbol{x}$ がそれ自体と直交することを意味している．

が，Cauchy はここから奇妙な論法を展開する．すなわち，$\Delta_{1j}=0$ $(j=1,\cdots,n)$ から出発して，$R, Q, \cdots$ がそれぞれ 2 つの互いに複素共役な根を持つこと，特に $A_{nn}-s$ が 2 つの根を持つこと（明らかな矛盾）を示す．今日の線形代数では (7) の表示をもつ固有ベクトルに頼らず，とにかく s を固有値とする固有ベクトル $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ を 1 つ選ぶ．その複素共役 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が $\bar{s}$ を固有値とする固有ベクトルであることはただちにわかるので，上の直交関係によって $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ となり，$\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ と矛盾する．

このようにして S の（したがって同じ形の行列式である $R, Q, \cdots$ の）すべての根が実数であること（主結果 Théorème 1 の前半）を示してから，Cauchy はそれらの間の位置関係の考察に進む．その鍵となるのは s の任意の値に対して

$$R=0 \implies QS=-\Delta_{12}^2 \tag{8}$$

が成り立つという事実である．右辺の行列式は (7) の x_2 の表示に現れている．(8) は (7) を (4) に代入して得られる恒等式からわかる．特に，s が実数値の場合には

$$R=0 \implies QS\leq 0 \tag{9}$$

が成り立つ．Cauchy はこれらの事実を用いて S, R, Q の根の間に交錯関係が成り立つことを示しているが，その詳細[6]はやや煩雑なのでここでは省略する．実際には例外的な状況を除外しながら考察を進めるので，最終的結果（Théorème 1 の後半）は S, R, Q が重根を持たない場合に限定される．$n=3$ の場合にその結果を図示すれば，図 2 のようになる．すなわち，

1. R の 2 根は S の 3 根の間に 1 つずつある．
2. Q の根は R の 2 根の間にある．

これは図 1 のゲルファント-ツェトリンパターンと同じ形をしている．ただし，ゲルファント-ツェトリンパターンでは左に向かって数が大きくなるので，それとは左右が逆である．

Cauchy は S, R, Q の根の間に重なりが生じるような例外的な場合も気にしていて，その場合を扱う処方も論じている．

3.5　2 次形式の標準形

論文の後半では 2 次形式の標準形への変換を論じている．S が相異なる n 個の根 $s_1,\cdots,s_n$（いずれも実数）をもつ場合には，それぞれに対応してノルムが 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)}$（いずれも実ベクトル）が得られる．直交関係 (6) によってこれらは互いに直交するので，正規直交系をなす．ちなみに，これらは 2 次

[6] $n=3$ の場合には S, R, Q の具体的な形がわかるので，それを利用する．$n\geq 4$ の場合は (9) を用いて帰納法で説明する．ただし，Cauchy は帰納法とは言わず，$n=4$ の場合を説明して，$n\geq 5$ の場合も同様であると言ってすませる．

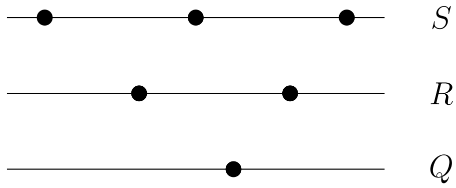

図 2: $n=3$ の場合の根（黒丸で表している）の位置

曲面や剛体の主軸とみなせる．変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ をこれらのベクトルの線形結合として

$$\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n \tag{10}$$

と表して f に代入すれば，平方項のみからなる表示

$$f = s_1 \xi_1^2 + \cdots + s_n \xi_n^2$$

が得られる．これが論文の 2 番目の主結果（Théorème 2）である．(10) は $x_1, \cdots, x_n$ と $\xi_1, \cdots, \xi_n$ の間の線形変換を定めるが，これは直交変換であり，Cauchy は逆変換がただちに求められることを注意している．

このように，Cauchy は 2 次形式の条件付き極値問題のいわば副産物として 2 次形式の標準形への変換を説明しているが，序文で述べたように，その動機は 2 次曲面や剛体運動の問題に関する先行研究にあったと思われる．ただし，Cauchy は S が重根を持つ場合については明確な説明を避けている（微小変形によって根の重複を外して云々，ということを言っているが，説得力はない）．S に重根がある場合を扱えないのは応用上不便であるが，Cauchy は固有ベクトルとして (7) のように表せるものしか考えていないので，その場合は扱えなかったのである．

3.6　ある特殊な場合についての注意

Cauchy は A が特殊な形

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_{i1} = A_{1i} \quad (2 \le i \le n), \tag{11}$$

すなわち第 1 行と第 1 列を除去すれば対角行列になる場合についても論じている，この場合には

$$\frac{S}{\prod_{i=2}^{n}(A_{ii} - s)} = A_{11} - s - \sum_{i=2}^{n} \frac{A_{1i}^2}{A_{ii} - s}$$

という等式が成り立つ．この等式の右辺の有理函数のグラフを描いてみればわかるように，この有理函数は $A_{22}, A_{22}, \cdots, A_{nn}$ を端点とする区間（右端と左端は半無限）のそれぞれに 1 個ずつ零点をもつ．それらは S の根とみなせる．他方，左辺の分母は R に等しいので，R の根は $A_{22}, \cdots, A_{nn}$ である．こうして S, R の根の交錯関係が視覚的に理解できる．

Cauchy は指摘していないが（気がついていたのかもしれない）この例は一般の場合の交錯関係を証明する準備として利用できる．与えられた実対称行列 A に対して，第 1 行と第 1 列を除いた小行列 A' を対角化するような直交行列 T' を用いて

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T' \end{pmatrix}$$

という行列（これも直交行列になる）を構成すれば，相似変換 $A \to T^{-1}AT$ によって A は (11) の形に帰着するが，A の特性多項式は変わらない．これらのことに注意すれば，固有値に重複がない場合の交錯関係が示せる．固有値に重複がある場合には，行列を微少変形して固有値の重複を解消し，極限移行によって元の行列を復元する，という議論（Cauchy も漠然とした形で言及している）を注意深く行うことによって交錯関係を導くことができる [15].

4 Sturm の 1829 年の論文

4.1 一般化固有値問題

Sturm が考察したのは次のような一般化固有値問題である：

$$\sum_{j=1}^{5} (g_{ij} r + k_{ij}) V_j = 0 \quad (i = 1, \cdots, 5) \tag{12}$$

係数の g_{ij}, k_{ij} は実数値で i, j について対称

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}$$

であるとする．r が固有値変数である．この方程式は

$$\sum_{j=1}^{5} \left(g_{ij} \frac{du_j}{dt} + k_{ij} u_j \right) = 0 \quad (i = 1, \cdots, 5)$$

という微分方程式の指数函数解 $u_j = V_j e^{rt}$ を求める際に現れる[7].

[7] Cauchy の 1840 年の論文 [6] も同じ考え方で定数係数線形微分方程式（偏微分方程式の場合も含む）から代数方程式を導出している．

行列とベクトル

$$G=(g_{ij})_{i,j=1}^{5},\quad K=(k_{ij})_{i,j=1}^{5},\quad \boldsymbol{V}=(V_i)_{i=1}^{5}$$

を用いれば，上の方程式は

$$(Gr+K)\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0} \tag{13}$$

と表せる．この方程式に $\boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{0}$ の解が存在するような r の値を求めるのが一般化固有値問題である．G が単位行列である場合には本来の固有値問題になる．Sturm は G を係数行列とする 2 次形式が正定値である場合を考えているので，G とそのすべての主小行列は正則行列である．今日の線形代数を使えば，このとき G を

$$G={}^{\mathrm{t}}RR\quad（R\text{ は上三角行列}）$$

というように分解して（コレスキー分解と呼ばれる），$\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{W}=R\boldsymbol{V}$ に変換することによって，(13) を普通の形の固有値問題

$$r\boldsymbol{W}=H\boldsymbol{W}\quad(H=-{}^{\mathrm{t}}R^{-1}KR^{-1})$$

に書き直すことができる．

4.2　固有値に対する方程式と補助多項式列

Sturm は (12) から未知数 $V_1,V_2,\cdots$ を順に消去して $QV_5=0$（Q は r の 5 次多項式）という形の方程式を導出し，固有値に対する方程式として $Q=0$ を得た．Cauchy は行列式を用いて未知数の消去を一気に行うが，Sturm は行列式を使わずにこの素朴な手順で r に対する方程式を求める[8]．Sturm の説明はわかりにくいが，少し考えれば気がつくように，Sturm の消去法は (13) の係数行列に対して

- $(1,1)$ 成分の下側を消す
- $(2,2)$ 成分の下側を消す
- $(3,3)$ 成分の下側を消す
- $(4,4)$ 成分の下側を消す

というように行基本変形を行う掃き出し計算にほかならない．これによって (13) は

$$\begin{pmatrix} L & * & * & * & * \\ 0 & M & * & * & * \\ 0 & 0 & N & * & * \\ 0 & 0 & 0 & P & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q \end{pmatrix}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$$

[8] そのために，簡単すぎず複雑すぎない 5 変数の場合を例として選んだようである．

という形に変形される．これが $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{0}$ という解を持つためには $Q=0$ であればよい．L, M, N, P, Q はそれぞれ 1 次，2 次，3 次，4 次，5 次の多項式であり，$Gr+K$ の小行列式・行列式として

$$L = g_{11}r + k_{11}, \quad M = \begin{vmatrix} g_{11}r + k_{11} & g_{12}r + k_{12} \\ g_{21}r + k_{21} & g_{22}r + k_{22} \end{vmatrix},$$
$$N = (\text{略}), \quad P = (\text{略}), \quad Q = \begin{vmatrix} g_{11}r + k_{11} & \cdots & g_{15}r + k_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{51}r + k_{51} & \cdots & g_{55}r + k_{55} \end{vmatrix}$$

と表せる．小行列式の取り出し方が異なるが，これらは Cauchy が用いた補助多項式列と概念的に同じものである．Cauchy の補助多項式列に相当するものを得るには，(12) に対して上方に掃き出し計算を行って，係数行列を下三角行列に変形すればよい．

4.3 論文の主結果

Sturm は主結果をいくつかの「定理」（Théorème と明示せず，段落に分けているだけなので，少しわかりにくい）として述べている．主張の要点は以下のとおりである．ただし，必要ならば Q, P, N, M, L に適宜 -1 を乗じて，いずれも最高次係数が正であるようにしておく．また，2 番目の主張では Q, P, N, M, L の末尾に任意の正定数 G を付け加えた多項式列 Q, P, N, M, L, G を考える[9]．

1. Q, P, N, M, L の根はすべて実数であり，相異なる[10]．各多項式の根で区切られた区間には直後の多項式の根が 1 個ずつある．ただし，その根が区間の端点に来ることも起こり得る．

2. 任意の実数 A に対して，$r = A$ における Q, P, N, M, L, G の値の符号変化の回数 $V(A)$ は $r > A$ における Q の根の個数に等しい．ただし，符号変化の回数を数えるときには 0 の値は無視する．また，任意の実数の対 $A < B$ に対して，$V(A) - V(B)$ は $A < r < B$ における Q の根の個数に等しい．

3. 前項の後半の設定において，Q の後のある多項式，たとえば N が $A < r < B$ にわたって一定符号値を取る場合には，Q, P, N, M, L, G の代わりに Q, P, N に関して同じ主張が成り立つ．

符号変化（原文では “variation”）とは $\pm a \to \mp b$ $(a, b > 0)$ のように値が変わることをいう．なお，ここでは説明をわかりやすくするために符号変化の回数（原文

[9] 論文では逆順に並んでいるが，もう 1 つの補助多項式列と比較するためにこの順序で考える．
[10]「相異なる」という主張は誤りである．これは引用した Laplace の論文の誤った主張を Sturm が真に受けたことによる．

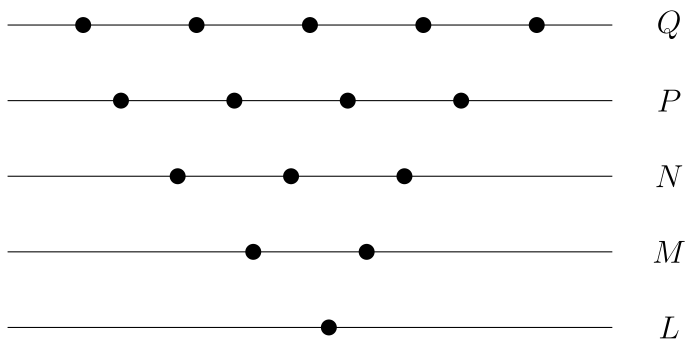

図 3: Q, P, N, M, L の根（黒丸で表している）の位置

では “le nombre des variations”）を $V(A)$ という記号で表しているが[11]，Sturm は特別な記号を用意していない．

主張 1 は Q, P, N, M, L の根がすべて実数であって図 3 に示すような交錯関係にあるということを述べている．P, N, M, L は A から同じ番号の行と列を順次除去して得られる小行列の特性多項式であるから，これは Cauchy が示したのと実質的に同じ内容である．主張 2 と主張 3 は Cauchy の論文にはないものだが，図 3 のような図を描いて，適当に選んだ A, B に対して $V(A), V(B)$ を求めてみれば，たしかに主張どおりの状況であることがわかる．

Sturm はこれらの「定理」を述べた後,「2 つの異なる証明を与える」と書いて説明を始めるが，その説明はまったく要領を得ない．Sturm が本当にこれらの「定理」を証明したのかどうかはわからない．

4.4 1829 年のもう 1 つの論文との比較

上に紹介した主結果の後半（主張 2 と主張 3）は同じ年に先行して発表された論文 [22] の主結果（多項式の実根の個数に関する Sturm の定理）とよく似ている．そこでは，実係数多項式 $f = f(x)$（最高次係数は 1 とする）が重根を持たないという仮定の下で，$f_0 = f$ とその導函数 $f_1 = f'$ からユークリッド互除法

$$f_{k-1} = g_k f_k - f_{k+1}, \quad \deg f_{k+1} < \deg f_k$$

によって定数函数 $f_m = \mathrm{GCD}(f, f') \neq 0$ に到る多項式列 $f_0, f_1, \cdots, f_m$ を構成する．上の割り算の等式の右辺第 2 項に負符号を乗じていることによって，これらの多項式の最高次係数は正値になる．このとき主定理は次のことを主張する：

1. $x > A$ における f の根の個数は $f_0(A), f_1(A), \cdots, f_m(A)$ の符号変化の個数 $V(A)$ に等しい．また，f の $A < x < B$ における根の個数は $V(A) - V(B)$ に等しい．

[11] 高木の本 [27] にならった記号である．

2. $f_0, \cdots, f_m$ の中の f_k が $A < x < B$ において一定の符号を持つならば，$f_0, \cdots, f_k$ に対して前項後半の主張が成り立つ．

こうして，補助多項式（les fonctions auxiliaires）はまったく異なるが，瓜二つの根の個数の公式が得られる，というのが 2 つの論文の主張である．論文 [22] は上の主張の証明を省いていて，後に証明と一般化を与える論文 [24] が書かれた．

ちなみに，G, K が 3 重対角行列

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

であれば，Q, P, N, M, L はいわゆる 3 項間漸化式を満たす．一般の $n \times n$ の 3 重対角行列[12]の場合も同様である．3 項間漸化式を満たす補助多項式列は論文 [24] の一般化された Sturm の定理の条件を満たすので，3 重対角行列を考えることは前項で紹介した Sturm の主張 2 と主張 3 を正当化するためのアイディアになり得る．

5 その後のさまざまな研究

5.1 Jacobi, Sylvester, Borchardt, Hermite

Jacobi [16] は Cauchy[4] による 2 次形式の標準形への変換を詳しく再検討し，それを多重積分の計算に応用した．そこでは直交変換の概念も一般的に定式化している．また，行列式の概念と性質についてもかなり詳しく説明し，直交行列の行列式の値が ± 1 であることや特性多項式の係数を行列式として明示的に表す公式

$$\begin{aligned} \det(A - gI) = \det A - g \sum_{i_1 < \cdots < i_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_{n-1} i_1} & \cdots & a_{i_{n-1} i_{n-1}} \end{vmatrix} + \cdots \\ + (-g)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + (-g)^{n-1} \end{aligned} \tag{14}$$

（a_{ij} は A の成分，I は単位行列）も指摘している．多重積分の変数変換自体にも行列式（ヤコビ行列式）が関わる．Jacobi は後に，おそらくこのような行列式の知識を集大成するために，行列式の一般理論 [17] をまとめている．ちなみに，Jacobi

[12] そのような行列が直交多項式系の理論に現れることは注目に値する．直交多項式系は 3 項間漸化式を満たしていて，その係数から定まる 3 重対角行列の主小行列の特性多項式とみなせる．したがって，直交多項式系に対してよく知られている根の交錯関係 [30] は 3 重対角行列の主小行列の固有値の交錯関係としても理解できる [18].

は2次形式の特別な場合（Cauchy が扱ったものとは異なる）を例として取り上げて，特性多項式の根を有理函数の零点として論じている．

Sylvester[25] は実対称行列の固有値がすべて実数であることに新たな証明を与えた[13]．実数であることの証明はそれほど難しい問題ではないので，このような別証明を考える意義はそれ自体としては薄い．しかしながら，Sylvester の証明は行列式計算の技巧を凝らしたもので，その計算技巧は興味深い．Sylvester の証明の鍵は

$$\det(A-\lambda I)\det(A+\lambda I)=\det(A^2-\lambda^2 I)$$

という恒等式である．これは行列の積の行列式に対するコーシー-ビネ公式 [3] を正方行列の場合に使って得られる．A^2 の特性多項式を

$$g(\lambda)=\det(A^2-\lambda I)=c_n-c_{n-1}\lambda+\cdots+(-\lambda)^{n-1}c_1+(-\lambda)^n$$

と表せば，A の特性多項式

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda I)$$

とその λ を $-\lambda$ に置き換えた多項式との積は

$$f(\lambda)f(-\lambda)=g(\lambda^2)=c_n-c_{n-1}\lambda^2+\cdots+(-1)^{n-1}c_1\lambda^{2n-2}+(-1)^n\lambda^{2n}$$

と表せる．上に示した公式 (14) によれば，この多項式の係数は A^2（その成分を b_{ij} と表す）の小行列式の和として

$$c_m=\sum_{i_1<\cdots<i_m}\det(b_{i_p i_q})_{p,q=1}^m$$

表せる．さらに，$(b_{i_p i_q})_{p,q=1}^m$ が A から $i_1,\cdots,i_m$ 行を取り出した $m\times n$ 行列とその転置の積に等しいこと

$$(b_{i_p i_q})_{p,q=1}^m=(a_{i_p j})_{1\le p\le m,1\le j\le n}\,{}^{\mathrm{t}}(a_{i_p j})_{1\le p\le m,1\le j\le n}$$

（A の対称性によって $a_{i_p j}=a_{j i_p}$ となる）に注意すれば，その行列式はコーシー-ビネ公式によって

$$\det(b_{i_p i_q})_{p,q=1}^m=\sum_{j_1<\cdots<j_m}\left(\det(a_{i_p j_q})_{p,q=1}^m\right)^2$$

と表せる．こうして c_m は

$$c_m=\sum_{i_1<\cdots<i_m,\,j_1<\cdots<j_m}\left(\det(a_{i_p j_q})_{p,q=1}^m\right)^2$$

と表せるが，これは実数の平方和なので，非負値である．Sylveser はこのことと多項式の実根の個数に関するデカルトの符号律[14]を用いて，$f(\lambda)$ の根が実数である

[13] この論文はいわゆる慣性律についても論じている．

[14] 高木の本 [27] の第 18 節を参照されたい．

ことを説明している．ちなみに，Sylvester はこの論文の脚注で，Borchardt がこれと同様の行列式計算と多項式の実根の個数に関する Sturm の定理 [22] によって実対称行列の固有値が実数であることを示した，と言い添えているが，それに該当すると思われる Borchardt の論文 [1, 2] は肝心の結論を導く部分の論理が欠落していてあまり評価できない．

Hermite [12] は 2 次形式・実対称行列に対する Cauchy と Sturm の 1829 年の結果がエルミート形式・エルミート行列（もちろんそういう言葉は使っていない）へ拡張できることを指摘している．これは全部で 3 ページの短い論文であり，今後への問題提起や発表予定論文の予告を目的として書かれたものに見える．論文の前半では特性多項式の根が実数であることの証明がいろいろあり得ることを注意している．その 1 つとして Borchardt の方法というもの（説明はない）を掲げているが，それが上に述べた論文 [1, 2] を指すとすれば，Hermite の言っていることはあまりあてにならない．また，Sturm の定理 [22] の類似がエルミート行列の主小行列の特性多項式の列についても成り立つと述べているが，これも根拠が定かではない．論文の後半ではエルミート形式の数論への応用や，複素係数多項式が複素領域の曲線の内側に持つ根の個数の問題（当時は Cauchy の研究がよく知られていた）との関係を論じている．脚注では Borchardt 宛ての手紙の記録 [13] を引用しているが，この手紙はこの根の個数の問題を詳しく論じているようである．

Borchardt は Jurnal für reine und angewante Mathematik（通称 Crelle 誌）の編集者を勤めた時期があり，さまざまな数学者と交流があったようである．しかし，上で触れた論文に限らず，Borchardt 自身の論文には詰めが甘いものが多いように感じられる（拙著 [29] の付録 A を参照されたい）．それはともかくとして，Hermite の全集 [14] を見ると，Hermite から Borchardt に宛てた手紙の記録は先述のもの [13] 以外にもいくつかあることがわかる．Hermite の論文 [12] では Borchardt を "mon ami M. le D$^{\mathrm{r}}$ Borchardt" と呼んでいて，両者の間に親交があったことが窺える．

5.2 Poincaré の分離定理と Courant の min-max 定理

Poincaré は微分方程式の固有値問題に関して Poincaré の分離定理と呼ばれるものを示した [20]．これは固有値が取り得る範囲を与える不等式であり，行列の固有値問題にも通用する．その後，固有値をミニマックス（min-max）定理の形で表す Courant のミニマックス定理 [7, 8]（Fisher と Weyl の名前を付すことも多い）が見出され，それに基づいて交錯定理が証明されるようになった．ミニマックス定理自体はヒルベルト空間上のコンパクトエルミート作用素にまで一般化されている．

Cauchy は実 2 次形式

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

の単位球面

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}, \quad \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}$$

の上の極値問題から固有値問題 (4) を引き出したが，厳密な意味で極値（極大あるいは極小）となるのは最大固有値 λ_1 と最小固有値 λ_n だけである．中間の固有値を極値として捉えるには，S ではなくて，S と $\mathbb{R}^n$ のある次元の線形部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ との交わり $V \cap S$ の上で極値問題を考える．正確に言えば，上から k 番目の固有値 λ_k は

$$\lambda_k = \max_{\dim V = k} \min_{\boldsymbol{x} \in V \cap S} Q(\boldsymbol{x})$$

というように表せる．すなわち，k 次元部分空間 V との交わり $V \cap S$ の上の最小値を V について（言い換えればグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(m, n)$ の上で）最大化することによって λ_k が得られる．さらに，A を $-A$ に，k 次元部分空間を $n-k+1$ 次元部分空間に置き換えれば，$-A$ の $n-k+1$ 番目の固有値 $-\lambda_k$ に対して同様の表示が得られる．それを言い換えれば，λ_k に対するもう 1 つの表示

$$\lambda_k = \min_{\dim V = n-k+1} \max_{\boldsymbol{x} \in V \cap S} Q(\boldsymbol{x})$$

が得られる．これがミニマックス定理としての固有値の捉え方である．

A の同じ番号の行と列を除去した行列 A' は単位行列から同じ番号の行を除去した $(n-1) \times n$ 行列 Q によって $A' = QA\,{}^{\mathrm{t}}Q$ と表せる．Q は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^{n-1}$ への射影を表す行列とみなせる[15]．これを一般化して，$Q\,{}^{\mathrm{t}}Q = I$ という条件を満たす $m \times n$ 行列 Q に対して $A' = QA\,{}^{\mathrm{t}}Q$ を考えれば，A の固有値 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ と A' の固有値 $\lambda'_1 \geq \cdots \geq \lambda'_m$ に対して

$$\lambda_j \geq \lambda'_j \geq \lambda_{n-m+j}$$

という交錯関係が成り立つ．ここでは説明を省くが，固有値のミニマックス表示を用いてこの不等式を証明することができる．

5.3　交錯定理の線形代数的証明再論

3.6 節で指摘したように，固有値に重複がない場合の交錯定理は行列を 3.6 節で論じた形 (11) に部分的に対角化することによって証明できる．これはエルミート行列の場合にも通用する論法である [15, 18]．固有値に重複がある場合には，行列をうまく微少変形して固有値の重複を解消し，変形を戻す極限移行において交錯関係が保たれることを示せればよい．Hwang[15] はそのような方針でエルミート行列の場合の交錯定理を証明した．

[15] これは正方行列としての射影行列とは異なる．Q に対応する射影行列は単位行列の該当する行の成分をすべて 0 にしたものである．

Fisk[9] は掲載誌の 1 ページに収まる証明を与えた．n 次エルミート行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} A' & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}^* & d \end{pmatrix}$$

というようにブロック分けする．A' は $n-1$ 次エルミート行列，$\boldsymbol{c}$ は $n-1$ 次元複素列ベクトル，d は実数値のスカラーである．さらに実数パラメータ α を導入して，A を

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} A' & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}^* & d+\alpha \end{pmatrix}$$

と変形したものを考える．A_α の最下行を $(\boldsymbol{c}^* \;\; d)$ と $(\boldsymbol{0} \;\; \alpha)$ の和とみなせば，A_α の特性多項式は最下行に関する線形性によって

$$\begin{aligned} \det(A_\alpha - \lambda I) &= \det(A - \lambda I) + \det \begin{pmatrix} A' - \lambda I & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \det(A - \lambda I) + \alpha \det(A' - \lambda I) \end{aligned}$$

と表せる．A_α, A, A' はエルミート行列であるから，左辺と右辺の 2 つの行列式はいずれも λ の多項式として実根のみもつ．ここで Fisk は Rahman と Schmeiser の本 [21] [16]から次の定理（Theorem 6.3.8）を引用して，$\det(A - \lambda I)$ と $\det(A' - \lambda I)$ の根が交錯関係にあると結論する．

定理　実係数の多項式 f, g の根が交錯関係にあるための必要十分条件は任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $f + \alpha g$ の根がすべて実数となることである．

これは見事な証明であり，交錯定理の新たな側面を明らかにしている．ただし，引用している定理の証明も合わせれば，1 ページには収まらない．また，じつは Rahman と Schmeiser の本 [21] の Theorem 6.3.8 は $f, g, f + \alpha g$ が重根を持たないことを仮定している．この定理がその場合に限られるとすれば，Fisk の示したものは交錯定理のまったく一般的な場合の証明とはいえない．実際，Hwang [15] の証明は固有値に重複がある場合を扱うためにかなりの工夫を凝らしている．

6　まとめ

今日の線形代数の教科書では，実対称行列の固有値が実数であることはほんの数行で説明される簡単な事項である．教科書では引き続いて固有ベクトルの正規直交系を導入し，それらを並べた直交行列によって実対称行列を対角化する．対

[16] この本の第 10 章は Decartes の符号律や Sturm の定理をはじめとして，多項式の根に関するさまざまな定理を紹介している．またこの章の 10.7 節の “Notes” はそれらの定理の歴史的背景も詳しく解説していて非常に参考になる．

応する2次形式はこの直交行列による変数変換によって標準形に変換される．それはそれで重要である．しかし，この問題を初めて取り上げたCauchyとSturmは固有値の交錯関係という今日の教科書とはまったく異なる視点からこの固有値問題を考えた．

CauchyとSturmはそれぞれ2次形式と微分方程式という異なるテーマから実対称行列の固有値問題に取り組んだ．Cauchyは論文の末尾に，Sturmから同じ結果をきわめて簡明な方法で証明することができたと聞いた，と書き記している．そのような事情から，惑星運動の永年摂動というSturmの研究の背景がCauchyの論文の表題に反映されることになったのだろうが，論文の本文はこの表題とほとんど関係がない．ただし，Sturmの話を聞いてCauchyが主結果の内容や証明を考え直した，という可能性も否定はできない．他方，Sturmは自身の論文ではCauchyの名にまったく言及していない．Sturmの論文は主結果をきわめて明確に述べているが，その証明はほとんどないに等しい．Sturmがどのように証明したのか，そもそも証明を持っていたのか，ということはよくわからない．

CauchyとSturmが論じたことは，彼ら自身も含めて，後の数学者のさまざまな研究につながった．特にJacobiはCauchyが見出した2次形式の標準形と直交変換の概念をより完全な形で定式化し，多重積分の計算に利用した．また，HermiteはCauchyの結果をエルミート形式に拡張するとともに，SturmやCauchyによる多項式の根の個数の捉え方を見直した．20世紀に入ると，Poincaréの分離定理やCourantのミニマックス定理が登場し，固有値の交錯関係はそれらの大きな枠組みの中で理解されるようになった．他方では，近年になって，本来の線形代数的枠組みの中での証明もHwangやFiskらによって行われた．1980年代以降，固有値の交錯定理は表現論，可積分力学系，直交多項式系，グラフ理論などの研究の中で生き続けている．

参考文献

[1] C. W. Borchardt, Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hilfe man die saecularen Storungen der Planeten bestimmt, J. reine. angew. Math. **30** (1846), 38–45.

[2] C. W. Borchardt, Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvemeut des planètes, J. math. pures. appl. 1er série, **12** (1847), 50–67.

[3] A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, Journal de l'École polytechnique **10** (1815), Oeuvres (Gauthier-Villars, 1891), série 2, tome 1, 91–169.

[4] A. L. Cauchy, Sur l'équation a l'aide de laquelle on determine les inégalites séculaires des mouvements des planètes, Exercices de mathématiques quatrième année (Paris, 1829), 140–160.

[5] A. L. Cauchy, L'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide, et sur diverse équations du même genre, Mémoires de l'Académie des sciences **9** (1830), Oeuvres (Gauthier-Villars, 1891) serié 1, tome 2, 79–81.

[6] A. L. Cauchy, Mémoire sur l'integration des équations linéaires, Exercices d'analyse et de physique mathématique (Paris, 1840), tome 1, 53–100.

[7] R. Courant, Zur Theorie der kleinen Schwingungen, Z. angew. Math. Mech. **2** (1922), 278–285.

[8] R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, erster band, Springer Verlag 1924. R. クーラン・D. ヒルベルト（藤田宏・高見頴郎・石村直之訳），数理物理学の方法，上，丸善出版 2013，第 1 章 1.4 節.

[9] S. Fisk, A very short proof of Cauchy's interlace theorem for eigenvalues of Hermitian matrices, Amer. Math. Monthly **112** (2005), 118.

[10] V. Guillemin and S. Sternberg, The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds, J. Func. Anal. **52** (1983), 106–128.

[11] T. W. Hawkins, Cauchy and the spectral theory of matrices, Historia Mathematica **2** (1975), 1–29.

[12] C. Hermite, Remarque sur un théorème de M. Cauchy, Comptes Rendus Acad. Sci. **41** (1855), 181–183.

[13] C. Hermite, Extrait d'une léttre de Mr. Ch. Hermite de Paris à Mr. Borchardt de Berlin sur le nombre des racines d'une équation alg´brique comprises entre des limites données, J. reine. angew. Mathematik **52** (1856), 39–51.

[14] C. Hermite, Oeuvres de Chares Hermite, Gauthier-Villars, 1905–1917.

[15] S.-G. Hwang, Cauchy's interlace theorem for eigenvalues of Hermitian matrices, Amer. Math. Monthly **111** (2004), 157–159.

[16] C. G. J. Jacobi, De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas tranformandis, quae solis quadratis variabilium constant, una cum variis theorematis de tranformatione et determinatione integralum multiplicium, J. reine. angew. Math. **12** (1834), 1–69.

[17] C. G. J. Jacobi, De formatione et proprietatibus Determinantium, J. reine. angew. Math. **22** (1841), 285–318.

[18] B. Kostant and N. Wallach, Gelfand-Zeitlin theory from the perspective of classical mechanics. I, Progr. Math, vol. 243 (Birkhauser, 2006), 319—364.

[19] B. Kostant and N. Wallach, Gelfand-Zeitlin theory from the perspective of classical mechanics. II, Progr. Math, vol. 244 (Birkhauser, 2006), 387–420.

[20] H. Poincaré, Sur les équations aux dérivés partielles de la physique mathématique, Amer. J. Math. **12** (1890), 211–294.

[21] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, Analytic theory of polynomials, London Mathematical Society Monographs New Series, vol. 26, Oxford, 2002.

[22] C. F. Sturm, Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques, Bulletin de Férussac **11** (1829), 419–422.

[23] C. F. Sturm, Extrait d'un mémoire sur l'intégration d'un systèm d'équations différentielles linéaires, Bull. des sciences mathématiques **12** (1829), 313–322.

[24] C. F. Sturm, Mémoire sur la résolution des équations numériques, Mémoires divers présentés par des savants étrangers **6** (1835), 273–318.

[25] J. J. Sylvester, A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares, Philosophical Magazine **4** (1852), 138–142.

[26] 青本和彦，直交多項式入門，数学書房 2013.

[27] 高木貞治，代数学講義改訂新版，共立出版 1965.

[28] 高崎金久，線形代数と数え上げ（増補版），日本評論社 2021.

[29] 高崎金久，線形代数とネットワーク，日本評論社 2017.

[30] 時弘哲治，工学における特殊関数，共立出版 2006.

[31] 吉田悠一，スペクトルグラフ理論 — 線形代数からの理解を目指して，サイエンス社 2024.