# 17世紀初の変分問題
## ー Fermatの光学研究を例として ー

四日市大学関孝和数学研究所　但馬亨
torutajima@07.alumni.u-tokyo.ac.jp

## 1．「最小作用の原理」起源の正当な評価

17世紀科学革命期において変分問題は多くの数学者たちによって解かれる格好のテーマとして取り扱われてきた．その口火を切ったのは，17世紀半ばピエール・ド・フェルマ(Pierre de Fermat, 1607-65)による屈折光学の問題であり，もともとは光学的な問題関心から生じたものであった．いわゆる俗説的な意見として，変分原理は，著名な動力学(Dynamics)の問題である最速降下線の問題が先駆けであるとする間違った認識が流布しているが，最速降下線の議論はガリレオ・ガリレイ(Galileo Galilei, 1564-1642)による問題提起は別とすると，主として17世紀後半にアイザック・ニュートン(Sir. Isaac Newton, 1642-1727)，ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) ヨーハン・ベルヌリ(Johann Bernoulli, 1667-1748)らによって展開されたものであり，変分問題の始まりとしては上述のFermatの光学研究を無視して議論することはできない．[1]本研究ではこの最初期の変分問題の様態を原文読解から理解することによって，数理物理学の普遍的方法の成立過程を解明する．

## 2．「変分」の語源

そもそも変分(variation)という言葉の由来は，Leonhard Eulerの1756年の作品

---

[1] フェルマーという長母音の表記はフランス語としては誤っているが現代でも多くの数学者が好んで用いている名称である．おそらく英語訛りが前世紀末のアンドリュー・ワイルズの証明完成以降数学的啓蒙書等で広く流通してしまった影響である．またベルヌーイというフランス語的発音もよく流通しているがこれも本当は誤りで，一族の本拠地である国際交易都市バーゼルの現地人に聞き取りをした結果，ベルヌリという発音の方が一般的であることが分かった．詳しくは『数学史辞典』（丸善書店）の関連記事を参照のこと．

『変分計算原論』(*Elementa Calculi Variationum*)による．当時問題解法に幾何学的記述も混在させていたEulerは，Joseph Louis Lagrangeの純粋な解析的方法の導入に触発されて，この問題群の代数解析化を推し進める．他にも，同時代的にはPierre Louis Moreau de Maupertuisの研究が知られるが，本論の主題ではないので言葉の最初期の使用者の言及にここではとどめておく．

## ３．等周問題：幾何学問題としてのギリシア的起源

名称こそ存在していないが，数学的な起源として変分法はその最も古い事例を古代ギリシア幾何学に見出すが，代表的な人物としてゼノドロス(Zenodorus, ca. 200-140. B.C.)やパッポス(Pappus, ca. 300 A.D.)を挙げることができる．しかし，これらの研究は，17世紀以降の変分問題が変化量を対象にした近代物理学的関心の中から出来上がった点とは異なっており，等周問題という純粋に幾何学的問題関心から生じているので，本論の主題とは異なるのであまり深い言及はしない．ただしゼノドロスの研究についてはあまり認知されていな珍しいものなので，ごくごく簡単に触れておく．現在では失われている著作『等周図形について』において，以下の定理を記述したという伝承が残っている．（[Heath 1981], pp 207-213）[2]

1. 外周が等しいすべての正多角形のうち，面積が最も大きいのは角が最も多い正多角形である．
2. 円は等しい輪郭のどの正多角形よりも大きい．
3. 辺の数が同じで周囲が等しいすべての多角形の中で、正多角形と正三角形は面積が最も大きい．
4. 面が等しいすべての立体図形の中で，球形が最も立体量が大きい．

---

[2] 最新の数学史原点集成である[Katz and Montelle 2024]の P. 468 に以下の記述がある．``Zenodorus (ca. 200–140 BCE) wrote a work titled On Isoperimetric Figures. It ispreserved only in the works of Theon (4th c. CE), in hisCommentary on Ptolemy's *Syntaxis*, and Pappus's *Collection*. The central goal of this work is to discover which of all plane figures with the same perimeter has the largest area.''

繰り返しになるが，変分法の歴史に関する，最大で最も精密な研究書である[Goldstein 1980]でも以下の様に記載されている．

ゼノドロス（紀元前200年頃）やパッポス（西暦300年頃）が保存したものなどギリシア数学者による一連の等周問題に戻っていたとしても，それは理にかなったことだったであろう．［しかし]，これらの問題は最小時間の幾何学的原理によって解かれているので，私は[彼らの研究に]戻ることはなかった．[3]

つまり，問題の数学的有意義性については否定することはないが，近代的意味での微積分学に代表される代数演算のアルゴリズムとしての取り扱いを古代の等周問題は受けていないので，この問題の始祖としては見做されていないのである．したがって本論でもこの意見を踏襲することとする．

## ４．端緒としてのフェルマによる光学研究

変分原理の光学における第一の応用例はフェルマによって1661からその翌年にわたって見いだされた．その歴史上はじめての表現箇所は後述するとして，まず以下にその原理の内容をまとめておく．これは『 光は，最小時間で到達できる経路（光学的距離が最短になる経路）を自ら選んで進む 』となるものだが，ここでいう光学的距離とは何を指すかというと，光が実際に進む幾何学的距離$L$に屈折率nを乗じたもの（=n$L$）を指す．

---

[3] *It would not have been unreasonable if I had gone back to the set of isoperimetric problems by Greek mathematicians such as Zenodorus (c. 200 B.C.) and preserved by Pappus (c.300 A.D.). I have not done this since these problems were solved by geometric principle of least time.* [Goldstein 1980], vii.

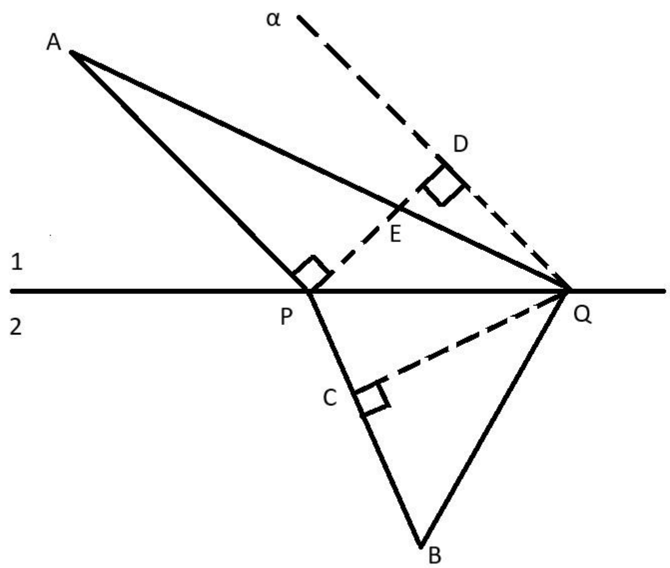

Fig. 1：フェルマの原理

いま，Fig. 1のように，媒質1, 2 の中の2点間ABを光が進むとき，屈折の法則を満たす経路をAPB，満たさない経路をAQBとする．AP//αQ，PD⊥αQ，QC⊥PBとなるようなα, C, D をとると，PD は入射波面，CQ は屈折波面なので，光がDQ を進む時間とPC を進む時間は等しい．Fig. 1よりAP<AE，DQ<EQ，CB<QBなので，光が経路APBを進む時間は，AQB を進む時間より短く最短時間の経路であり，屈折の法則に対してここでフェルマの原理が成立する．

ここで，変分法の最初期の記述を精密に取り出してその解釈をつけておきたい．フェルマによるデカルトの擁護者であるクレルスリエに宛てた書簡1662年5月21日, Tom. II, p.483）の記述を訳出すると以下のようになる．

根本的問題として，ド・ラ・シャンブル氏にもあなたにも，私は自然の奥義を理解しているふりをしているわけでも，そしてこれまでもしたこともない，と何度も申し上げているかと存じ上げます．自然には私には理解することができない不明瞭で隠された方法があります．もし必要であれば，屈折の主題について幾何学的な手助けをほんの少し行いました．しかし，あなたが私に保証してくださったよ

うに，自然はそれなしでも自分の問題に対処でき，デカルト氏が自然に定めた道を行くことに十全としているので，私は喜んで，私が自然学を征服したとされるものをあなたに譲ります．そして，あなたが私にこの完全に純粋で抽象的な幾何学的問題をもちつづけることを許してくれたことに満足しています．この方法によって，われわれは2つの異なる媒体を通って移動し，できるだけ早くその動きを完了させようとたくらむ運動物[mobile]の経路を見つけることができるのです．[4]

　この文章全体に含まれる数学史的意味は，数学を超えて自然哲学，デカルト的機械論などその拡散する射程はきわめて広大なものでありかつ複雑に入り組んでいる．さらに言えばデカルトの光学的研究という当時のドミナントな知的文脈の理解がなければ何一つ解釈できないところなので，ここで短絡的に片付けず，後年の研究対象として一旦留めておくことにするが，それでも重要な一点として強調すべきことは何かというと，最速降下線に代表される17世紀後半の力学的分野の考察に先立って「光学」の問題でフェルマは変分法の研究を開始したことであろう．

## ５．スネルの法則とフェルマの関連研究

　つづいて，このフェルマの原理から導かれる系としてスネルの法則についてふれる．媒質Aにおける波の速度を$\boldsymbol{v_A}$，媒質Bにおける波の速度を$\boldsymbol{v_B}$，媒質Aから媒質Bへの入射角（屈折角）を$\boldsymbol{\theta_A}$，媒質Bから媒質Aへの入射角（屈折角）を$\boldsymbol{\theta_B}$とすると，

[4] Pour la question principale, il me semble que j'ai dit souvent et à M. de la Chambre et à vous que je ne prétends ni n'ai jamais prétendu être de la confidence secrète de la Nature. Elle a des voies obscures et cachées que je n'ai jamais entrepris de pénétrer ; je lui avois seulement offert un petit secours de géométrie au sujet de la réfraction, si elle en eût eu besoin. Mais puisque vous m'assurez, Monsieur, qu'elle peut faire ses affaires sans cela et qu'elle se contente de la marche que M. Descartes lui a prescrite, je vous abandonne de bon cœur ma prétendue conquête de physique, et il me suffit que vous me laissiez en possession de mon problème de géométrie tout pur et in abstracto, par le moyen duquel on peut trouver la route d'un mobile qui passe par deux milieux différents et qui cherche d'achever son mouvement le plus tôt qu'il pourra. Cf. 全集版の17世紀的綴法に忠実に引用した．

$$\frac{\sin\theta_A}{\sin\theta_B} = \frac{v_A}{v_B} = n_{AB}$$

となる．なおここでいう$n_{AB}$とは，媒質Aに対する媒質Bの相対屈折率を表す．

以上がスネルの法則の要点であるが，実に17世紀半ばまででではスネルの法則はホイヘンスの原理とフェルマの原理双方から導出できた．さらに17世紀後半になるとライプニッツによって微分方程式の問題に帰着されるようになる．

さて，このスネルの法則に関わるフェルマの研究は重要なものが2種類ある．両者ともフェルマが1662年に同僚のマラン・キュロー・ド・ラ・シャンブルに宛てた手紙の付録として準備されたものであり，一つは「屈折の解析，Analysis ad Refractiones」(*Œuvres de Fermat*, tome I, pp. 170-172)，そしていま一つは「屈折の総合，Synthesis ad Refractiones」(*Œuvres de Fermat*, tome I, pp. 173-179)である．これらテキストの目的はスネルの法則の導出という，フェルマの原理の最初期の実用的応用例であった．ここでは，このスネルの法則に関わる記述例を一つ引用して解説を与える．

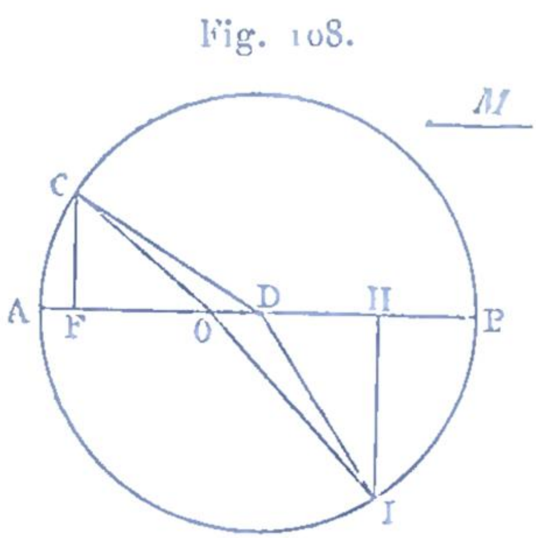


Fig. 2「屈折の解析」 from *Œuvres de Fermat*, tome I, p. 170.

まず，Fig. 2において，Dを中心とし，光学密度の異なる2つの媒質ACBとAIBからなる円ACBIを考える．光線は上側の希薄な媒質中の点Cから出発し，破断した光線

COIに沿って界面ADBを横切り，密度の高い媒質中の点Iまで移動すると仮定する．また図には外側の線分Mもある．

フェルマの考察は以下のようにまとめられる．まずMの長さとは希薄な媒質における光の抵抗の尺度で，DFの長さが濃い媒質における抵抗の尺度であると仮定し，それらが共通の比例係数で比例するとさらに仮定する．さらに，彼は「抵抗」(resistentia)という語を速度の逆数という意味で使っている．

これらを前提として，問題は「光線がCからOを経由してIに移動する時間が最小になるように点Oを見つけること」と先の書簡で示されたフェルマの原理の適用が数学的に考察される．

半径CDをN，線分DFをB，DHをAとする（FとHはCとIからABへの垂線の足）．そして，時間の最小値は，フェルマ（p.171）の表記によれば，「N in M＋N in B」(現代風には$N \cdot M + N \cdot B$)．$DO = E$とおいて余弦定理を利用すると，

$$CO^2 = N^2 + E^2 - 2BE,\ OI^2 = N^2 + E^2 + 2AE.$$

したがって最小化すべき量は，

$$CO \cdot M + IO \cdot B = M\sqrt{N^2 + E^2 - 2AE} + B\sqrt{N^2 + E^2 + 2AE}$$

となる．フェルマはつづいて上式は 「私の極大と極小の方法」で扱われると述べるが，実際，全集版にある著名な「極大極小に関する方法」の9論文に収録される．また，点Oは線分AB上に位置しその際，$CO \cdot M + IO \cdot B$が最小になる．このようにして，原理の応用を実際の問題の適用においても欠かさず検証するのがフェルマの用意周到な個性であるように思われる．

## ６．3種の視学の集まりとしての光学と同時代の研究

さて，これまでフェルマの個別具体的な記述を精密な1次文献の読解によって展開してきたが，もう一つ科学史的に重要な方法論がある．それは，同時代の研究者がどのようなアプローチで同一の問題について取り組んできたか，そしてそれをど

の程度情報共有して，同業他者が考察していたか，という問題である．複合的なビジョンを獲得して，当時の光学にかかわる変分法の問題が見えてくるのである．[5] ということで，現在のわれわれがOpticsと呼称する場合，直行光学，反射光学，屈折光学等の光学現象すべてを含んで表現するが，この用法はギリシア由来の伝統的な学問分類としてはそもそも一般的ではなかった．正しくは以下の分類に従う．

1. 直行光学：optica<opticus(*Lat.*)<ὀπτικος(*anc. Gr.*)
2. 反射光学：catoptrica<catoptricus<κατοπτρικος
3. 屈折光学：dioptrica<dioptricus<διοπτρικος

まず，第一の直行光学だが，そもそも対象から光が目に到達し見えるのでなく，目から視線が放たれて対象に到達することで視覚が機能するという理論がエンペドクレスやプラトンなど古代ギリシア世界から優勢であり，この考え方は17世紀まで残存することになる．光についての学ではなく，この場合視学と訳すのが妥当となる．扱われる対象は直行する光にまつわる光学現象に限定されるものであった．つづいて，反射光学，屈折光学であるが，それぞれギリシア語でもラテン語でも別々の表現をもっており，10世紀のイブン・アル・ハイサムのような外部光が目に到達することの理解者といった卓越した例外はあるものの，Opticaとは区別されるものであった．こうして，三種の光学現象を束ねて現代風の意味としてOptica, Opticsが使用されたのは，ニュートンの*Opticks* (1704)以降である．内容自体はニュートンの青年期である1660年代から継続している一連の研究の集大成で

[5] 科学史研究において最も重要な方法論は何かというと，他者の解釈や翻訳に頼ることなく，対象とした数学者，科学者の研究そのものに最も肉薄した原論分，原著作を読み解くことである．かりに二次文献を幾ら大量に集め読解しても，また仮に丹念に翻訳しても，それは解釈の解釈に過ぎない訳であるから，所詮歴史学研究の本質とは成り得ない．ましてや解釈に満ちた二次文献の翻訳など，自然言語処理，自動翻訳の技術が高まっている昨今においてほとんど価値をもたないし，かといって一次文献も同様に機械翻訳等で安易に分析可能かというと，該当の時代の膨大なコーパスならびにその解釈がついていない状況では，正当な意味を与えられない，単なる逐語訳にしかならない訳であるから，これは未だ機械化できず，歴史研究者の精査を要求するところと言える．また歴史的文脈を解さない安易な二次文献の乱造は古代末期や中世アラビア数学においての偽書のように，今も昔も研究に益ではなく害すら齎すことがある．原典の読解は歴史学では重要な方法論である．

あり，ここでは深く言及しないが，先行ならびに同時代の研究をまとめて列挙する．

1. Willebroad Snell (1580-1626)　オランダの数学者，天文学者，自然哲学者，ライデン大学教授，スネルの法則の発見は1621年．
2. René Descartes(1596-1650)　*La dioptrique*(1637)ではスネルへの言及がないが，デカルトは引用先をほとんど書かないので，実際は見ている可能性高い．
3. Thomas Harriot(1560-1621)　1602年頃すでにスネルの法則を見つけているとされる．しかも系統的な実験で実証も行っている．

これらの人物がフェルマの同時代人ならびに直接的影響を与えた可能性の高い人物であるが，先のニュートンを除いてもう一人後世の人物として，フェルマの光学研究に強い関心を示したものがいる．それはライプニッツに他ならない．

## ７．フェルマのライプニッツへの影響

　日本におけるライプニッツ研究は前世紀の終わりに，数学や自然哲学関連では，下村寅太郎氏の尽力があり完成した，工作舎の『ライプニッツ著作集第一期「数学・自然学」論文集』での卓越した先行研究がある．そちらにも収録されているが，とりわけ横山雅彦，西敬尚両氏の「光学，反射光学，屈折光学の唯一の原理(Unicum opticae, catoptricae, et dioptricae principium, 1682)」の翻訳ならびに解説（528-539頁）には十分に信頼できる高い精度があるので，先述した内容とも重複する部分があるが，引用してみたい．

（フェルマは）1662年に「屈折に関する分析」(Analysis ad refractiones, tome.1, pp.170-172)と「屈折に関する総合」(Synthesis ad refractiones, tome.1, pp.173-179)を執筆した．その中で彼は，二つの均質な透明媒質の境界面での光の屈折は両媒質中での光の通過時間が最短となるような仕方で生じるといういわゆる「最短時間の原理」を仮定して，この原理から屈折の法則を導出した．これは数学的にはライプニッツの観点と同等な観点であり，ライプニッツはフェルマから大きな示

唆を受けたものと思われる．

　ただし物理的には両者の解釈は正反対である．すなわちフェルマは光の速度が媒質の屈折率（抵抗）に反比例するとみなしたのに対して，ライプニッツは光の速度が屈折率（抵抗）に正比例するとみなしたのである．（532頁解説）

　すなわちフェルマは，$c$を光速とすると，

① 屈折率$\propto$物質の密度　→　②屈折率$\propto c^{-1}$　→　③物質の密度$\propto c^{-1}$

で表される推論を行ったのに対して，ライプニッツは②'屈折率$\propto c$　→　③'物質の密度$\propto c$という誤った結論に至っていることが理解できる．総じて双方の考えの違いは，より密度の大きな媒体に侵入した後にフェルマが減速と捉えるのに対して，ライプニッツは加速するという対照的な結果となった．このように，現象理解としてはフェルマの方が正しいが，ライプニッツは後に屈折法則を微分方程式の問題に還元することに成功し，「極大・極小」の問題関心もフェルマから忠実に継承しているので，フェルマ研究の忠実な後継者であったと考えらえる．さらには，最速降下線問題解法への貢献もライプニッツならではの業績である．

## ８．結びとして

　フェルマの方法は，古来より自然哲学（natural philosophy）的対象とされたものを数学的に扱った変分問題のはじまりといえる．同時代の先端的テーマであるスネルの法則を無限小幾何学の分析を基に導出しようとした事例であり，より上位の原理を置くことによって，応用範囲の格段に広い変分問題の世界を切り開くこととなった．最速降下線等，力学上の変分問題が得てして強調されがちであるが，正当な最初期の問題関心はあくまでもこのフェルマの光学問題であり，やがてこの極大・極小のテーマはライプニッツ以降オイラー，ラグランジュに至るまで順当に継承されていく．（了）

引用文献＆web：

文献：

・[Dijksterhuis 2004]:
Fokko Jan Dijksterhuis, *Lenses and Waves: Christiaan Huygens and the Mathematical Science of Optics in the Seventeenth Century*. Archimedes. Vol. 9, Kluwer, 2004.
・[Goldstein 1980]:
Herman H. Goldstein, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer-Verlag, New-York, 1980.
・[Heath 1981]:
Thomas Little Heath, *A History of Greek Mathematics,* Volume II. Dover publications, rep. 1981.
・[Katz and Montelle 2024]:
Edited by: Victor J. Katz and Clemency Montelle, *Sourcebook in the Mathematics of Ancient Greece and the Eastern Mediterranean*, Princeton University Press, 2024.
・[Sabra 1967]:
A. I. Sabra, *Theories of Light from Descartes to Newton*, New-York, 1967.
・[ライプニッツ 2019]:
下村寅太郎・原亨吉等監修『ライプニッツ著作集』第１期（３）数学・自然学, 新装版, 2019.

Web関連：

・スネルの法則のフェルマ, ホイヘンス双方の原理からの導出方法：
https://www.optics-words.com/kogaku_kiso/snells-law_2.html
・最小作用の原理, ホイヘンスの原理などの歴史を専門家がまとめた文章を, 広範囲に収録したサイト：
http://theendoftakechan.web.fc2.com/ell/hitsuge/integral/index.html