

Pattern Theory の視点でみた実現象

田中紀子, 松原望, 森本栄一

1. Pattern Theory とは？

1.1 本論の目的

現実の自然の生（なま）の現象（real-world の真意から「実現象」とよぶ）の世界は常時変動し一回限りのものであって、決して同一の繰り返しはない。このような変動性を扱うのは確率論およびそれを測る統計学以外には見出せない。例えばどんな現象もこれより小さい同様の独立な確率的変動の和からできている、いいかれば、どんな現象も無限分解可能 infinite divisibility, ID という確率論の基本的性質が観察される ([13][16][26])。この概念を見出したのはフランスの Lévy である（前回発表）。Lévy は確率論の目的を実現象の変動性の中に見いだしている。David Mumford はこの学的伝統の流れの中で 2010 年の Pattern Theory [21]において（とりわけ以下の第 6 章）実現象の分析を試みている。そこでは様々な数学の道具が使われているが、今回、wavelet などを扱っている部分の周辺領域を中心に紹介し、Mumford の視点から考察する。

1.2 Pattern Theory 概要

「Pattern Theory」のサブタイトルは「実世界の信号の確率的分析 Stochastic Analysis of Real-world Signals」である。実の現象の世界は変動し、一回限りのものであり、変動性を扱うのが確率論およびそれを測る統計学である。この考え方にたって、現象からの信号（自然科学の信号）を分析するアプローチが Mumford の Pattern Theory である。章立ては次である。

- 1 章 英語テキストとマルコフ連鎖
- 2 章 音楽と区分的ガウス性
- 3 章 文字認識とシンタクスの分類
- 4 章 画像構造のセグメント化とギブスモデル
- 5 章 顔と弾力性鋳型
- 6 章 自然科学とマルチスケール型分析

我々の興味を持っているのは、このうちの 6 章であり、6 章の説は下記である。

- 6.1 High Kurtosis in the Image Domain
- 6.2 Scale Invariance in the Discrete and Continuous Setting
- 6.3 The Continuous and Discrete Gaussian Pyramids
- 6.4 Wavelets and the "local" Structure of Images
- 6.5 Distributions Are Needed
- 6.6 Basics XII : Gaussian Measures on Function Spaces
- 6.7 The Scale-, Rotation- and Translation-Invariant Gaussian Distribution

6.8 Model II: Images Made Up of Independent Objects

6.9 Further Models

6.10 Appendix: A Stability Property of the Discrete Gaussian Pyramid

6.11 Exercises

中心的に扱うのは 6.4 節の wavelet を用いた自然へのアプローチほかである。

2. Brown 運動

2.1 Fourier 解析

今回扱うのは自然現象の実現象中の時系列データ (Mumford は情報的視点から「信号」signal というがほぼ同意義と解する) あるいはイメージデータである。いずれも不規則性(stochasticity, あるいは確率性)の高い変動を示すが, もっとも進んだモデルはブラウン運動 (数学的には拡散過程が対応) である。実現象としてのブラウン運動は 2 次元であるが, 数学的には d 次元空間に値をとる t の連続関数の全体

$$W^d = \{w: [0, T] \rightarrow R^d; w \text{ は連続, } w(0)=0\}$$

をブラウン運動の径路の全体とする (確率論プロパーでは確率測度を導入後確率 1 (a.s) で連続とする接近もある[2][13][17][28]) 。

W^d で $|\cdot|$ をユークリッドノルムとして。

任意の $w_1, w_2 \in W^d$ に対し, sup ノルムで

$$\rho(w_1, w_2) = \max\{|w_1(s) - w_2(s)|; 0 \leq s \leq T\}$$

とおけば, ρ は

$$\rho(w_1, w_2) \geq 0, w_1, w_2 \in W^d$$

で次の 3 つの条件をみたす:

- (i) $\rho(w, w) = 0, w \in W^d$ 逆に $\rho(w_1, w_2) = 0$ ならば $w_1 = w_2$
- (ii) $\rho(w_1, w_2) = \rho(w_2, w_1)$
- (iii) 任意の 3 点 w_1, w_2, w_3 に対し

$$\rho(w_1, w_3) \leq \rho(w_1, w_2) + \rho(w_2, w_3)$$

したがって, ρ は距離の公理を満たし W^d は距離空間となる。

このブラウン運動ははじめて N. ウィーナーによって Fourier 解析により研究された。まずブラウン運動の定義は以下の通りである。

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n \leq T, B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \in \mathcal{B}(R^d)$$

をとり, 各 t_k での射影が B_k に属する $w(\cdot)$ を $B = B(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ とし, すべての B が生成する完全加法族を \mathcal{B} とする。

組 (W^d, \mathcal{B}) 上の写像 $P: \mathcal{B} \rightarrow R^1$ が確率の 3 条件

$$(P.1) \text{ 任意の } B \in \mathcal{B} \text{ に対して } 0 \leq P(B) \leq 1$$

$$(P.2) \text{ } P(W^d) = 1$$

$$(P.3) \text{ } \mathcal{B} \ni B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots \text{ で, かつ任意の } i \neq j \text{ に対し } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ ならば}$$

$$P(\bigcup_{n=1,2,\dots} B_n) = \sum_{n=1,2,\dots} P(B_n) \text{ (可算加法性)}$$

を満たすものとし、さらに

$$P(B(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n))$$

$$= \int_{B_1} g(t_1, 0, x_1) dx_1 \int_{B_2} g(t_2 - t_1, x_1, x_2) dx_2 \dots \times \int_{B_n} g(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_n$$

ただし

$$g(t, x, y) = e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} / (2\pi t)^{\frac{d}{2}}, \quad |x-y| = (x \text{ と } y \text{ の } R^d \text{ における距離})$$

であるとき、 P は「 d 次元ウィーナー測度」（あるいは「 d 次元ブラウン運動」）と呼ばれる。

コメント この表現は確率分布(正規性)として重要であるにも関わらず非常に分かりにくく現代的でない。今日では Brown 運動は「独立増分の仮定」「正規性の仮定」で特徴付けられるとする流れが定着している ([2][17]など)。

$d=2$ の場合。基底関数列を $n=1, 2, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} \Phi_{1,0}(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, & \Psi_{2,0}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \\ \Phi_{1,n}(t) &= \begin{pmatrix} \cos 2n\pi t - 1 \\ -\sin 2n\pi t \end{pmatrix} / 2n\pi, & \Phi_{2,n}(t) &= \begin{pmatrix} \cos 2n\pi t - 1 \\ \sin 2n\pi t \end{pmatrix} / 2n\pi \\ \Psi_{1,n}(t) &= \begin{pmatrix} \sin 2n\pi t \\ -\cos 2n\pi t - 1 \end{pmatrix} / 2n\pi, & \Psi_{2,n}(t) &= \begin{pmatrix} \sin 2n\pi t \\ \cos 2n\pi t - 1 \end{pmatrix} / 2n\pi \end{aligned}$$

としておき

$$X_{10}, Y_{10}, X_{km}, Y_{kn} \text{ ind. } \sim N(0, 1), \dots, \quad k = 1, 2, \dots, m, n = 1, 2, \dots$$

によって (ind は独立)

$$X(t) = X_{1,0}\Phi_{1,0}(t) + Y_{1,0}\Psi_{1,0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1,2} \{X_{j,n}\Psi_{j,n}(t) + Y_{j,n}\Psi_{j,n}(t)\}$$

とすると、2次元のブラウン運動のシミュレーションになる。

また、Payley-Wiener[24]は $x \in [0, 1]$ の一様乱数の確率積分変換から構成した標準正規確率変数の列

$$X_0(x), X_1(x), \dots, \text{ind. } \sim N(0, 1)$$

をもとに

$$tX_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} X_k(x) \int_0^t 2^{1/2} \sin(k\pi u) du$$

$$I(n) = \{k; 2^{n-1} \leq k \leq 2^n - 1\}$$

は t に関して一様に概収束してブラウン運動を定めることを示した。さらに Hunt [9] は二重和は \sum_n^{∞} だけに帰着することを示した。

なお、以上の二結果は原論文で当該部分を見出すことは難しいが伊藤[13]に要約されている。

2.2 「イメージ」の局所構造と wavelet

「イメージ」(Mumford の用語ではとりわけ自然に見いだされる視覚的イメージ) は、Chap.6.5 においては、無限分解可能という特色を有していた (前回報告)。

Chap.6.4 においては、イメージははっきりとそれとわかる *distinctive local elements* から成り立っていると想定されている。自然現象には大局では説明されない局所的な(local)細かい構造要素が固有にある。

それにふさわしいアプローチが wavelet である。wavelet とは wave+let で、-let で「小さい」を意味している。「小さい」とは、現象的に短時間に 0 から始まり 0 に終わるユニットが繰り返されることで、振幅も波長や振動数は一定せずまちまちで不規則である。人間の耳に届く聴覚データの細かい振動はこの例である。大ぶりの Fourier 解析よりは局所的構造を始めとして多様で技巧的な特色を持つ。地震波も単純な Fourier 解析では分析しきれない。その意味では、waveletこそ多様で不規則現象の分析に適し、数理科学よりは統計分析が扱う対象としている。

Mumford はこの wavelet に注目して自然イメージの構造を分析している。wavelet は後述するように Fourier 解析の代用版とみてよいが、必ずしもよく知られているわけではない（『数理科学事典』[34]には項目にないが『統計学辞典』[35]にはある）。確率論で指導的役割を果たしてきた池田信行「偶然の輝き[10]」は、ブラウン運動の研究に Fourier 解析を使ったのち wavelet にも注目して古典的 Haar 関数の利用をしている(pp91)。確率過程への応用としての wavelet 入門として優れているといえよう。

3. wavelet 変換

3.1 母 wavelet

wavelet 変換は、Daubechies(ドブシー) [4]によれば、データや関数、作用素を異なった周波数成分に分け[Fourier 解析に類似]、それぞれの成分をそのスケールに合った解像度で調べる tool である([]内追加)。wavelet 変換は、波の繰り返しの元になる基礎ユニットからはじまる。これを母 wavelet (mother wavelet) といい、それらしい関数が歴史的に何通りも提案されている。図 1 に掲げる Morlet[19], Meyer[18]に始まり、Mexican hat 関数

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-x^2) e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

など多く知られている。これは多項式とガウス型(正規分布型)関数によるが、他の例として Fourier 変換で知られる sinc 関数を用いた母 wavelet に

$$\psi(t) = 2\text{sinc}(2t) - \text{sinc}(t) = \frac{\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)}{\pi t}$$

もある(以下変数を t に変えた)。なお、wavelet よりはるか以前の Haar 関数[6]も数えていいであろう(後述および 6.)。

Mumford が当初導入したのはイメージ分析に使う 2次元で、独特の「ガウス差関数」(Difference of Gaussian, DOG)である。文字通り、二次元ガウス関数(独立な 2次元正規分布 $N_2(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$)の分散パラメータ σ^2 を変えた差であり、同心円の等高線の高さの差(正負)が同心円としてあらわれる(図 2)。

さらに詳しく解説しているのは Gabor 関数である。Gabor 関数は歴史的に遡り[5]、元来信号処理理論を扱っているが、後述のようにさまざまに改変されて、2次元イメージを分析し復元する filter として、現在よく知られる画像データ処理ソフト JPEG(Joint Photographic Expert Group)の大元の基礎理論となっている。

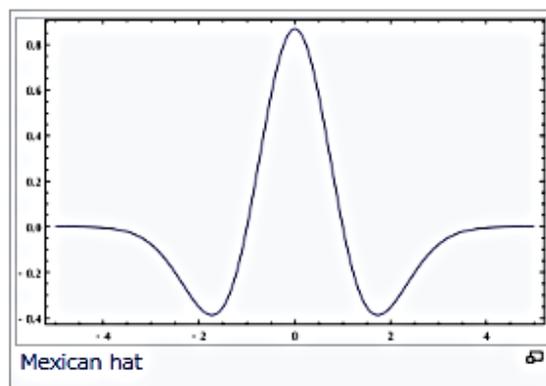
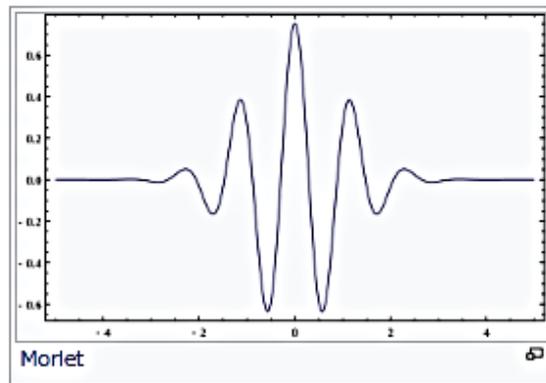
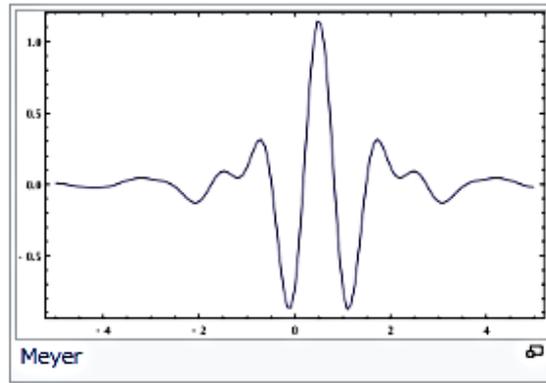


図1 母 wavelet 関数の例

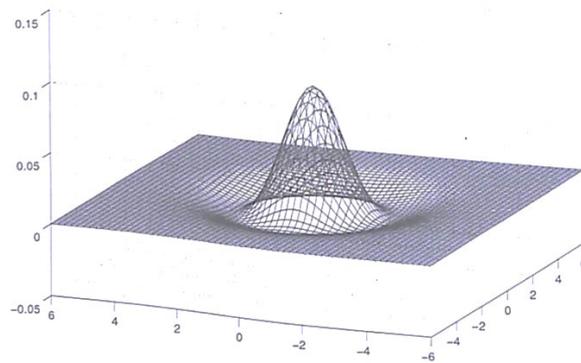


図2 Mumford の DOD 関数 Pattern Theory p 338 fig 6.10

wavelet の数学理論では、「波」の単位ユニット母 wavelet $\psi(x)$ を決めそれをさまざまに平行移動変換 (shift) あるいは伸縮の尺度変換をして (まとめて「アフィン変換」という) 多様な波を生成する基底 (base) とする。すなわち $\psi(x)$ のアフィン変換から生成した「子 wavelet」(child wavelet) の系

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right),$$

の最適線形結合で、信号データ $x_a(t)$ を表示する。もし系 $\{\psi_{a,b}(t)\}$ が Fourier 変換同様に正規直交系 Orthonormal system になっているなら (Haar 関数系ではその構成はむずかしくない), そのアナロジーで x の「wavelet 変換」を、正規直交系との内積表示で

$$WT_\psi\{x\}(a,b) = \langle x, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\psi_{a,b}(t)db$$

とすれば、 $WT_\psi\{x\}(a,b)$ で

$$x_a(t) = \int_{\mathbb{R}} WT_\psi\{x\}(a,b) \cdot \psi_{a,b}(t)db$$

のように $\psi_{a,b}(t)$ で表示される。

なお a, b を連続的に選ぶかわりに、 a, b を固定し、 m, n で選んで、子 wavelet を

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^m}} \psi\left(\frac{t - nba^m}{a^m}\right)$$

として m, n で離散的に

$$x(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, \psi_{m,n} \rangle \cdot \psi_{m,n}(t)$$

と表わすことも計算の実行上考えられる。

3.2 Haar 関数

説明例として、古典的に良く知られている Haar 関数[6]

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq x < 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

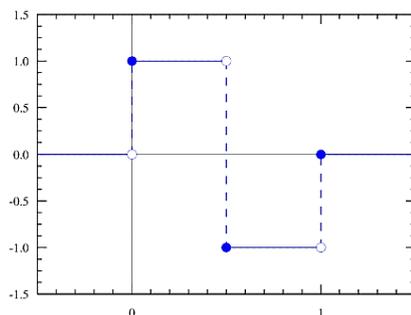


図3 Haar 関数

を母 wavelet に選ぶ。これを基礎として、 a, b を countable にとり、うまく

$$H((x-b)/a); a=\text{尺度パラメータ}, b=\text{位置パラメータ}$$

を生成すれば $\{H_{a,b}\}$ が L^2 の正規直交系とすることは関数がコンパクトな「台」(support, その上で 0 にならない集合) を持つことから操作的にも容易である。したがって、Fourier 解析同様の

signal の直交展開ができ、かつ Fourier 展開で可能でなかった微細な局所構造が明らかにできる。

実際 Haar 関数から生成される Haar 関数系は

$$H_n(x) = 2^{-j/2} H(2^j x - k), \quad n = 2^j + k, \quad \dots$$

のように系列化され、区間 $[k2^j, (k+1)2^j]$ の特性関数は、これら $\{H_n(x); n=0,1,2,\dots\}$ を

$j=0; H_1$

$j=1; H_2 H_3$

$j=2; H_4 H_5 H_6 H_7$

$J=3; H_8 H_9 H_{10} H_{11} H_{12} H_{13} H_{14} H_{15}$

のように並べてみると、同じ行にあるものは最初のを平行移動したもので、それらは全て同じ台をもつ関数である。

図4は、I.ドブシー「wavelet10 講 [4]」に掲載されている図である。詳細は略すが、二つの Haar wavelet が描かれ、“狭い”wavelet の台は“広い”wavelet が定数であるような区間に完全に含まれている。

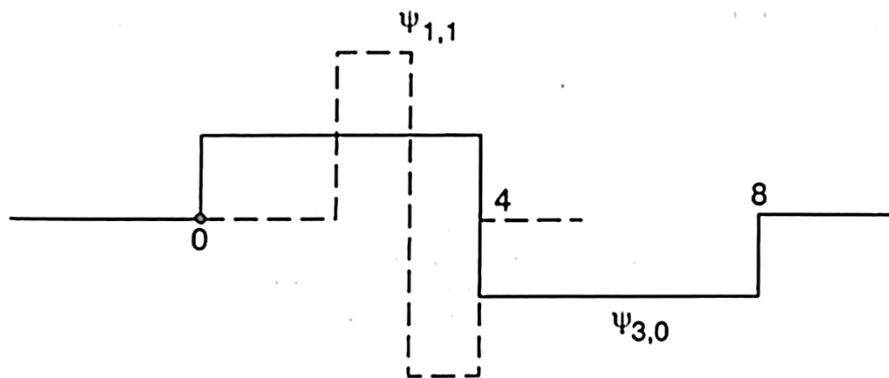
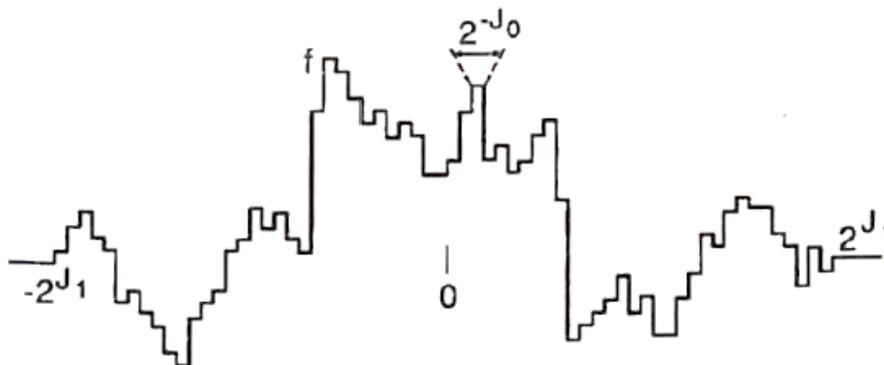


図4 Haar 関数の細部 ドブシー「wavelet10 講」 p.13 参照



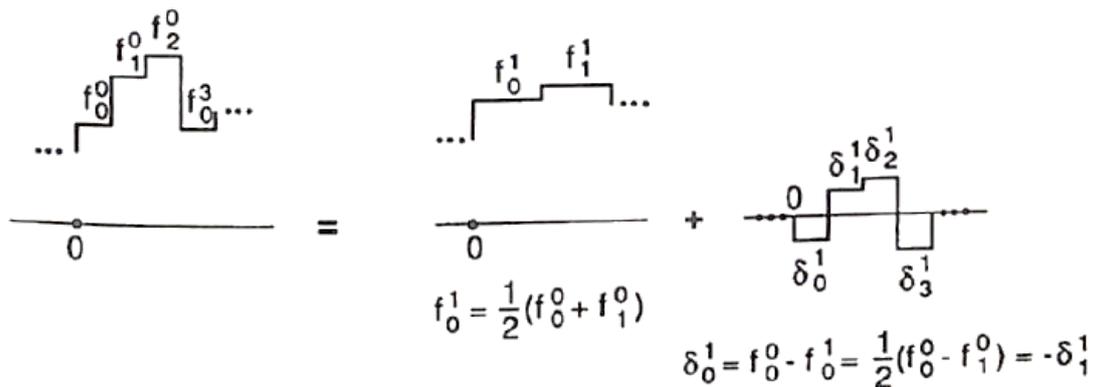


図5 Haar関数 $t=0$ の細部 トプシー『wavelet10 講』 p.15 参照

上図では台が $[-2^j, 2^j]$ であり, $[k2^j, (k+1)2^j[$ で区分的に定数となる関数 f , 3通りの下図は f の一部の拡大である。それぞれの区間の組について, f はそれらの上での値の平均に置き換えられる。 f と f^1 との差は δ^1 であり, これは Haar wavelet の線形結合である。

Haar 関数系の根拠はまた Brown 運動を構成できるという特徴づけにある。Haar 関数は $H(t)$ の各区分で, $1, -1, 0$ をそれぞれ $2t, 2(t-1), 0$ に置き換えたテント型関数を Δt とし, これを平行移動して

$$\Delta_n(t) = \Delta(2^j - k) \quad (j \geq 0, n = 2^j + k, 0 \leq k < 2^j)$$

とすると

$$\int_0^t H_n(u) du = \lambda_n \Delta_n(t), \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = 1/2^{1+j/2}$$

が容易に示せて

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) \lambda_n \Delta_n(t)$$

は $x(a.e.)$ において t について一様にブラウン運動に収束する。

3.3 Gabor 関数

Mumford はさらに 2次元の Gabor 関数[5] も詳細に扱っている (ただし完全に明瞭ではない)。1D, 2D とともに Impulse 応答として Gabor 関数はガウス関数と三角関数の積として定義されるが, 当初は 1D で, 図のようにサイン波 (a) (またはコサイン波) をガウス関数 (b) で包絡 (convolve) して Gabor 関数の応答 (c) ができ, 必要な位相の調整をすればたしかに母 wavelet になっている。

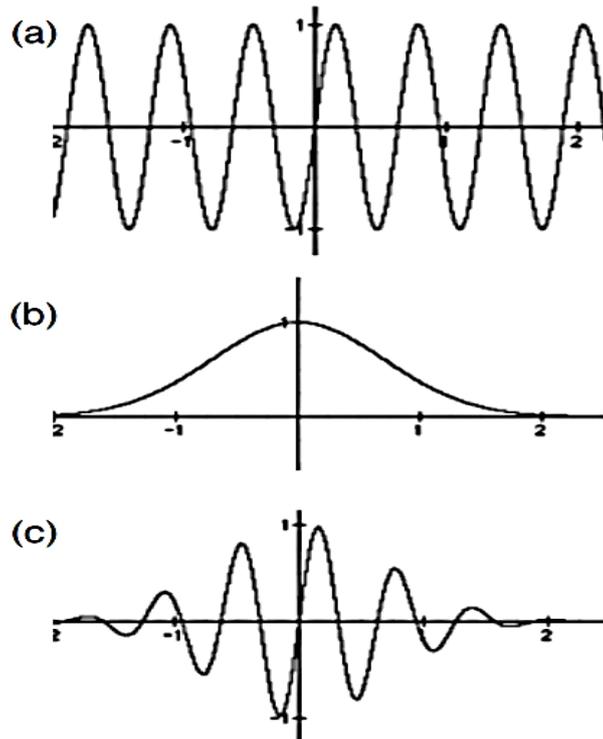


図6 1D Gabor 関数の構成

2D でも \mathbf{x} の関数である Gabor 関数は、 w をガウス関数、 s を三角関数として

$$g(\mathbf{x}; \mathbf{A}, \mathbf{u}, P) = K \exp(iP) w(\mathbf{x}; \mathbf{A}) s(\mathbf{x}; \mathbf{u})$$

で定義される。ここで K はガウス型の包絡面の強度のスケール、 \mathbf{A} は包絡面の軸の尺度と方向を指定する線形変換、 \mathbf{u} は搬送波の空間周波数と方向を表す波数ベクトル（各方向の波長の逆数）、 P は位相調整を表す。 \mathbf{A} が方向 θ が含むことは2つの次元 x, y が独立でなく関連する（斜め方向の）微妙な刺激応答を確保するためである。

式としては、2D の場合ガウス型の包絡曲面の方向 θ と各軸の尺度パラメータ σ_x, σ_y で

$$A(\theta, \sigma_x, \sigma_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y} \end{pmatrix}$$

として

$$(x', y') = (x, y) A(\theta, \sigma_x, \sigma_y) \text{ で}$$

から

$$w(x, y; A(\theta, \sigma_x, \sigma_y)) = \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2}\right)$$

$$s(x, y; \mathbf{u}) = \exp(2\pi i(x, y) \cdot \mathbf{u})$$

と表す。実部と虚部に分けた表現は

$$\text{Re } g(x, y) = K \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2}\right) \cos(2\pi f x' + P),$$

$$\text{Im } g(x, y) = K \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2}\right) \sin(2\pi f x' + P).$$

最後に生物の視覚細胞の応答特性は、Gabor 関数でよく記述されることが知られており、人間の視覚系においても空間周波数別に視覚刺激を認識している([30])。ここまでは wikipedia *Gabor filter* による。Pattern Theory で扱われている Gabor 関数の表現では

$$Gab_{\sigma,\theta,even} = R_{\theta} \circ S_{\sigma} \left(\cos(\kappa, x) - e^{-\frac{\kappa^2}{2}} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+(y/2)^2)}$$

$$Gab_{\sigma,\theta,odd} = R_{\theta} \circ S_{\sigma} (\sin(\kappa, x) e^{-\frac{1}{2}(x^2+(y/2)^2)})$$

であるが、十分な説明が省かれている不明部分があり、さしあたりはそのままとしよう。

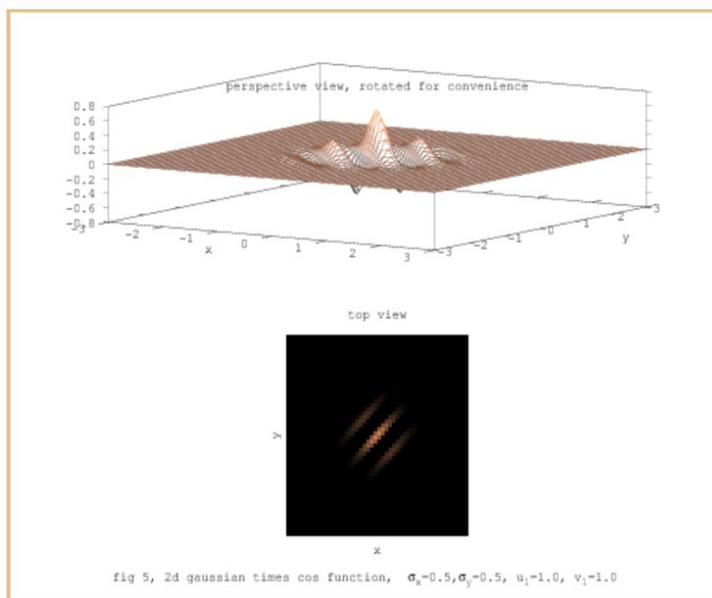


図7 Gabor 関数の表示と視覚イメージ（斜め部分が示されている）

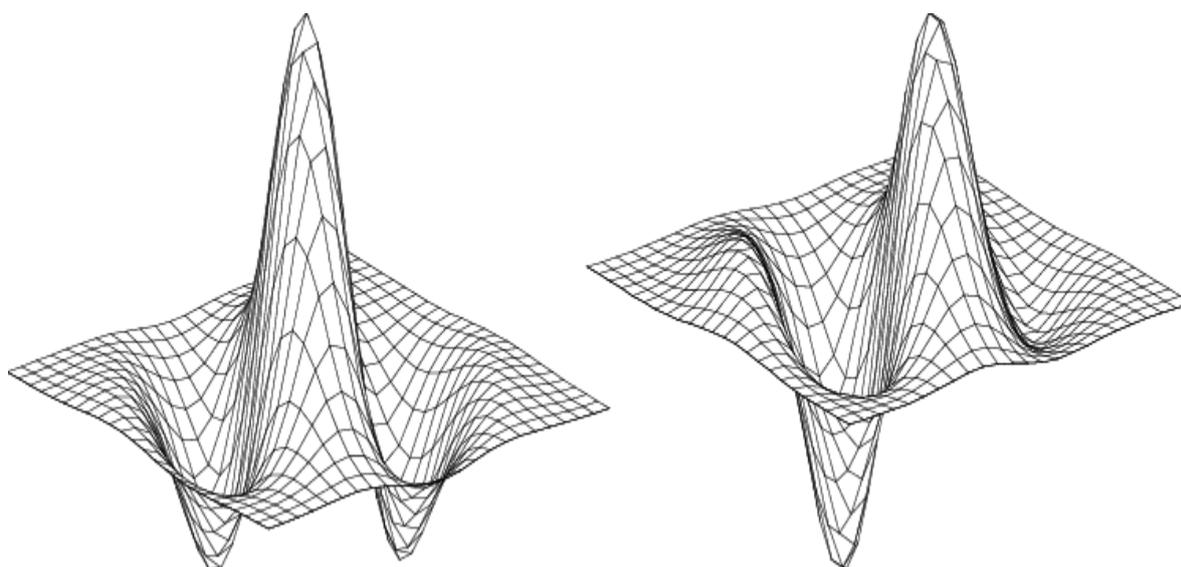


図8 Gabor 関数の実部及び虚部

4. window Fourier 変換による wavelet

4.1 window 関数の考え方

Fourier 解析のアナロジーから、wavelet（正確には wavelet 同様の数理）を作り出すこともできる。すなわち Fourier 解析ではスペクトル推定のために、周波数領域で spectral window（窓）といわれる平滑化関数を施すことがある。この平滑化関数はコンパクトな台を持っており、スペクトル関数を局所化する効果があり、データ領域（統計学でいう標本空間）に読み替え転用して「母 wavelet」のように考えれば、wavelet が構成される。すなわち「窓」を広義に使っている。

もともと、Fourier 解析で高周波領域を統計的に推定する場合、データの振動が激しくたとえ平滑化してもデータが追従できず高周波領域の推定の信頼性が低下する（統計学的には推定の一致性が成り立たない）ため、コンパクトな台をもつ関数を掛けて領域を制限（フィルタリング）する。これを「window 関数」といい、多項式や三角関数を用いて数多く提案されている（後述 5）。

時系列分析においてスペクトル密度の推定式（後述）で系列相関関数 r_k にかかる重み係数として Hamming window

$$\frac{1}{2\pi} \left(0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi}{K} k \right), \quad (k = 0, \pm 1, \dots, \pm K)$$

はよく利用されるものの一つであるが、wavelet へ転用する際は、変数は連続的に取るものとする。

4.2 window 関数による wavelet 変換

Fourier 変換を • wavelet 的 • に転用するには、window Fourier 変換で関数 $f(t)$ に局所的に t において window 関数 $g(\cdot)$ を掛けその積の Fourier 係数

$$(T^{win} f)(\omega, t) = \int f(s) g(s - t) e^{-i\omega s} ds$$

を計算し、この手順を、window $g(\cdot)$ をあたかも母 wavelet として $g(t-t_0)$, $g(t-2t_0)$, \dots と移動を繰り返し、かつ周波数部分も変えながら

$$T_{m,n}^{win}(f) = \int f(s) g(s - nt_0) e^{-im\omega_0 s} ds$$

とすればよい、explicit に正面から子 wavelet を入れれば

$$(T^{wav} f)(a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int dt f(t) \Psi \left(\frac{t-b}{a} \right)$$

あるいはアフィン変換を離散化して

$$T_{m,n}^{wav}(f) = a_0^{-m/2} \int f(t) \Psi(a_0^{-m} t - nb_0) dt$$

としてもよい。

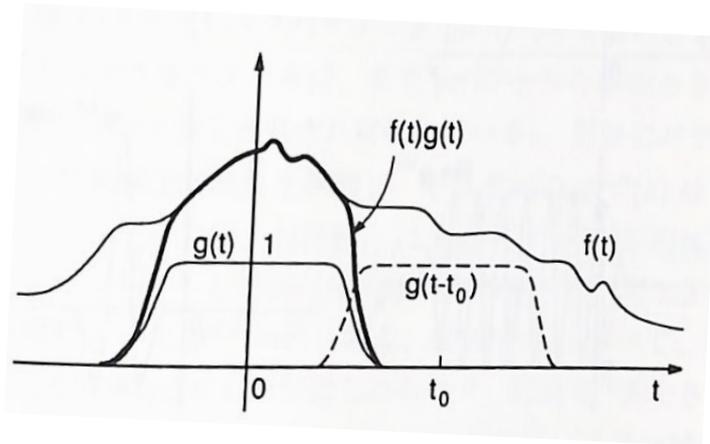


図9 window 関数と wavelet ドブシー[4]より

ここまでは window Fourier 変換を wavelet 変換へのアナロジーと考えたが、再定義によって完全に wavelet 変換を導くことができる（証明略）。

5. window 関数

時系列データの Fourier 解析には、Hamming window を始めとしてさまざまな window 関数が用意されているから、これを利用すれば理論的にはさまざまな wavelet 分析を行うことができる。ここでは時系列分析の成書[32][33]から解説なしに引用しておこう。

A. 原系列

$$k_T(\lambda) = \frac{\sin^2(\lambda T/2)}{2\pi T \sin^2(\lambda/2)}$$

$$h_{2T-1}(\lambda) = \frac{\sin(\lambda(T-1)/2)}{2\pi \sin(\lambda/2)}$$

B. 打ち切り(略)

C, D Bartlett, 修正 Bartlett

$$k_K(\lambda) = \frac{\sin^2(\lambda K/2)}{2\pi K \sin^2(\lambda/2)}$$

E. Daniell (略)

F. Blackman-Tukey (略)

G. Hanning (略)

H. Hamming (原推定式)

$$\hat{f}(v) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-K}^{rK} \left(0.54 + 0.46 \frac{\pi}{K} r\right) \cos vr C_r$$

I. Parzen (略)

J. Parzen (略)

K. 離散和からの平均(略)

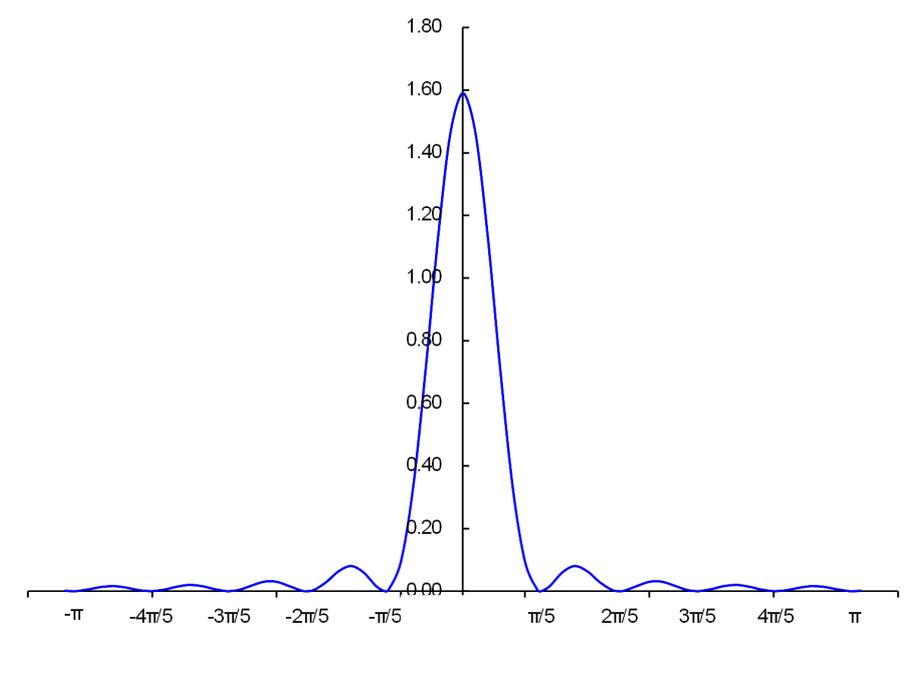


図 10 window 関数 $A k_T(\lambda)$, $T=10$

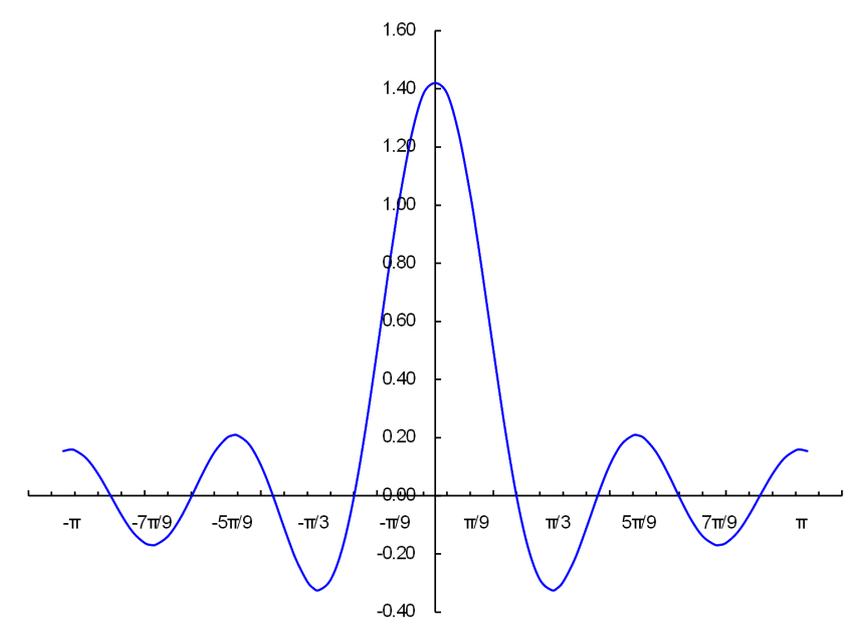


図 11 window 関数 $A h_{2T-1}(\lambda)$, $T=5$

6. wavelet から JPEG へ

wavelet 理論の発展の経過はおおむね以下の通りである(en wikipedia *wavelet*)。

1. Haar 関数, 1906[6]
2. J.Morlet[19], G.Zweig, Grossman, 1970 年代
3. Y.Meyer[18], D.Le Gall, A. Tabatabai, S.Mallat, I.Daubechies[4](ドブシー), R.Coifman, A.Akansu, V.Wickerhauser の 1980 年代
4. N.Delapart, Newland, ASaid, W.A.Perlman, T.Ebrahimi の 1990 年代

5. Joint Photographic Expert Group, JPEG

Mumford も wavelet 理論の今後はデータの圧縮に向けられると予想し、到達点として JPEG 画像 (図 12) を挙げている。

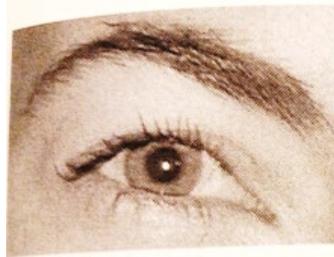


図 12 JPEG 画像 Pattern Theory p.347

7. エピソード

本稿が中心的に扱っている「Pattern Theory」著者 David Mumford 氏(以下敬称略)について述べておこう。

7.1.Mumford 略歴

- ・1937 年, イギリスのサセックスに生まれる。
- ・ハーバード大学にてザリスキのもと広中平祐とともに代数幾何学を研究する。1960 年代に Mumford がハーバードの大学院生向けに行った講義から生まれた通称 Red Book (「代数幾何学講義」) は好評を博した。
- ・1974 年, バンクーバーで開かれた ICM においてフィールズ賞を受賞。
- ・1995~1999 年国際数学者連合総裁。

7.2 数学に関する思想(本稿関係)

The Dawning of the Age of Stochasticity[20]と *Numbers and the world*[21]から, Mumford の数学に対する思想が分かる部分を紹介する。

7.2.1 *The Dawning of the Age of Stochasticity*(確率時代の夜明け)

2000 年以上もの間, 西洋での考え方はアリストテレスの演繹論理に基づいてきた。すべての精密な理論, 科学的モデル, また思考過程のモデルそのものすら原則として論理の縛りに従ってきた。しかしながら, ギャンブルの戦略や死体の数え方を考案した中世ロンドンの暗い時代から, 確率論や統計的推論が現在, 科学的モデル, 特に思考過程のモデルのよりよい基盤や, 理論数学, さらに数学の基礎そのものさえ本質的構成要素となってきた。

我々の総体的な物事の見方に関するこの大いなる変革が次の千年紀の数学すべてに実質的な影響を与えるだろう。

7.2.2 *Numbers and the world*(数と世界)

70 歳で定年退職したとき, ブログを書くのはとても楽しいだろうと思った。私の問題であり, ブログを書く動機でもある一つの事実は, 私が何か新しいことに興奮し続けるということである。・・・もっともっと多くの分野の本質的な考え方を学びたい, もっともっと多くの

議論可能な問題に関わりたいと思うあまり、病みつきになってしまったようだ。

この点での私の貪欲さは、Haar か昔にさかのぼる。高校時代には計算機の設計に夢中になり、特殊相対性理論や数学の基礎を読みあさった。夏休みには、ウェスティングハウス社でアナログ・コンピューターを使って海底原子反応器のシミュレーションに取り組んだ。ハーバード大学では、数学だけでなく物理学、生物学、天文学もさらに学ぼうとし、美術史やアングロサクソン語を履修したのは言うまでもない。(美術史は苦勞した：自分の力量を疑っていたので、音楽や哲学はあえて履修しなかった)。

私たちが大学院生だった頃、バリー・マズア Barry Mazur と話をしている、数学のすべての分野について基本的な理解を持ちたいという点で意見が一致したことを覚えている。しかしその後、私はオスカー・ザリスキ、ジョン・テイト、アレクサンダー・グロタンディックに魅了され、フォーカスするようになった。特にザリスキーは、代数幾何学に対する情熱に燃えていた。彼は秘密の花園にアクセスしているような気がした。

私は彼の庭への鍵が欲しくて、代数幾何学に落ち着いた。私は「infinitely near points」や「blowing up」という考え方が好きだったが、特に抽象的な世界の写像であるモジュライ空間に惹かれた。

しかし、約 30 年後、ジョー・ハリスと私が節目を迎えたとき、放浪癖が再び襲ってきた。ラヴェッロで開かれた代数幾何学の会合で、ジャヤント・シャー (Jayant Shah) と私は、人工知能で何が起きているのかについて語り合った。ジャヤント Jayant Shah と私は、神経生物学だけでなく、AI に関連するコンピュータサイエンスの勉強にも打ち込んだ。シリコンと神経組織における異なる実装の根底には、AI における統一された「計算理論」があるべきであり、数学、統計学、コンピュータサイエンス、工学、心理学、生物学からの洞察を組み合わせ、この進化する理論を構築すべきである。より単純な認知スキルの例、すなわち視覚から始めるのが賢明であると考えた。私たちは、タコや人間など多様な動物が視覚を獲得していることに勇気づけられた。そこで私たちは約 20 年間、視覚に集中した。

ジャヤントと私は、コンピュータ・ビジョンの分野に数学を持ち込むことを楽しんだ。しかし、この分野は、毎年集まるたびにさまざまなベンチマークの漸進的な改善を競うエンジニアたちによって支えられていた。

私にとって、中心的な問題のひとつは、世界のイメージを理解する上で私たちが使う「形状」をモデル化するのに最適な数学は何かということだった。90 年代後半に IMU を通じてピーター・ミコール (Peter Michor) に会ったとき、私は彼が無限次元のリーマン幾何学を行うための素晴らしい機械を作ったことを知った。

私たちは約 10 年間、形状の数学について一緒に研究し、私はリーマン幾何学と非線形解析についてより深い理解を得ることができた。そして 2007 年、私は教職を退職した。

私が 80 年代に神経生物学を学んだとき、基本的にすべてのモデリングは、感覚から思考、行動への一方向の情報の流れであるフィードフォワード(feed-forward)経路が皮質機能の基礎であるという考えに基づいていた。脳内に遍在するフィードバック経路は、単に注意の調節を表すものとして説明されていた。私はこれは意味をなさないと考え、別のモデルに

ついて広範囲に書いた。これに関連して、ベイズ統計学やその類似のグレナダのパターン理論を使用して思考をモデル化する必要があるという理論がある。エンジニアは神経生物学者と同様、フィードフォワードのアルゴリズムに重点を置いていたため、事前確率からのフィードバックを使用するアルゴリズムは忌み嫌われていた。しかし、私がよく考えてみると、どちらのコミュニティも、フィードバックが思考に不可欠な要素であるという見解に近づきつつあるように思う。

謝辞

本論文は2024年10月12日(土)13日(日)に開催されました第33回数学史シンポジウムの発表内容をもとにしたものです。発表の機会を与えてくださいました関係者の皆様に心より感謝申し上げます。また、A.Haarの論文ほか、貴重な資料の閲覧とコピーをご許可いただきました京都大学数理解析研究所図書館の担当者の皆様に衷心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 芦野隆一, 山本鎮男, wavelet 解析. 共立出版, 1997
- [2] L.Breiman, *Probability*, Addison-Wesley, 1968
- [3] K.L.Chung, P.Edrös and T. Sirao, On the Lipschitz's condition for Brownian motion, *J. Math. Soc. Japan*, 11, pp263-274, 1959
- [4] I.ドブシー著, 山田道夫/佐々木文夫訳, wavelet10 講, 丸善出版, 2012
- [5] D.Gabor, Theory of communication, *J. Inst. Electr. Engrg.*, London, 93(III), pp429-457 1946
- [6] A.Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktion-Systeme, *Math. Ann.*, 69, pp331-371
- [7] 飛田武幸, ホワイトノイズ, 丸善, 2014
- [8] 藤原正俊, 竹田雅好, マルコフ過程, 培風館, 2008
- [9] G.A.Hunt, Random Fourier transforms, *Amer.Math.Soc.*71, pp38-69, 1951
- [10] 池田信行, 偶然の輝き—ブラウン運動を巡る 2000 年, 岩波書店, 2018
- [11] 池田信行, 小倉幸雄, 高橋陽一郎, 眞鍋昭治郎, 確率論入門, I, 培風館, 2006
- [12] 池田信行, 小倉幸雄, 高橋陽一郎, 眞鍋昭治郎, 確率論入門, II, 培風館, 2015
- [13] 伊藤清, 確率論(旧版), 岩波書店, 1953
- [14] K.Ito and M.Nisio, On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables, *Osaka J. Math.*, 5, pp35-48, 1968
- [15] P.Lévy, Le mouvement brownien plan, *Amer.J.Math.*, 62, pp487-55, 1940
- [16] P.Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, 1948
- [17] 松原望, 入門確率過程(改訂版), 東京図書, 2024
- [18] Meyer, Yves, Wavelets and Operators, Cambridge University Press, 1992
- [19] J.Morlet, Sampling theory and wave propagation, in NATO ASI Series, Vol. 1, Issues in Acoustic signal/Image processing and recognition, C.H.Chen, ed., Springer-Verlag, Berlin, pp233-261 1983

- [20] D. Mumford, *The Dawning of the Age of Stochasticity*, 2000
- [21] D. Mumford, Agnès Desolneux, *Pattern Theory*, 2010
- [22] D.Mumford, *Numbers and the world*, AMS, 2023
- [23] 西尾真喜子, *確率論*, 実教出版, 1978
- [24] R.E.A.C.Paley, N.Wiener, *Fourier Trans forms in the Complex Domain*, Amer.Math. Soc. Colloq. Publ., 19, 1934
- [25] M.Pinsky, *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, Th., 107, pp1-66, 2000
- [26] 佐藤健一, *加法過程*, 紀伊国屋書店, 1990
- [27] Say Song Goh, Amos Ron, Zuowei Shen, *Gabor and Wavelet frames*, World Scientific Publishing, 2007
- [28] A.N.Shiryayev, *Probability*, Springer, 1989, Chap.III
- [29] J.M.Steele, *Stochastic calculus and financial applications*, Springer, 2001
- [30] 田中靖人, *Gabor 変換—その構成理論と視覚科学への応用—*, *視覚の科学* 32, pp51-58, 2011
- [31] Todhunter, *確率論史*, 安藤洋美訳, 現代数学社, 2002
- [32] T.W.Anderson *The Statistical Analysis of Time Series*, Joh Wiley & Sons, 1971
- [33] M.Kendall, J.K.Ord *Time Series* 3rd ed, Edward Arnold, 1990
- [34] 広中平祐 (編), *現代数理科学事典*, 大阪書籍, 1991
- [35] G.Apton, I.Cook, *Dictionary of Statistics* (白幡慎吾監訳), *統計学辞典*, 共立出版, 2010

資料

- [1] Understanding Gabor Filter
<https://kgeorge.github.io/2016/02/04/understanding-gabor-filter> (2024 年 10 月参照)
- [2] Gabor 関数
https://www.researchgate.net/figure/Real-a-and-imaginary-b-part-of-a-Gabor-function_fig7_2461492 (2024 年 10 月参照)
- [3] Hamming window
<https://www.recordingblogs.com/wiki/hamming-window> (2024 年 10 月参照)