

判別式が負の整数係数 2 元 2 次形式のつくる双曲三角形について

前田博信

はじめに

本講演は、判別式が負の整数係数 2 元 2 次形式のフルヴィッツによる簡約理論 [2] の紹介である。特徴は、同値類の代表 (被約形式) が 1 つではなく、非ユークリッド平面上の「等辺三角形」をつくることである。

実射影平面 \mathbf{P}^2 の斉次座標を (x_0, x_1, x_2) とし、 $K = \{x_1^2 - 4x_0x_2 = 0\}$ を理想境界とする非ユークリッド平面を $\mathbf{H}^2 = \{x_1^2 - 4x_0x_2 < 0\}$ とする。 K 上の 3 点 $(1, 0, 0)$, $(1, -2, 1)$, $(0, 0, 1)$ を頂点とする \mathbf{H}^2 の理想三角形を Δ_0 とする。

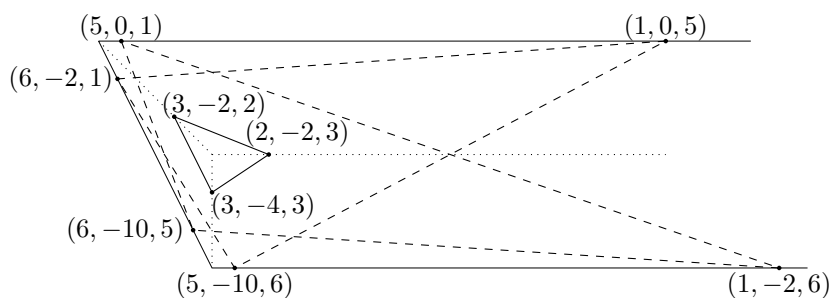
整数係数 2 元 2 次形式 $f = ax^2 + hxy + cy^2$ が正定値原始形式、すなわち $h^2 - 4ac < 0, a > 0, \gcd(a, h, c) = 1$ のとき、 \mathbf{H}^2 の点 (a, h, c) が一意的に定まる。 (a, h, c) が Δ_0 に含まれるとき、 f はフルヴィッツの意味で「被約」(reducirt) である [2, Definition 4] という。 $\mathbf{H}^2 \cup K$ には $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ が、

$$(x_0, x_1, x_2)^M = (\alpha^2 x_0 + \alpha\gamma x_1 + \gamma^2 x_2, 2\alpha\beta x_0 + (\alpha\delta + \beta\gamma)x_1 + 2\gamma\delta x_2, \beta^2 x_0 + \beta\delta x_1 + \delta^2 x_2)$$

で作用する。 $(a, h, c)^M = (a', h', c')$ のとき、 (a, h, c) と (a', h', c') は「正式同値」であるという。

任意の正定値原始形式 $f = (a, h, c)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ による作用で Δ_0 の点、すなわち被約形式 g にうつすことができる [2, Satz 12]。 g が $(1, -1, 1)$ を除く Δ_0 の内部にある場合、 f と正式同値な被約形式は Δ_0 の内部に 3 つあり、点 $(1, -1, 1)$ を中心とする周期 3 の回転でうつりあう [2, Satz 13]。 g が $(1, 0, 1)$, $(2, -2, 1)$, $(1, -2, 2)$ を除く Δ_0 の辺上にある場合、 f と正式同値な被約形式は Δ_0 の辺上に 6 つあり、 Δ_0 の回転と、 Δ_0 の 1 辺を別の 1 辺にうつす非ユークリッド平行移動でうつりあう [2, Satz 14]。

例えば、判別式 $d = h^2 - 4ac = -20$ の被約形式は 9 個あり、 Δ_0 の内部に 3 つ、 Δ_0 の辺上に 6 つある。 下図では、非斉次座標を $X = x_2/x_0$, $Y = x_1/x_0$ とするアフィン平面で、 (a, h, c) を点 $(c/a, h/a)$ で表した。 特に、判別式が -20 の虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の類数が 2 であることがわかる。



文献

- [1] J. H. Conway, The Sensual Quadratic Form, Carus Mathematical Monographs, Vol. 26, MAA (1997) (和訳, 細川尋史, 『素数が香り、形がきこえる』, シュプリンガー・ジャパン, 2006, 丸善出版, 2021)
- [2] A. Hurwitz, Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen, Math. Ann., **45** (1894), 85–117.
- [3] 滝沢精二, 『幾何学入門 (復刊)』, 朝倉書店, 2004.

1 双曲的非ユークリッド平面のクライン表示と変換群

実射影平面 P^2 の射影変換

$$\rho \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \rho \neq 0 \quad (1)$$

が $K = \{x_1^2 - 4x_0x_2 = 0\}$ を K に移す条件を求める. K の点は $(0, 0, 1)$ を除くと $t \in \mathbb{R}$ により, $(1, 2t, t^2)$ と一意的に表されるから,

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} + 2a_{01}t + a_{02}t^2 \\ a_{10} + 2a_{11}t + a_{12}t^2 \\ a_{20} + 2a_{21}t + a_{22}t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

とおくとき, (1) が K を K に移すならば

$$\begin{aligned} v(t)^2 - 4u(t)w(t) &= (a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20}) + 4(a_{10}a_{11} - 2a_{01}a_{20} - 2a_{00}a_{21})t \\ &\quad + 2(a_{10}a_{12} - 2a_{02}a_{20} - 2a_{00}a_{22} + 2a_{11}^2 - 8a_{01}a_{21})t^2 \\ &\quad + 4(a_{11}a_{12} - 2a_{02}a_{21} - 2a_{01}a_{22})t^3 + (a_{12}^2 - 4a_{02}a_{22})t^4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

がすべての $t \in \mathbb{R}$ で成り立つ. したがって, (1) の a_{ij} は

$$a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} = 0 \quad (3)$$

$$a_{10}a_{11} - 2a_{01}a_{20} - 2a_{00}a_{21} = 0 \quad (4)$$

$$a_{10}a_{12} - 2a_{02}a_{20} - 2a_{00}a_{22} + 2a_{11}^2 - 8a_{01}a_{21} = 0 \quad (5)$$

$$a_{11}a_{12} - 2a_{02}a_{21} - 2a_{01}a_{22} = 0 \quad (6)$$

$$a_{12}^2 - 4a_{02}a_{22} = 0 \quad (7)$$

をみたさなければならない.

$u(t) = 0$ をみたく t はたかだか 1 つであるから, $a_{10}^2 - a_{00}a_{02} \leq 0$ でなければならない. ゆえに, $a_{00}a_{02} \geq 0$ である. 必要なら ρ の符号を変えて, $a_{00} \geq 0$ としてよいから, $a_{00} = p^2$ とおく. このとき, (3) より, $a_{20} \geq 0$ となるから, $a_{20} = q^2$ とおき, 必要なら p の符号を変えて, $a_{10} = 2pq$ とおき,

$$a_{00} = p^2, a_{10} = 2pq, a_{20} = q^2 \quad (8)$$

とおける. (8) を (4) に代入すると, $2pqa_{11} - 2q^2a_{01} - 2p^2a_{21} = 0$, ゆえに,

$$pqa_{11} = q^2a_{01} + p^2a_{21} \quad (9)$$

となる. $a_{00} \geq 0$ より $a_{02} \geq 0$ となるから, (7) より, 上の (8) と同様の理由で

$$a_{02} = r^2, a_{12} = 2rs, a_{22} = s^2 \quad (10)$$

とおける. (10) を (6) に代入すると, $2rsa_{11} - 2r^2a_{21} - 2s^2a_{01} = 0$, ゆえに,

$$rsa_{11} = s^2a_{01} + r^2a_{21} \quad (11)$$

となる。(8) と (10) を (5) に代入すると, $4pqr s - 2r^2 q^2 - 2p^2 s^2 + 2a_{11}^2 - 8a_{01} a_{21} = 0$, ゆえに,

$$a_{11}^2 - 4a_{01} a_{21} = (ps - qr)^2 \quad (12)$$

となる. $\det[a_{ij}]$ を第 2 列で余因子展開すると,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} p^2 & a_{01} & r^2 \\ 2pq & a_{11} & 2rs \\ q^2 & a_{21} & s^2 \end{vmatrix} &= -a_{01} \begin{vmatrix} 2pq & 2rs \\ q^2 & s^2 \end{vmatrix} + a_{11} \begin{vmatrix} p^2 & r^2 \\ q^2 & s^2 \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} p^2 & r^2 \\ 2pq & 2rs \end{vmatrix} \\ &= (ps - qr) \{-2qsa_{01} + (ps + qr)a_{11} - 2pra_{21}\} \end{aligned}$$

となり, $[a_{ij}]$ は正則行列であるから, $ps - qr \neq 0$ でなければならない.

(9) $\times r^2 - (11) \times p^2$ から $pr(qr - ps)a_{11} = (q^2 r^2 - p^2 s^2)a_{01}$ となる. ゆえに,

$$pra_{11} = (ps + qr)a_{01} \quad (13)$$

を得る. 同様に, (9) $\times s^2 - (11) \times q^2$ から,

$$qsa_{11} = (ps + qr)a_{21} \quad (14)$$

を得る. (13) \times (14) と (12) から, $(ps + qr)^2 a_{01} a_{21} = pqr s a_{11}^2 = pqr s \{4a_{01} a_{21} + (ps - qr)^2\}$ を得る. これから $\{(ps + qr)^2 - 4pqr s\} a_{01} a_{21} = pqr s (ps - qr)^2$ を得るから

$$a_{01} a_{21} = pqr s \quad (15)$$

を得る. ゆえに, (12) より $a_{11}^2 = (ps + qr)^2$ を得る. p と q は同時に符号を変えてもよいし, r と s も同時に符号を変えてもよいから,

$$a_{11} = ps + qr \quad (16)$$

を得る. したがって, $[a_{ij}]$ は

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} p^2 & pr & r^2 \\ 2pq & ps + qr & 2rs \\ q^2 & qs & s^2 \end{bmatrix}, \quad ps - qr \neq 0 \quad (17)$$

の形であることがわかる. 以上により, $M = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ が, $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{P}^2$ に

$$(x_0, x_1, x_2)^M = (y_0, y_1, y_2),$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^2 & pr & r^2 \\ 2pq & ps + qr & 2rs \\ q^2 & qs & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

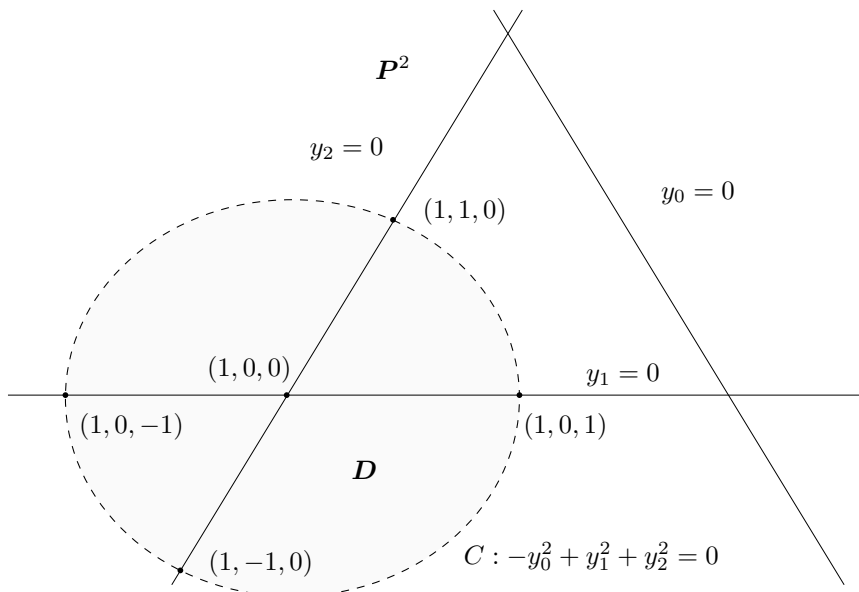
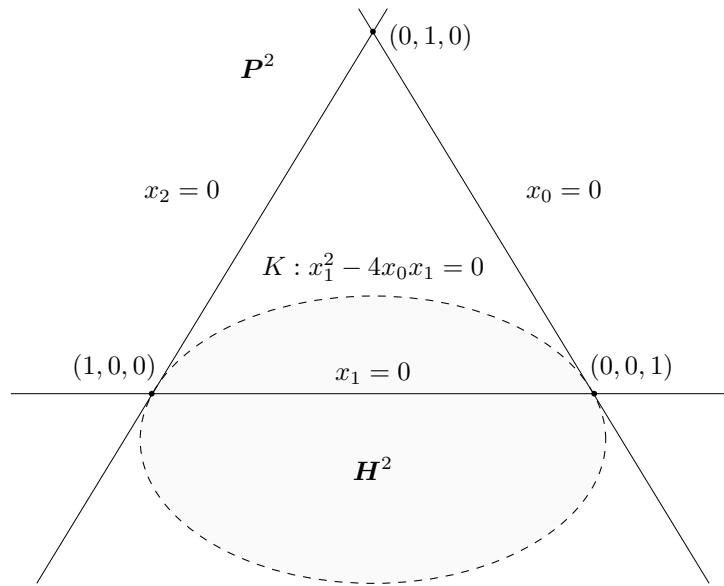
で作用して, K を K に移し, $\mathbf{H}^2 = \{x_1^2 - 4x_0 x_2 < 0\}$ を \mathbf{H}^2 に移すことがわかる.

\mathbf{H}^2 は K を理想境界 (絶対形) とする非ユークリッド平面 (双曲平面) [3, 177 頁] である. $GL_2(\mathbb{R})$ の作用 (18) は \mathbf{H}^2 の非ユークリッド合同変換 [3, 5.5 実計量幾何] をひきおこす. この作用は, $\det M = ps - qr > 0$ のときは \mathbf{H}^2 の向き (裏表) を保ち, $\det M < 0$ のときは \mathbf{H}^2 の向きを変える.

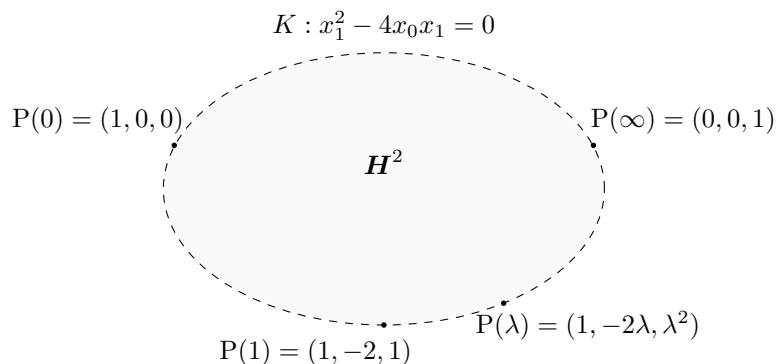
補足 1.1. 非ユークリッド平面の円盤モデルについて. 射影変換

$$\rho \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \rho \neq 0$$

により, $K = \{x_1^2 - 4x_0x_2 = 0\}$ は $C = \{-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0\}$ に変換され, $H^2 = \{x_1^2 - 4x_0x_2 < 0\}$ は円盤 $D = \{-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 < 0\}$ に変換される. 円盤モデルでは, 正定値原始形式 $ax^2 + hxy + cy^2$ に, D の点 $(a + c, h, -a + c)$ が対応する.



実射影直線 \mathbf{P}^1 の斉次座標を (z_0, z_1) とするとき, \mathbf{P}^1 の点 (z_0, z_1) に K の点 $(z_0^2, -2z_0z_1, z_1^2)$ が 1 対 1 に対応する. $\mathbf{P}^1 \setminus \{(0, 1)\}$ の非斉次座標を $Z = z_1/z_0$ とすると, 点 $Z = \lambda$ に対応する K の点は $(1, -2\lambda, \lambda^2)$ である. これを単に $P(\lambda)$ と表すことにする. $z_0 = 0$ のとき, $1/0 = \infty$ とみなし, $(0, 1) \in \mathbf{P}^1$ に対応する K の点 $(0, 0, 1)$ を, $P(\infty)$ と表す.



2 基本三角形とファレイ多角形

$n \geq 1$ は自然数, r, s, u, v は整数とする. 分子と分母が $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ であるような分数を大きさの順に並べた数列を, n 次のファレイ数列 (n^{te} Farey'sche Reihe) とよび F_n と表す. 分母が 0 の場合は, $\frac{-1}{0} = -\infty, \frac{1}{0} = \infty$ とし, これらも分数とみなす. 1 次のファレイ数列 F_1 は

$$\frac{-1}{0}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$$

であり, 一般の F_n は

$$\frac{-1}{0}, \frac{-n}{1}, \dots, \frac{-1}{n}, \frac{0}{1}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{1}, \frac{1}{0}$$

である. F_n において $\frac{r}{u}$ の次が $\frac{s}{v}$ であれば, $us - vr = 1$ が成り立つ. 逆に, $us - vr = 1$ または $us - vr = -1$ をみたす分数 $\frac{r}{u}, \frac{s}{v}$ はあるファレイ数列 F_n における隣り合う分数になる.

F_{n+1} は F_n の隣り合う $\frac{r}{u} < \frac{s}{v}$ の間に $\frac{r+s}{u+v}$ を追加してできる列である. 例えば, F_2 :

$$\frac{-1}{0}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}$$

から, F_3 :

$$\frac{-1}{0}, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{1}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}$$

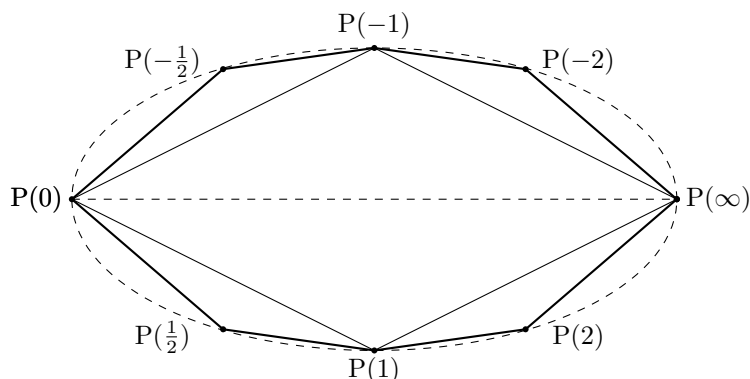
を得る. 集合として, $F_n \subsetneq F_{n+1}, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$ である.

定義 2.1. 2つの分数 $\frac{r}{u}, \frac{s}{v}$ が $us - vr = 1$ または $us - vr = -1$ をみたすとき, K の 2 点 $P\left(\frac{r}{u}\right), P\left(\frac{s}{v}\right)$ を結ぶ H^2 の線分 $P\left(\frac{r}{u}\right)P\left(\frac{s}{v}\right)$ を基本弦 (Elementarsehne) [2, Definition 1] とよぶ.

定義 2.2. 基本弦を辺とする H^2 の理想三角形を基本三角形 (Elementardreieck) [2, Definition 2] とよぶ.

定義 2.3. n を固定したとき, F_n の隣り合う 2 つの数の定める基本弦のすべてで囲まれる H^2 の理想多角形を n 次ファレイ多角形 (Farey'sches Polygon) [2, Definition 3] とよび, P_n と表す.

P_1 は $P(\infty)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ を頂点とする理想 4 角形であり, P_2 は下図の太線で表された理想 8 角形である.



下図はフルヴィッツによる P_1 と P_2 の図 [2, 87 頁]. K 上の点 $P(\lambda)$ は λ と表されている.

So ist das erste Farey'sche Polygon P_1 das Viereck $\infty, -1, 0, 1$; das zweite Farey'sche Polygon P_2 das Achteck $\infty, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ u. s. w. (Vgl. Figur 3, in welcher die Seiten des Polygons P_2 stark ausgezogen sind.)

Wir ergänzen diese Definition noch dadurch, dass wir als „nulltes“ Farey'sches Polygon P_0 das von den Punkten $\infty, 0$ gebildete Zweieck einführen. Es gilt dann allgemein der

Satz 2. Die Parameter der aufeinanderfolgenden Ecken des n ten Farey'schen Polygons P_n bilden die n te Farey'sche Reihe.*)

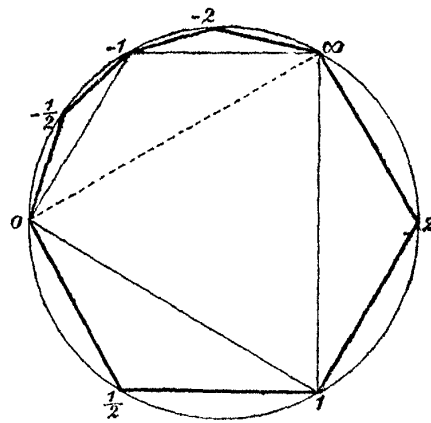
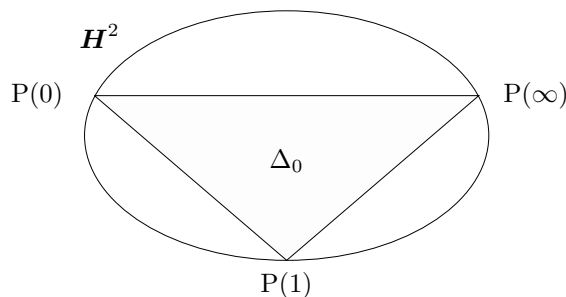


Fig. 3.

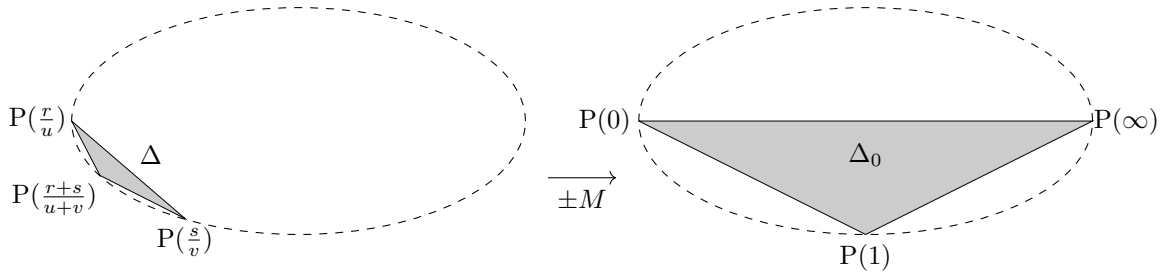
定義 2.4. H^2 の基本三角形 $\triangle P(0)P(1)P(\infty)$ を Δ_0 と表す.



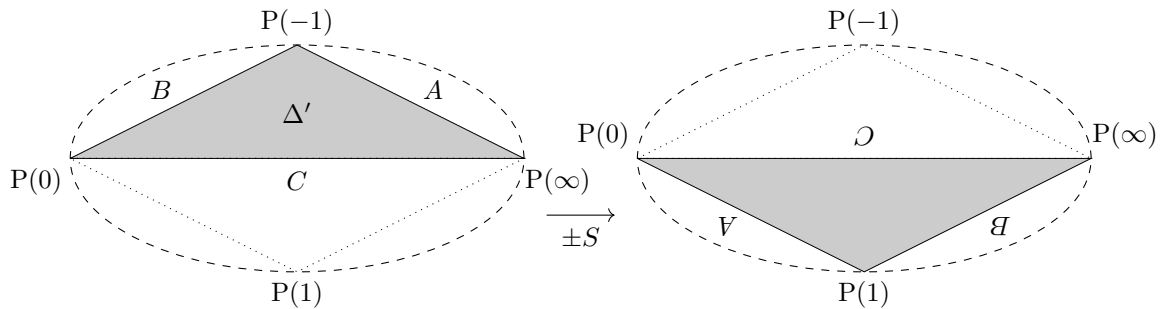
$\frac{r}{u} < \frac{s}{v}$ を F_n において隣り合う 2 つの分数とすると、線分 $P\left(\frac{r}{u}\right)P\left(\frac{s}{v}\right)$ は P_n の 1 つの辺であり、三角形 $\Delta P\left(\frac{r}{u}\right)P\left(\frac{r+s}{u+v}\right)P\left(\frac{s}{v}\right)$ は基本三角形である。点 $P\left(\frac{r}{u}\right)$, $P\left(\frac{r+s}{u+v}\right)$, $P\left(\frac{s}{v}\right)$ は、 P_{n+1} の隣り合う 3 つの頂点である。ここで、 $\begin{bmatrix} s & r \\ v & u \end{bmatrix}$ を M とおくと、 $\pm M \in SL_2(\mathbb{Z})$ である。 $\pm M$ は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s^2 & sv & v^2 \\ 2sr & su+rv & 2vu \\ r^2 & ru & u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ -2ur \\ r^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s^2 & sv & v^2 \\ 2sr & su+rv & 2vu \\ r^2 & ru & u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v+u)^2 \\ -2(v+u)(s+r) \\ (s+r)^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s^2 & sv & v^2 \\ 2sr & su+rv & 2vu \\ r^2 & ru & u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2 \\ -2vs \\ s^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

をみたら、三角形 $\Delta P\left(\frac{r}{u}\right)P\left(\frac{r+s}{u+v}\right)P\left(\frac{s}{v}\right)$ を三角形 Δ_0 に移す。 $\pm M$ の逆行列、 $\pm \begin{bmatrix} u & -r \\ -v & s \end{bmatrix}$ は、 Δ_0 を $\Delta P\left(\frac{r}{u}\right)P\left(\frac{r+s}{u+v}\right)P\left(\frac{s}{v}\right)$ に移す。



特に、 $\frac{-1}{0} < \frac{-1}{1} < \frac{0}{1}$ から定まる $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ による変換で、三角形 $\Delta' = \Delta P(\infty)P(-1)P(0)$ は Δ_0 に移される。また、 $S^{-1} = -S$ であるから、 S による変換は Δ_0 を Δ' に移す。 $\pm S$ は \mathbf{H}^2 の半回転を引き起こし、この変換は \mathbf{H}^2 の向きを保つ非ユークリッド合同変換である。 S も $-S$ も行列式は 1 であり、反転ではないことに注意する。



3 被約な正定値原始形式，フルヴィッツの簡約定理

定義 3.1. 2次形式 $ax^2 + hxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & h/2 \\ h/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を $[[a, h, c]]$ と表す (T は転置を表す).

(注意. [2] では $h = 2b$ (偶数) の場合のみを扱い, $[[a, 2b, c]]$ を (a, b, c) と表している.)

定義 3.2. $d = h^2 - 4ac$ を 2次形式 $[[a, h, c]]$ の「判別式」とよぶ.

(注意. [2] では, $[[a, 2b, c]] = (a, b, c)$ の判別式を $b^2 - ac$ と定義している.)

以下, 2次形式は整数係数の2次形式のこととする.

定義 3.3. $f = [[a, h, c]]$ と $f' = [[a', h', c']]$ が「正式同値」であるとは, ある $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ により

$$X^T \begin{bmatrix} a & h/2 \\ h/2 & c \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} a' & h'/2 \\ h'/2 & c' \end{bmatrix}, \det X = 1$$

が成り立つことをいう. すなわち, 4つの整数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ により

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha^2 + h\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ h'/2 &= a\alpha\beta + h(\alpha\delta + \beta\gamma)/2 + c\gamma\delta \\ c' &= a\beta^2 + h\beta\delta + c\delta^2 \\ 1 &= \alpha\delta - \beta\gamma \end{aligned}$$

が成り立つことである. これを $f \xrightarrow{X} f'$ と略記し, X を f から f' への「正式変換」とよぶ.

$f \xrightarrow{X} f'$ に続けて $f' \xrightarrow{X'} f''$ と変換すると $f \xrightarrow{XX'} f''$ と変換される. XX' の順に注意する.

定義 3.4. 定義 3.3 において, X が $\det X = -1$ としたとき, すなわち最後の式を

$$-1 = \alpha\delta - \beta\gamma$$

とした場合に, f と f' は「非正式同値」であるといい, X を「非正式変換」とよぶ.

定義 3.5. 2次形式 $[[a, h, c]]$ は, $\gcd(a, h, c) = 1$ のとき, 「原始形式」とよぶ.

原始形式と正式同値または非正式同値な2次形式は原始形式である.

定義 3.6. $f = [[a, h, c]]$ が「正定値原始形式」, すなわち $d = h^2 - 4ac < 0$ かつ $a > 0$ かつ $\gcd(a, h, c) = 1$ をみたすとき, 齊次座標が (a, h, c) である \mathbf{H}^2 の点が一意的に定まる. このとき, 点 (a, h, c) も f と表す.

$[[a, h, c]]$ は正定値原始形式とする. $(a, h, c) \in \mathbf{H}^2$ は $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ により

$$(a, h, c)^X = (a\alpha^2 + h\alpha\gamma + c\gamma^2, 2a\alpha\beta + h(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta, a\beta^2 + h\beta\delta + c\delta^2)$$

と変換されるから, $(a', h', c') = (a, h, c)^X$ とおくと, $(a', h', c') \in \mathbf{H}^2$ であり, $[[a, h, c]] \xrightarrow{X} [[a', h', c']]$ である. したがって, $[[a, h, c]]$ の正式同値類と, 点 $(a, h, c) \in \mathbf{H}^2$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ 軌道を同一視することができる.

定義 3.7. [2, Definition 4] $f = [a, h, c]$ は正定値原始形式とする.

$$f \text{ が被約 (reducirt) である} \iff (a, h, c) \in \Delta_0 \iff h \leq 0, 2a + h \geq 0, h + 2c \geq 0$$

定理 3.1. [2, Satz 12] 任意の正定値原始形式は, 適当な正式変換で被約な正定値原始形式に変換できる.

証明. $f = [a, h, c]$ は正定値原始形式とする. 点 $(a, h, c) \in \mathbf{H}^2$ は, 十分大きな n を選ぶと, n 次のファレイ多角形 P_n の隣り合う 3 つの頂点の定める基本三角形 $\Delta = \Delta P \begin{pmatrix} r \\ u \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} r+s \\ u+v \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}$ に含まれる.

Δ は $M = \begin{bmatrix} s & r \\ v & u \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ による変換で Δ_0 に移されるから, $(a, h, c)^M = (a_0, h_0, c_0) \in \Delta_0$ となり, $[a_0, h_0, c_0]$ は f と正式同値な正定値原始形式である. (注. M を求める具体的方法は次節を参照) \square

4 フルヴィッツの簡約アルゴリズムと記録表

$SL_2(\mathbb{Z}) = \{X \in GL_2(\mathbb{Z}) ; \det X = 1\}$ は群として 2 つの元 $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ で生成される.

$(a, h, c) \in \mathbf{H}^2$ に対して,

$$(a, h, c) \xrightarrow{\pm L} (a, 2a + h, a + h + c)$$

$$(a, h, c) \xrightarrow{\pm R} (a + h + c, h + 2c, c)$$

$$(a, h, c) \xrightarrow{\pm L^{-1}} (a, -2a + h, a - h + c)$$

$$(a, h, c) \xrightarrow{\pm R^{-1}} (a - h + c, h - 2c, c)$$

である. $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = L^{-1}RL^{-1}$ であり, $(a, h, c) \xrightarrow{\pm S} (c, -h, a)$ である.

簡約アルゴリズム

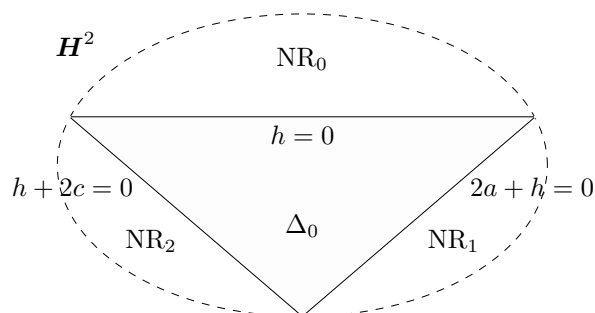
$f = [a, h, c]$ を正定値原始形式, すなわち, $a > 0, d = h^2 - 4ac < 0, \gcd(a, h, c) = 1$, とする. このとき, $f = (a, h, c) \in \mathbf{H}^2$ は次の 4 つの部分集合のうちの 1 つに含まれる.

$$\Delta_0 = \{(a, h, c) \in \mathbf{H}^2; h \leq 0, 2a + h \geq 0, h + 2c \geq 0\}$$

$$NR_0 = \{(a, h, c) \in \mathbf{H}^2; h > 0\}$$

$$NR_1 = \{(a, h, c) \in \mathbf{H}^2; h \leq 0, 2a + h < 0\}$$

$$NR_2 = \{(a, h, c) \in \mathbf{H}^2; h \leq 0, h + 2c < 0\}$$



$f \notin \Delta_0$ の場合は次の手順で f を変換する.

0. $f \in \text{NR}_0$ の場合. $f^S = (c, -h, a) \in \Delta_0$ なら終了. $f^S \in \text{NR}_1 \cup \text{NR}_2$ の場合は f^S を f とおいて次の 1. または 2. へ進む.

1. $f \in \text{NR}_1$ の場合. $f^L = (a, 2a+h, a+h+c) \in \Delta_0$ なら終了. $f^L \in \text{NR}_1 \cup \text{NR}_2$ の場合, f^L を f とおいて 1. または 2. へ進む. このとき, f の中間係数は h から $0 > h' = 2a+h > h$ に増加する.

2. $f \in \text{NR}_2$ の場合. $f^R = (a+h+c, h+2c, c) \in \Delta_0$ なら終了. $f^R \in \text{NR}_1 \cup \text{NR}_2$ の場合, f^R を f とおいて 1. または 2. へ進む. このとき, f の中間係数は h から $0 > h'' = h+2c > h$ に増加する.

1. と 2. の手続きは無限に続けることはできない. したがって, 被約でない f は, 0. の手続きを 0 回または 1 回, 続けて 1. または 2. の手続きを有限回繰り返すと被約形式に変換される.

簡約アルゴリズムを記録する表の作成

$(a, h, c) \in \mathbf{H}^2$ に対して第 i 行 ($i \geq 0$) が次のような表を作る.

$\frac{\alpha_i}{\gamma_i}$	$\frac{\beta_i}{\delta_i}$	a_i	h_i	c_i	$2a_i+h_i$	h_i+2c_i	$a_i+h_i+c_i$
-----------------------------	----------------------------	-------	-------	-------	------------	------------	---------------

$h_i \leq 0$ かつ $h_i+2c_i \geq 0$ かつ $2a_i+h_i \geq 0$ であれば (a_i, h_i, c_i) は被約であるから, この行で表は終了する.

まず, 第 0 行は, $h \leq 0$ ならば, $(a_0, h_0, c_0) = (a, h, c)$ とおき,

$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	a_0	h_0	c_0	$2a_0+h_0$	h_0+2c_0	$a_0+h_0+c_0$
---------------	---------------	-------	-------	-------	------------	------------	---------------

とおく. $h > 0$ ならば, $(a_0, h_0, c_0) = (c, -h, a)$ とおき,

$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{0}$	a_0	h_0	c_0	$2a_0+h_0$	h_0+2c_0	$a_0+h_0+c_0$
---------------	----------------	-------	-------	-------	------------	------------	---------------

とおく.

第 i 行で, $2a_i+h_i < 0$ ならば第 $i+1$ 行を,

$\frac{\alpha_i}{\gamma_i}$	$\frac{\alpha_i+\beta_i}{\gamma_i+\delta_i}$	a_i	$2a_i+h_i$	$a_i+h_i+c_i$	$4a_i+h_i$	$4a_i+3h_i+2c_i$	$4a_i+2h_i+c_i$
-----------------------------	--	-------	------------	---------------	------------	------------------	-----------------

とし, 第 i 行で, $h_i+2c_i < 0$ ならば第 $i+1$ 行を,

$\frac{\alpha_i+\beta_i}{\gamma_i+\delta_i}$	$\frac{\beta_i}{\delta_i}$	$a_i+h_i+c_i$	h_i+2c_i	c_i	$2a_i+3h_i+4c_i$	h_i+4c_i	$a_i+2h_i+4c_i$
--	----------------------------	---------------	------------	-------	------------------	------------	-----------------

とする.

上の表は, 各 $i \geq 0$ について, $P_i = (a_i, h_i, c_i)$, $X_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{bmatrix}$, $\Delta^{(i)} = \Delta P \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \alpha_i+\beta_i \\ \gamma_i+\delta_i \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$ とおくと, $h_i^2 - 4a_i c_i = h^2 - 4ac < 0$, $a_i > 0$, $\gcd(a_i, h_i, c_i) = 1$, $X_i \in SL_2(\mathbb{Z})$, $h_i \leq 0$ であり,

- (1) $P_i \in \text{NR}_1$ (i.e. $2a_i + h_i < 0$) ならば, $P_{i+1} = P_i^L$, $X_{i+1} = X_i L$,
- (2) $P_i \in \text{NR}_2$ (i.e. $h_i + 2c_i < 0$) ならば, $P_{i+1} = P_i^R$, $X_{i+1} = X_i R$,

となるように作成したものである. (1) と (2) の変換は無限に続かないため, ある $n \geq 0$ で, (1) でも (2) でもない場合, すなわち, P_n は被約となる. このとき, X_n は $\Delta^{(n)}$ を Δ_0 に移し, $P_0^{X_n} = P_n$ であるから, $P_0 \in \Delta^{(n)}$ であることが (表が完成した後に) わかる.

補足 4.1. フルヴィッツ [2] の記号と本稿の記号の対応は以下の通り.

$r = \frac{\xi_1}{\eta_1}$	$p = \frac{\xi_2}{\eta_2}$	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\frac{\alpha}{\gamma}$	$\frac{\beta}{\delta}$	a	$\frac{h}{2}$	c	$a + \frac{h}{2}$	$\frac{h}{2} + c$	$a + h + c$

例 4.1. 下は $(a, h, c) = (78, -2 \cdot 53, 37)$ のときのフルヴィッツの表 [2, 98 頁].

Beispiel 1.

Die Form $(78, -53, 37)$ zu reduciren.

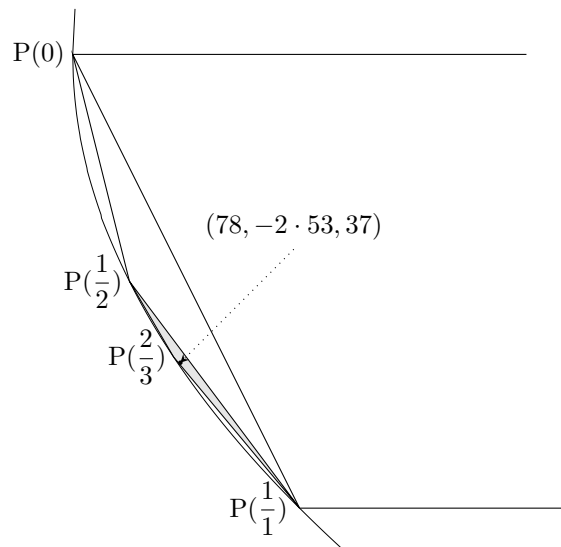
Man erhält folgende Tabelle:

r	p	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	78	-53	37	25	-16	9
$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	9	-16	37	-7	21	14
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	9	-7	14	2	7	9

Die gegebene Form geht also durch die Transformation $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in die reducirte Form $(9, -7, 14)$ über.

$(78, -106, 37) \xrightarrow{R} (9, -32, 37) \xrightarrow{L} (9, -14, 14)$ と簡約化され, $RL = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ である.

上の表の最終行は, 点 $(78, -2 \cdot 53, 37)$ が基本三角形 $\triangle P\left(\frac{1}{1}\right)P\left(\frac{2}{3}\right)P\left(\frac{1}{2}\right)$ の内部にあることを示す.



例 4.2. 下は $(a, h, c) = (41, 2 \cdot 35, 30)$ のときのフルヴィッツの表 [2, 98 頁].

Beispiel 2.

Die Form $(41, 35, 30)$ zu reduciren.

Man erhält in diesem Falle folgende Tabelle:

r	p	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{0}$	30	-35	41	-5	6	1
$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{1}$	30	-5	1	25	-4	21
$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{1}$	21	-4	1	17	-3	14
$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{1}$	14	-3	1	11	-2	9
$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{1}$	9	-2	1	7	-1	6
$\frac{-4}{5}$	$\frac{-1}{1}$	6	-1	1	5	0	5

Die gegebene Form geht also durch die Transformation $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ in die reducirte Form $(6, -1, 1)$ über.

判別式が -20 の正定値原始形式 $(41, 70, 30)$ は

$$(41, 70, 30) \xrightarrow{S} (30, -70, 41) \xrightarrow{L} (30, -10, 1) \xrightarrow{R} (21, -8, 1) \xrightarrow{R} (14, -6, 1) \xrightarrow{R} (9, -2, 1) \xrightarrow{R} (6, -2, 1)$$

により被約形式 $(6, -2, 1)$ に変換され, このときの変換行列は

$$SLRRRR = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

である.

表の最終行から得られる分数列 $\frac{-4}{5} < \frac{-4-1}{5+1} < \frac{-1}{1}$ に対応する K の点は, $P\left(\frac{-4}{5}\right) = (25, 40, 16)$, $P\left(\frac{-5}{6}\right) = (36, 60, 25)$, $P\left(\frac{-1}{1}\right) = (1, 2, 1)$ である. したがって, 基本弦 $P\left(\frac{-5}{6}\right)P\left(\frac{-1}{1}\right)$ の式は

$$\begin{vmatrix} 36 & 60 & 25 \\ 1 & 2 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 60 & 25 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} x_0 - \begin{vmatrix} 36 & 25 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} 36 & 60 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} x_2 = 10x_0 - 11x_1 + 12x_2 = 0$$

である. $10 \times 41 - 11 \times 70 + 12 \times 30 = 0$ であるから, 点 $(41, 70, 30)$ は基本三角形 $\triangle P\left(\frac{-4}{5}\right)P\left(\frac{-5}{6}\right)P\left(\frac{-1}{1}\right)$ と基本三角形 $\triangle P\left(\frac{-5}{6}\right)P\left(\frac{-6}{7}\right)P\left(\frac{-1}{1}\right)$ の共通の辺 $P\left(\frac{-5}{6}\right)P\left(\frac{-1}{1}\right)$ 上にあることがわかる.

5 主類, 反対類, アンビグ類

定義 5.1. n が, 整数 ξ, η により, $n = a\xi^2 + h\xi\eta + c\eta^2$ と表せるとき, 2次形式 $[[a, h, c]]$ は n を表す, という.

定義 5.2. 整数 $d < 0$ が

- (1) $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき, $[[1, -1, \frac{1-d}{4}]] = x^2 - xy + \frac{1-d}{4}y^2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & (1-d)/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を,
- (2) $d \equiv 0 \pmod{4}$ のとき, $[[1, 0, -\frac{d}{4}]] = x^2 - \frac{d}{4}y^2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を,

それぞれ, d に付随する主形式 (Hauptform) とよび, 主形式を含む正式同値類を主類 (Hauptklasse) とよぶ.

補足 5.1. (1) $d < 0$ に付随する主形式は判別式が d の正定値原始形式である.

(2) 定義 5.2 の主形式は定義 3.7 の意味で被約である. すなわち, $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき $(1, -1, \frac{1-d}{4}) \in \Delta_0$ であり, $d \equiv 0 \pmod{4}$ のとき $(1, 0, -\frac{d}{4}) \in \Delta_0$ である.

主形式は 1 を表す. 逆に,

定理 5.1. 判別式が $d < 0$ の正定値原始形式は, 1 を表すならば, d に付随する主形式と正式同値である.

証明. 整数 α, γ が $1 = a\alpha^2 + h\alpha\gamma + c\gamma^2$ をみたすとする.

(1) $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき. h は奇数であり, $\beta = \frac{-1-h}{2}\alpha - c\gamma, \delta = a\alpha + \frac{-1+h}{2}\gamma$ とおくと, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ である. $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ とおくと, $X^T \begin{bmatrix} a & h/2 \\ h/2 & c \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & (1-d)/4 \end{bmatrix}$ である.

(2) $d \equiv 0 \pmod{4}$ のとき. h は偶数であり, $\beta = -\frac{h}{2}\alpha - c\gamma, \delta = a\alpha + \frac{h}{2}\gamma$ とおくと, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ である. $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ とおくと, $X^T \begin{bmatrix} a & h/2 \\ h/2 & c \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d/4 \end{bmatrix}$ である. \square

定理 5.2. 主類は 2 次形式の合成に関する単位元である.

証明. 判別式が d の $[[a, h, c]]$ と d に付随する主形式の合成 (の 1 つ) が $[[a, h, c]]$ になることを示す.

(1) $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき. h は奇数であり, 変数変換 $X = xx' + \frac{-h-1}{2}xy' - cyy', Y = axy' + yx' + \frac{h-1}{2}yy'$ により, $aX^2 + hXY + cY^2 = (ax^2 + hxy + cy^2)(x'^2 - x'y' + \frac{1-d}{4}y'^2)$ となる.

(2) $d \equiv 0 \pmod{4}$ のとき. h は偶数であり, 変数変換 $X = xx' - \frac{h}{2}xy' - cyy', Y = axy' + yx' + \frac{h}{2}yy'$ により, $aX^2 + hXY + cY^2 = (ax^2 + hxy + cy^2)(x'^2 - \frac{d}{4}y'^2)$ となる. \square

定義 5.3. (1) 正定値原始形式 $f = [[a, h, c]]$ に対して, $[[c, h, a]]$ を, f の反対形式とよぶ.

(2) $[[a, h, c]]$ の正式同値類 F に対して, $[[c, h, a]]$ の正式同値類を F の反対類とよび, F^{-1} と表す.

定理 5.3. 正式同値類 C の反対類は 2 次形式の合成に関して C の逆元である.

証明. $[[a, h, c]]$ と $[[c, h, a]]$ の合成が主形式と正式同値になることを示せばよい.

変数変換 $X = axy' + cyx' + hyy'$, $Y = -xx' + yy'$ により,

$$X^2 - hXY + acY^2 = (ax^2 + hxy + cy^2)(cx'^2 + hx'y' + ay'^2)$$

となり, 左辺の $[[1, -h, ac]]$ は 1 を表すから定理 5.1 により主形式と正式同値である. \square

$[[a, h, c]]$ が, その反対形式 $[[c, h, a]]$ と正式同値な $[[a, -h, c]]$ と, 正式同値になる場合がある. 例えば, $[[a, ka, c]]$ と $[[a, -ka, c]]$ は, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ により非正式同値であり, $\begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ により正式同値でもある.

定義 5.4. (1) h が a で割り切れるような $[[a, h, c]]$ をアンビグ形式 (ambige Form) とよぶ.

(2) 正式同値類 C が $C = C^{-1}$ をみたすとき, C をアンビグ類 (ambige Klasse) とよぶ.

アンビグ形式の正式同値類はアンビグ類であるが, 逆も成り立つ.

定理 5.4. アンビグ類はアンビグ形式を含む.

証明. 定理 3.1 により, アンビグ類に属す被約な $f = [[a, h, c]]$ を選ぶ. f は f の反対形式 $g = [[c, h, a]]$ と正式同値であり, g も被約である.

(1) (a, h, c) が Δ_0 の辺上にある場合. 辺 $\{h = 0\}$ 上にあれば, $f = [[a, 0, c]]$ 自身がアンビグ形式である. 辺 $\{2a + h = 0\}$ 上にあれば $f = [[a, -2a, c]]$ 自身がアンビグ形式である. 辺 $\{h + 2c = 0\}$ 上にある場合は, $(a, -2c, c) \xrightarrow{R} (a - c, 0, c)$ となり, $[[a, -2c, c]]$ はアンビグ形式 $[[a - c, 0, c]]$ に正式変換される.

(2) (a, h, c) が Δ_0 の内部にある場合. g の定める点 $(c, h, a) \in \Delta_0$ は定理 6.1 (後述) により, 次のいずれかと一致する.

$$(a, h, c), (c, -h - 2c, a + h + c), (a + h + c, -2a - h, a)$$

ゆえに, $a = c$ または $h + c = 0$ または $a + h = 0$ である. $a = c$ のときは, $(a, h, a) \xrightarrow{LS} (2a + h, -2a - h, a)$ となり, アンビグ形式 $[[2a + h, -2a - h, c]]$ に正式変換される. $h + c = 0$ のときは, $(a, -c, c) \xrightarrow{RS} (c, -c, a)$ となり, アンビグ形式 $[[c, -c, a]]$ に正式変換される. $a + h = 0$ のときは, f 自身がアンビグ形式 $[[a, -a, c]]$ である. \square

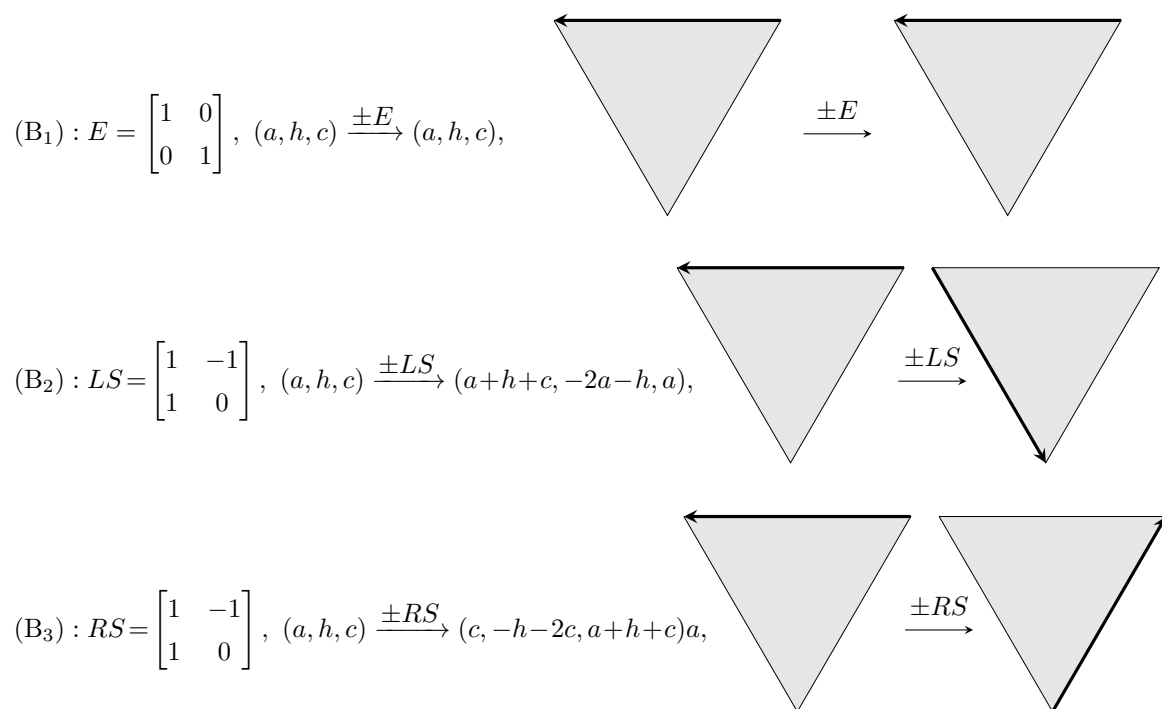
補足 5.2. アンビグ形式とアンビグ類の定義 5.4 は d に依存しない. 判別式 d が一般の場合にもアンビグ類はアンビグ形式を含むことが示される. d が正の非平方数の場合に, 被約形式鎖 [2, Definition 7] を用いた証明が, 前田博信, 『判別式が正の非平方数の整数係数 2 元 2 次形式の周期について』, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 45 (2024), 23–47, にある.

6 正式同値な被約形式

基本三角形 $\Delta_0 = \triangle P(0)P(1)P(\infty)$ に含まれる点で, $SL_2(\mathbb{Z})$ による作用で互いに移り合う点を求める. 点が Δ_0 の内部 (Innere) にある場合と, Δ_0 の辺 (Seite) 上にある場合とでは移り合う点の個数が異なる.

6.1 内部にある場合

\mathbf{H}^2 の $SL_2(\mathbb{Z})$ による変換は、理想境界 K の向きを保つ。ゆえに、三角形 Δ_0 を Δ_0 に移す変換は、頂点の偶置換を引き起こし、恒等変換または、 Δ_0 の中心 $(1, -1, 1)$ を中心とする周期が 3 の回転である。



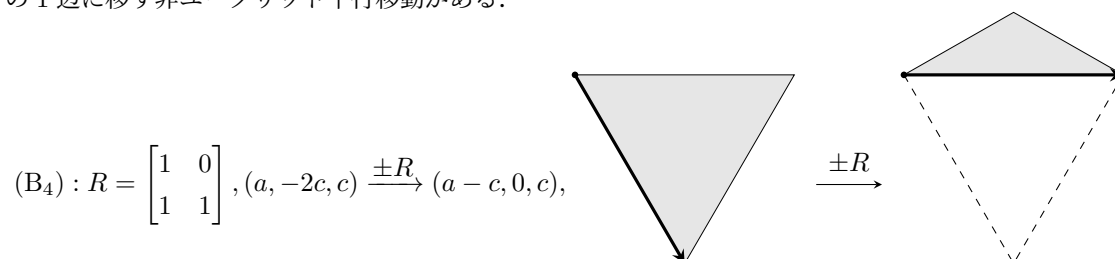
補足 6.1. Δ_0 の中心 $(1, -1, 1)$ に対応する正定値原始形式、すなわち、判別式が -3 の $x^2 - xy + y^2$ は位数が 3 の変換 (B2) で不変であるが、 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用では位数が 6 の巡回群

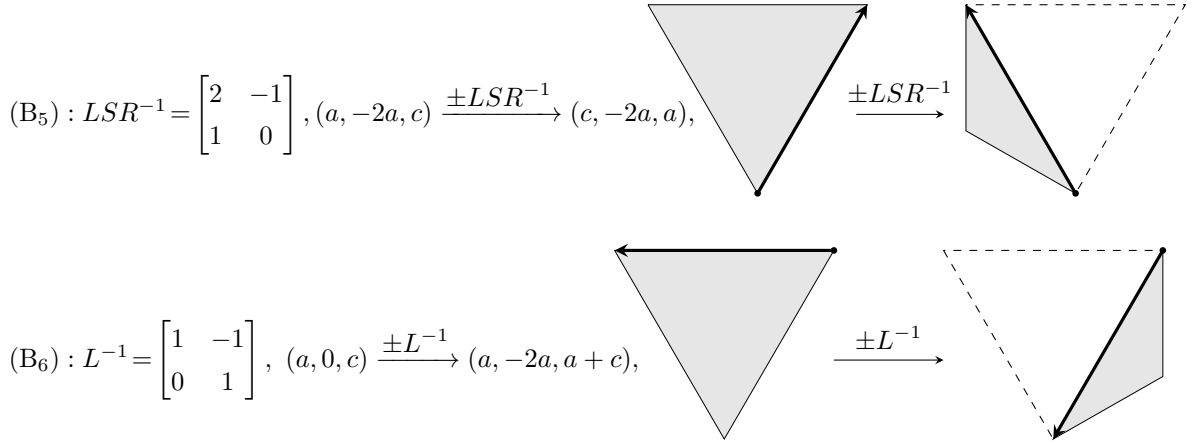
$$\left\{ T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, T^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, T^4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, T^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, T^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E \right\}$$

が $x^2 - xy + y^2$ の固定化部分群になる。

6.2 辺上にある場合

$SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で、 Δ_0 の 1 辺が 1 辺に移される変換には、 Δ_0 の回転の他に、 Δ_0 の 1 辺をそれと平行な別の 1 辺に移す非ユークリッド平行移動がある。





補足 6.2. 辺 $P(\infty)P(0)$ の中点 $(1, 0, 1)$ に対応する正定値原始形式, すなわち, 判別式が -4 の $x^2 + y^2$ は位数が 2 の $1/2$ 回転 S で不変であるが, $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用では位数が 4 の巡回群

$$\mathcal{G} = \left\{ S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, S^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E \right\}$$

が $x^2 + y^2$ の固定化部分群である. 辺 $P(0)P(1)$ の中点 $(2, -2, 1) = 2x^2 - 2xy + y^2$ は, $(1, 0, 1)$ に正式変換 $U = RS = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ で移るから, その固定化部分群は \mathcal{G} を U で変換した

$$U^{-1}\mathcal{G}U = \left\{ S_1 = U^{-1}SU = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, S_1^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S_1^3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, S_1^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E \right\}$$

である. 同様に, 辺 $P(1)P(\infty)$ の中点 $(1, -2, 2) = x^2 - 2xy + 2y^2$ の固定化部分群は \mathcal{G} を $V = LS = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ で変換した

$$V^{-1}\mathcal{G}V = \left\{ S_2 = V^{-1}SV = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, S_2^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S_2^3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, S_2^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E \right\}$$

である.

以上により, 次が成り立つ. ただし, フルヴィッツ [2, 94 頁] は $h = 2b$ (偶数) の場合のみを扱っている.

定理 6.1. $f = [a, h, c]$ は被約な正定値原始形式とし, (a, h, c) が $(1, -1, 1)$ を除いた Δ_0 の内部にあるとする. このとき, f と正式同値な被約な正定値原始形式は Δ_0 の内部にある次の 3 つに対応する.

$$(a, h, c), (c, -h - 2c, a + h + c), (a + h + c, -2a - h, a)$$

定理 6.2. $f = [a, h, c]$ は被約な正定値原始形式とし, (a, h, c) が $(1, -2, 2), (1, 0, 1), (2, -2, 1)$ を除いた Δ_0 の辺上にあるとする. このとき, f と正式同値な被約な正定値原始形式は Δ_0 の辺上にある

$$(a, 0, c), (a + c, -2a, a), (c, -2c, a + c), (c, 0, a), (a + c, -2c, c), (a, -2a, a + c)$$

の 6 つに対応し, f はこのうちの 1 つに対応する.

定理 6.1, 定理 6.2 より, 正定値原始形式の各正式同値類に属す被約形式の個数は 1, 3 または 6 である.

例 6.1. 判別式が -23 の被約な正定値原始形式に対応する点 $(a, h, c) \in \Delta_0$ は, 内部に 9 個あり, 次の 3 つの正式同値類に分けられる.

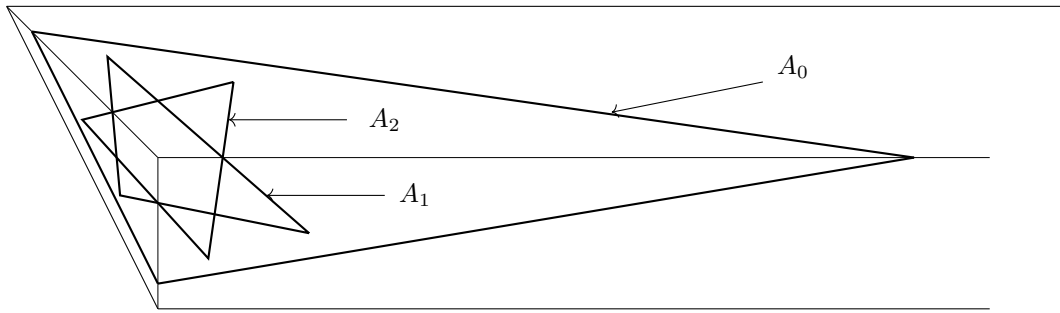
$$A_0 = \{(1, -1, 6), (6, -11, 6), (6, -1, 1)\} \text{ (主類)}$$

$$A_1 = \{(2, -3, 4), (4, -5, 3), (3, -1, 2)\}$$

$$A_2 = \{(4, -3, 2), (3, -5, 4), (2, -1, 3)\}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ の判別式は -23 であるから $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ の類数が 3 であることがわかる.

下は $(a, h, c) \in \Delta_0$ を点 $\left(\frac{c}{a}, \frac{h}{a}\right)$ で表して, 正式同値な点を線分で結んだ図.



例 6.2. 判別式が $-17 \times 4 = -68$ の被約な正定値原始形式に対応する $(a, h, c) \in \Delta_0$ は 15 個ある. 内部に 9 個, 辺上に 6 個あり, 次の 4 つの正式同値類に分けられる.

$$A_0 = \{(1, 0, 17), (17, -34, 18), (18, -2, 1), (17, 0, 1), (1, -2, 18), (18, -34, 17)\} \text{ (主類)}$$

$$A_2 = \{(2, -2, 9), (9, -16, 9), (9, -2, 2)\} \text{ (アンビグ類)}$$

$$A_1 = \{(3, -4, 7), (7, -10, 6), (6, -2, 3)\}$$

$$A_3 = \{(7, -4, 3), (3, -2, 6), (6, -10, 7)\}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$ の判別式は -68 であるから, $\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$ の類数が 4 であることがわかる.

例 6.3. 判別式が -199 の被約な正定値原始形式に対応する $(a, h, c) \in \Delta_0$ は 27 個ある. これらはすべて Δ_0 の内部にあり, 次の 9 つの正式同値類に分けられる.

$$A_0 = \{(1, -1, 50), (50, -99, 50), (50, -1, 1)\}$$

$$A_1 = \{(5, -9, 14), (14, -19, 10), (10, -1, 5)\}$$

$$A_8 = \{(14, -9, 5), (10, -19, 14), (5, -1, 10)\}$$

$$A_2 = \{(2, -1, 25), (25, -49, 26), (26, -3, 2)\}$$

$$A_7 = \{(25, -1, 2), (26, -49, 25), (2, -3, 26)\}$$

$$A_3 = \{(7, -5, 8), (8, -11, 10), (10, -9, 7)\}$$

$$A_6 = \{(8, -5, 7), (10, -11, 8), (7, -9, 10)\}$$

$$A_4 = \{(4, -5, 14), (14, -23, 13), (13, -3, 4)\}$$

$$A_5 = \{(14, -5, 4), (13, -23, 14), (4, -3, 13)\}$$

A_0 は主類であり、ただ 1 つのアンビグ類である。 $i = 1, 2, 3, 4$ のとき、 A_{9-i} と A_i は互いに他の反対類であるから、合成に関して $A_i A_{9-i} = A_0$ である。

変数変換 $X = -5xy' - 5yx' + 9yy'$, $Y = xx' - xy' - yx' - yy'$ により、

$$2X^2 - XY + 25Y^2 = (5x^2 - 9xy + 14y^2)(5x'^2 - 9x'y' + 14y'^2) \text{ となるから } A_1 A_1 = A_2 \text{ である.}$$

変数変換 $X = xx' + 2xy' - 7yy'$, $Y = 5xy' + 2yx' - 5yy'$ により、

$$10X^2 - 9XY + 7Y^2 = (5x^2 - 9xy + 14y^2)(2x'^2 - x'y' + 25y'^2) \text{ となるから } A_1 A_2 = A_3 \text{ である.}$$

変数変換 $X = 2xx' - xy' - 2yx' - yy'$, $Y = xx' + 2xy' + 4yx' - 5yy'$ により、

$$13X^2 - 3XY + 4Y^2 = (5x^2 - 9xy + 14y^2)(10x'^2 - 9x'y' + 7y'^2) \text{ となるから } A_1 A_3 = A_4 \text{ である.}$$

変数変換 $X = 4xx' - xy' - 5yx' - 2yy'$, $Y = xx' + xy' + 2yx' - 2yy'$ により、

$$4X^2 - 3XY + 13Y^2 = (5x^2 - 9xy + 14y^2)(13x'^2 - 3x'y' + 4y'^2) \text{ となるから } A_1 A_4 = A_5 \text{ である.}$$

変数変換 $X = xx' + 2xy' + yx' - 5yy'$, $Y = -xx' + 3xy' + 3yx' - yy'$ により、

$$8X^2 - 5XY + 7Y^2 = (5x^2 - 9xy + 14y^2)(4x'^2 - 3x'y' + 13y'^2) \text{ となるから } A_1 A_5 = A_6 \text{ である.}$$

変数変換 $X = 2xx' + 3xy' + 4yx' - 7yy'$, $Y = -xx' + xy' + 2yx'$ により、

$$2X^2 - 3XY + 26Y^2 = (5x^2 - 9xy + 14y^2)(8x'^2 - 5x'y' + 7y'^2) \text{ となるから } A_1 A_6 = A_7 \text{ である.}$$

変数変換 $X = 5xy' + 2yx' - 6yy'$, $Y = -xx' + xy' + yx' + 4yy'$ により、

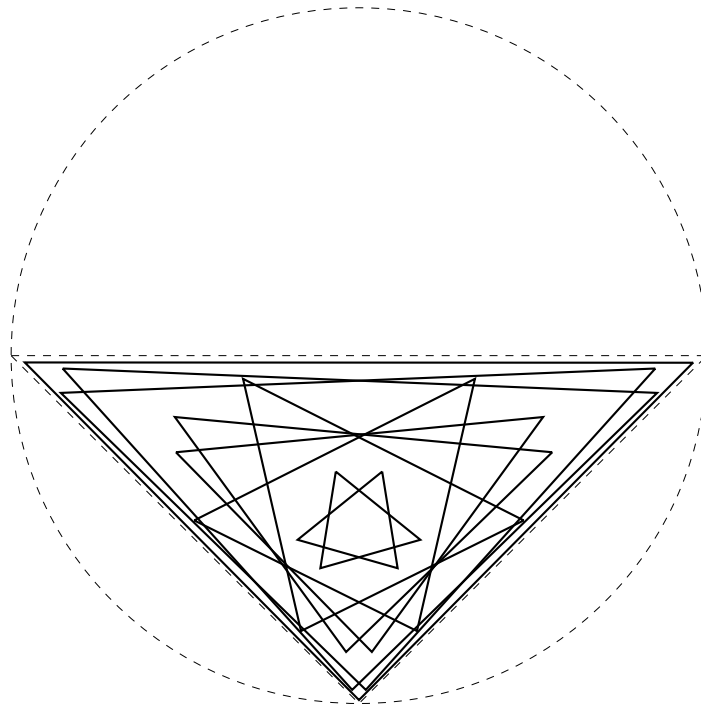
$$5X^2 - XY + 10Y^2 = (5x^2 - 9xy + 14y^2)(2x'^2 - 3x'y' + 26y'^2) \text{ となるから } A_1 A_7 = A_8 \text{ である.}$$

変数変換 $X = 5xx' - 4yx' - 10yy'$, $Y = xy' + yx' - yy'$ により、

$$X^2 - XY + 50Y^2 = (5x^2 - 9xy + 14y^2)(5x'^2 - x'y' + 10y'^2) \text{ となるから } A_1 A_8 = A_0 \text{ である.}$$

ゆえに、 $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\} = \{A_1^i ; i = 1, \dots, 9\}$ は 9 次巡回群 $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の構造をもつ。

下は $(a, h, c) \in \Delta_0$ を点 $\left(\frac{-a+c}{a+c}, \frac{h}{a+c}\right)$ で表して、正式同値な点を線分で結んだ図。



例 6.4. 判別式が $-29 \times 4 = -116$ の被約な正定値原始形式に対応する $(a, h, c) \in \Delta_0$ は 21 個ある. 内部に 15 個, 辺上に 6 個あり, 次の 6 つの正式同値類に分けられる.

$$A_0 = \{(1, 0, 29), (29, -58, 30), (30, -2, 1), (29, 0, 1), (1, -2, 30), (30, -58, 29)\} \quad (\text{主類})$$

$$A_3 = \{(2, -2, 15), (15, -28, 15), (15, -2, -2)\} \quad (\text{アンビグ類})$$

$$A_1 = \{(3, -4, 11), (11, -18, 10), (10, -2, 3)\}$$

$$A_5 = \{(11, -4, 3), (10, -18, 11), (3, -2, 10)\}$$

$$A_2 = \{(5, -8, 9), (9, -10, 6), (6, -2, 5)\}$$

$$A_4 = \{(9, -8, 5), (6, -10, 9), (5, -2, 6)\}$$

変数変換 $X = 3xy' + 3yx' - 4yy'$, $Y = -xx' + 2xy' + 2yx' + yy'$ により,

$$5X^2 - 8XY + 9Y^2 = (3x^2 - 4xy + 11y^2)(3x'^2 - 4x'y' + 11y'^2) \quad \text{となるから } A_1 A_1 = A_2 \text{ である.}$$

変数変換 $X = 3xy' + 5yx' - 6yy'$, $Y = -xx' + xy' + yx' + yy'$ により,

$$2X^2 - 2XY + 15Y^2 = (3x^2 - 4xy + 11y^2)(5x'^2 - 8x'y' + 9y'^2) \quad \text{となるから } A_1 A_2 = A_3 \text{ である.}$$

変数変換 $X = -3xy' - 2yx' + 3yy'$, $Y = xx' - xy' - yx' - 4yy'$ により,

$$5X^2 - 2XY + 6Y^2 = (3x^2 - 4xy + 11y^2)(2x'^2 - 2x'y' + 15y'^2) \quad \text{となるから } A_1 A_3 = A_4 \text{ である.}$$

変数変換 $X = xx' + 2xy' + 3yx' - 4yy'$, $Y = -xx' + xy' + 2yx' + yy'$ により,

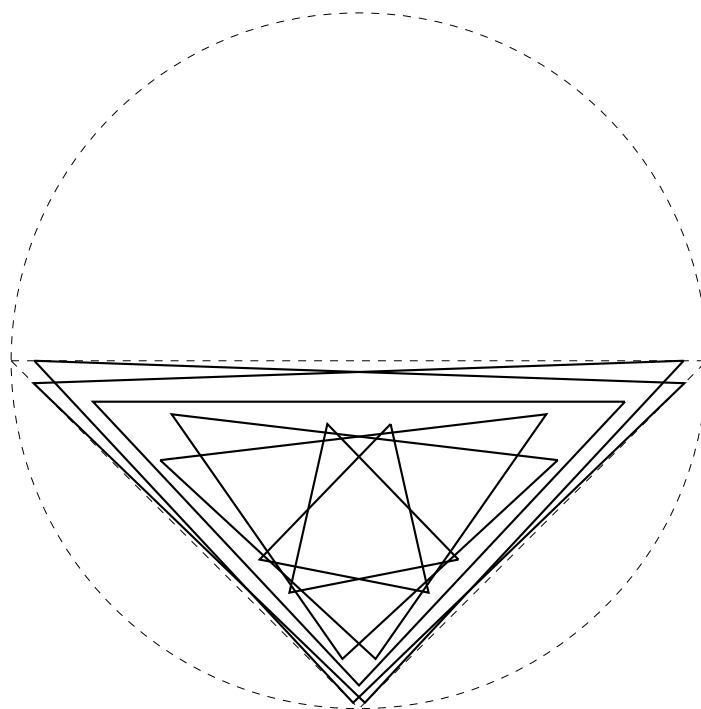
$$3X^2 - 2XY + 10Y^2 = (3x^2 - 4xy + 11y^2)(5x'^2 - 2x'y' + 6y'^2) \quad \text{となるから } A_1 A_4 = A_5 \text{ である.}$$

変数変換 $X = 3xx' - yx' - 10yy'$, $Y = xy' + yx' - yy'$ により,

$$X^2 - 2XY + 30Y^2 = (3x^2 - 4xy + 11y^2)(3x'^2 - 2x'y' + 10y'^2) \quad \text{となるから } A_1 A_5 = A_0 \text{ である.}$$

したがって, $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\} = \{A_1^i; i = 1, \dots, 6\}$ は 6 次巡回群 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の構造をもつ.

下は $(a, h, c) \in \Delta_0$ を点 $\left(\frac{-a+c}{a+c}, \frac{h}{a+c}\right)$ で表して, 正式同値な点を線分で結んだ図.



7 主類に対応する双曲等辺三角形

(I) $0 > d = h^2 - 4ac \equiv 1 \pmod{4}$ の場合. このとき h は奇数であり, 判別式が d の被約形式 $[[a, h, c]]$ に対応する点 (a, h, c) はすべて Δ_0 の内部にある. このうち, 主形式 $[[1, -1, (1-d)/4]]$ と正式同値な被約形式に対応する点は, $d \neq -3$ のときは,

$$P_1 = \left(1, -1, \frac{1-d}{4}\right), P_2 = \left(\frac{1-d}{4}, \frac{1+d}{2}, \frac{1-d}{4}\right), P_3 = \left(\frac{1-d}{4}, -1, 1\right)$$

の 3 個であり, $d = -3$ のときは $(1, -1, 1)$ の 1 個である.

$d \neq -3$ のときの双曲等辺三角形 $\Delta_{P_1 P_2 P_3}$ の 1 辺の非ユークリッド長さを ρ とする. 直線 $P_1 P_2$ と $K = \{x_1^2 - 4x_0 x_2 = 0\}$ の交点を Q_{12}, R_{12} とすると, $\rho = \frac{1}{2} \left| \log \frac{Q_{12} P_1}{Q_{12} P_2} \cdot \frac{R_{12} P_2}{R_{12} P_1} \right|$ である [3, 180 頁].

$X = x_2/x_0, Y = x_1/x_0$ とおいて, (X, Y) 座標で計算すると

$$P_1 = \left(\frac{1-d}{4}, -1\right), P_2 = \left(1, \frac{2+2d}{1-d}\right),$$

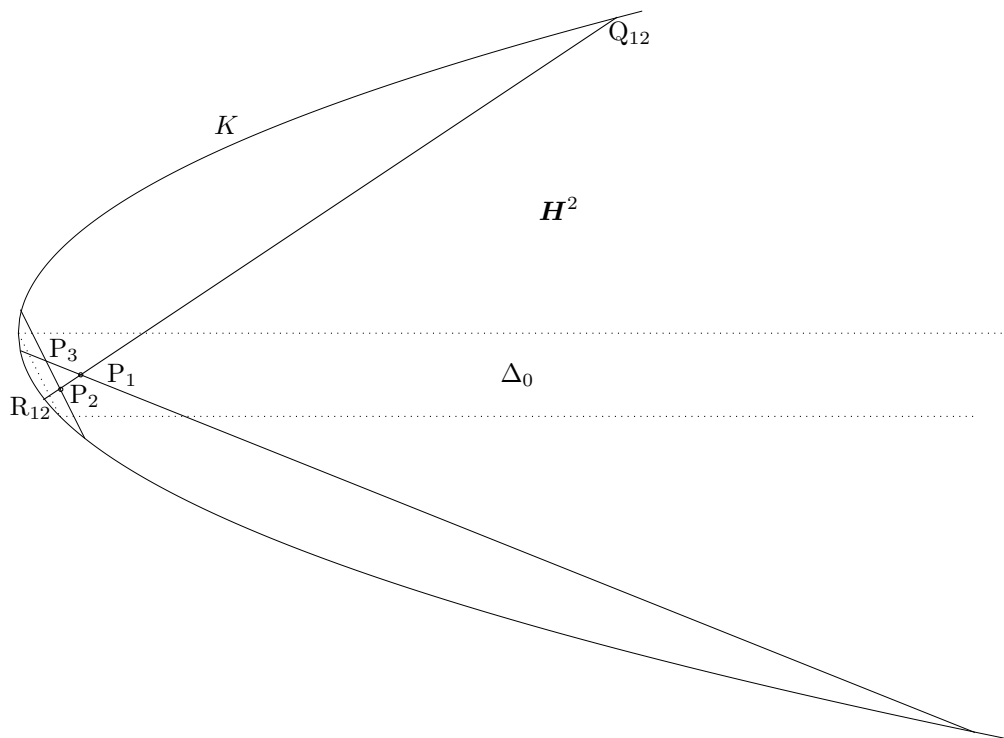
$$Q_{12} = \left(\frac{1}{8}(1-d)(5-d + \sqrt{(1-d)(9-d)}), \frac{1}{2}(1-d + \sqrt{(1-d)(9-d)})\right),$$

$$R_{12} = \left(\frac{1}{8}(1-d)(5-d - \sqrt{(1-d)(9-d)}), \frac{1}{2}(1-d - \sqrt{(1-d)(9-d)})\right),$$

であるから,

$$\rho = \frac{1}{2} \log \frac{9 - 2d + d^2 - (3+d)\sqrt{(1-d)(9-d)}}{9 - 2d + d^2 + (3+d)\sqrt{(1-d)(9-d)}} = \log \frac{\sqrt{(1-d)(9-d)} - 3 - d}{\sqrt{(1-d)(9-d)} + 3 + d}$$

となる ($d < -3$ に注意する). なお, $d \equiv 1 \pmod{4}$ かつ $d \rightarrow -\infty$ のとき, $\rho \rightarrow +\infty$ がわかる.



補足 7.1. 円盤モデルでは複比を用いなくても ρ を計算できる.

$D = \{-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 < 0\}$ の 2 つの点 $P = (p_0, p_1, p_2)$ と $Q = (q_0, q_1, q_2)$ に対して

$$\langle P, Q \rangle = -p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2$$

とおくと, P と Q の非ユークリッド距離 $d(P, Q)$ は

$$\cosh d(P, Q) = \frac{|\langle P, Q \rangle|}{\sqrt{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}}$$

で与えられる [3, 188 頁]. $d < -3$ のとき, \mathbf{H}^2 の P_1, P_2, P_3 に対応する D の点は,

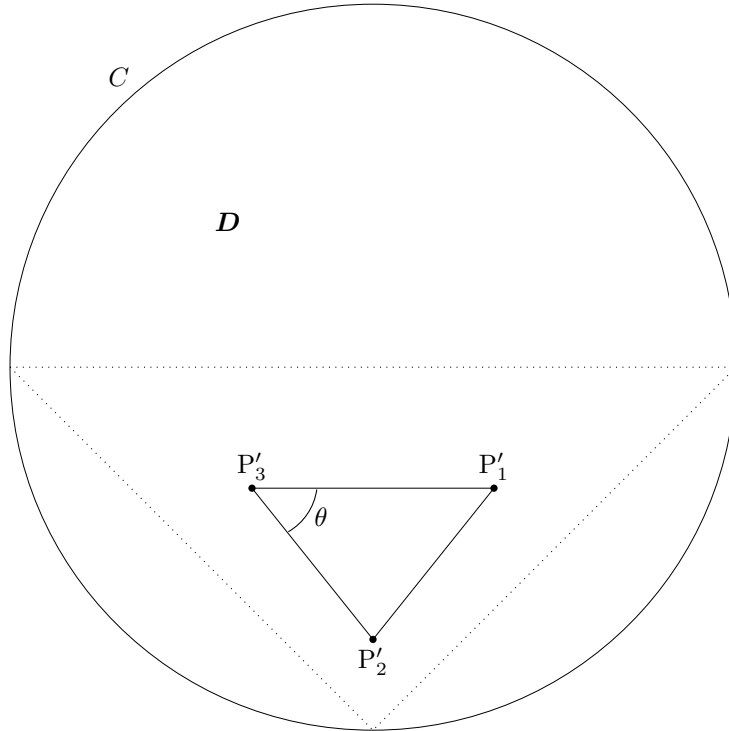
$$P'_1 = \left(\frac{5-d}{4}, -1, \frac{-3-d}{4} \right), P'_2 = \left(\frac{1-d}{2}, \frac{1+d}{2}, 0 \right), P'_3 = \left(\frac{5-d}{4}, -1, \frac{3+d}{4} \right)$$

である. したがって,

$$\langle P'_1, P'_2 \rangle = \frac{-9 + 2d - d^2}{8}, \quad \langle P'_1, P'_1 \rangle = d, \quad \langle P'_2, P'_2 \rangle = d \text{ より, } \cosh \rho = \frac{9 - 2d + d^2}{-8d} > 1 \text{ となり,}$$

$$\rho = \log \frac{9 - 2d + d^2 - (3+d)\sqrt{(1-d)(9-d)}}{-8d} = \log \frac{\sqrt{(1-d)(9-d)} - 3 - d}{\sqrt{(1-d)(9-d)} + 3 + d}$$

となる.



ここで, 双曲等辺三角形 $\triangle P'_1 P'_2 P'_3$ の内角 θ を計算する.

一般に, $D \subset \mathbf{P}^2$ の 2 点, $U = (u_0, u_1, u_2)$, $V = (v_0, v_1, v_2)$ を通る直線 UV の方程式は

$$\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} y_0 - \begin{vmatrix} u_0 & u_2 \\ v_0 & v_2 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{vmatrix} y_2 = 0$$

であるから、直線 UV の C に関する極 (Pol) の斉次座標は $\left(\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_0 & u_2 \\ v_0 & v_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{vmatrix} \right)$ である。したがって、直線 $P'_1P'_2$, $P'_2P'_3$, $P'_3P'_1$ の極 Q_3 , Q_1 , Q_2 の斉次座標は、

$$\begin{aligned} Q_3 &= (d^2 + 4d + 3, d^2 + 4d - 3, -d^2 + 9), \\ Q_1 &= (d^2 + 4d + 3, d^2 + 4d - 3, d^2 - 9), \\ Q_2 &= (-4d - 12, d^2 - 2d - 15, 0) \end{aligned}$$

である。したがって、非ユークリッド角 $\theta = \angle P'_1P'_3P'_2$ は [3, 188 頁] より

$$\cos \theta = \frac{|\langle Q_1, Q_2 \rangle|}{\sqrt{\langle Q_1, Q_1 \rangle \langle Q_2, Q_2 \rangle}} = \frac{d^2 - 2d + 9}{d^2 - 10d + 9} < 1$$

をみます。一方、 $\frac{d^2 - 2d + 9}{d^2 - 10d + 9} - \frac{1}{2} = \frac{(d+3)^2}{2(d^2 - 10d + 9)} > 0$ であるから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ である。特に、 $d \equiv 1 \pmod{4}$ かつ $d \rightarrow -\infty$ のとき、 $\theta \rightarrow 0$ である。

(II) $0 > d = h^2 - 4ac \equiv 0 \pmod{4}$ の場合。判別式 d の主形式に対応する点 $(1, 0, -d/4)$ は Δ_0 の辺上にあるから、主類に属す被約形式に対応する点はすべて Δ_0 の辺上にある。これらは、

(II.1) $d \neq -4$ のときは、

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, 0, -\frac{d}{4}), P_2 = (1 - \frac{d}{4}, -2, 1), P_3 = (-\frac{d}{4}, \frac{d}{2}, 1 - \frac{d}{4}), \\ Q_1 &= (-\frac{d}{4}, 0, 1), Q_2 = (1 - \frac{d}{4}, -\frac{d}{2}, -\frac{d}{4}), Q_3 = (1, -2, 1 - \frac{d}{4}), \end{aligned}$$

の 6 個であり、 $\Delta P_1P_2P_3$ と $\Delta Q_1Q_2Q_3$ は非ユークリッド等辺三角形をなす。 $\Delta P_1P_2P_3$ と $\Delta Q_1Q_2Q_3$ は、直線 $y_0 - y_2 = 0$ を対称軸とする折り返し変換により、非ユークリッド合同である。

(II.2) $d = -4$ のときは、

$$R_1 = (1, 0, 1), R_2 = (1, -2, 2), R_3 = (2, -2, 1)$$

の 3 個であり、 $\Delta R_1R_2R_3$ は非ユークリッド等辺三角形である。

8 アンビグ類に属す被約形式

(1) $0 > d = h^2 - 4ac \equiv 1 \pmod{4}$ のとき。 $f = [a, h, c]$ を判別式が d のアンビグ類に属す被約形式とする。 f の反対形式 $g = [c, h, a]$ も被約であって f と正式同値であるから、定理 6.1 により、 g に対応する H^2 の点は次のどれかと等しい。

$$(a, h, c), (c, -h - 2c, a + h + c), (a + h + c, -2a - h, a)$$

$(c, h, a) = (a, h, c)$ の場合、 $a = c$ となるから、 $d = h^2 - 4a^2 = (h - 2a)(h + 2a)$ である。

$(c, h, a) = (c, -h - 2c, a + h + c)$ の場合、 $h = -c$ となるから、 $d = c^2 - 4ac = c(c - 4a)$ である。

$(c, h, a) = (a + h + c, -2a - h, a)$ の場合、 $h = -a$ となるから、 $d = a^2 - 4ac = a(a - 4c)$ である。

特に、 $-d$ が素数 p であり、 $-p \equiv 1 \pmod{4}$ の場合、判別式が $d = -p$ のアンビグ類は主類のみであることがわかる。また、アンビグ類以外の正式同値類は、存在すれば、その反対類と対になって現れる。したがって、 $-d$ が $p \equiv 3 \pmod{4}$ となる素数 p のとき、判別式 $d = -p$ の正式同値類の個数は奇数であることがわかる。

(2) $0 > d = h^2 - 4ac \equiv 0 \pmod{4}$ のとき. $f = [a, h, c]$ を判別式が d のアンビグ類に属す被約形式とし, 対応する H^2 の点を $P = (a, h, c) \in \Delta_0$ とする.

(2.1) P が Δ_0 の内部にある場合.

定理 5.4 により, $P = (a, -a, c)$ としてよい. $d = a^2 - 4ac = a(a - 4c)$ であるから, a が奇数であるとする. $d \equiv 1 \pmod{4}$ となり仮定に反する. ゆえに, $a = 2a'$ (偶数) でなければならない. 一方, c も偶数であるとする. $[a, -a, c]$ は原始的でなくなるから, c は奇数でなければならない. 特に, $-d/4 = -a'(a' - 2c)$ が素数 p のときは, $a' = 1, c = (1+p)/2$ となり, $f = [2, -2, (1+p)/2]$ となる. これが原始的であるためには, $-p \equiv 3 \pmod{4}$ であればよい.

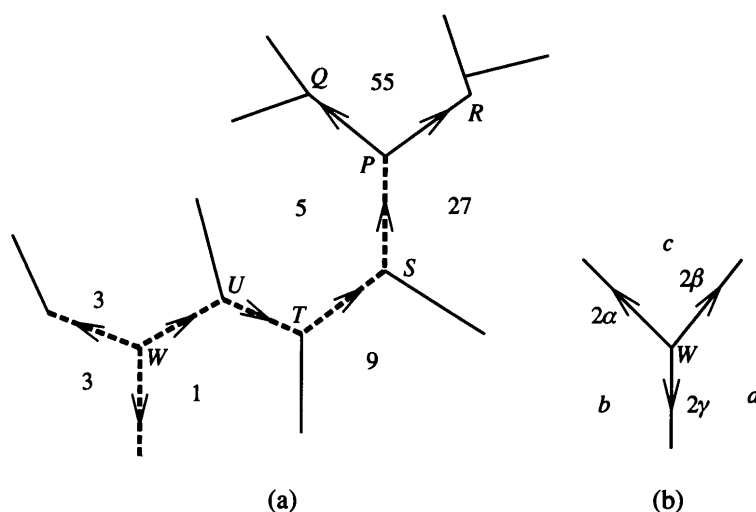
(2.2) P が Δ_0 の辺上にある場合.

P は, ある $(a'', 0, c'')$ と正式同値であるから, $d = -4a''c''$ より a'' と c'' は $-d/4$ の約数である. 特に, $-d/4$ が素数 q である場合, P は $(1, 0, q)$ または $(q, 0, 1)$ と正式同値となるから, f は主類に属す.

以上により, p が $p \equiv 1 \pmod{4}$ となる素数のとき, 判別式 $d = -4p$ のアンビグ類は, 主類 (Δ_0 の辺上) とアンビグ形式 $[2, -2, \frac{p+1}{2}]$ の類 (Δ_0 の内部) の 2 つである. このとき, 正式同値類の個数は偶数である.

9 コンウェイのトポグラフの湧き出し口との関係

コンウェイ [1] の 13 頁にある図 (a) は, 判別式が -11 の正定値原始形式 $[5, 23, 27]$ のトポグラフである.



We stop at W because all three arrows at W point away from W .
 We call a superbase W as in the figure (b) a *well* if the edge-marks $2\alpha, 2\beta,$ and 2γ are all associated to arrows pointing away from W . If

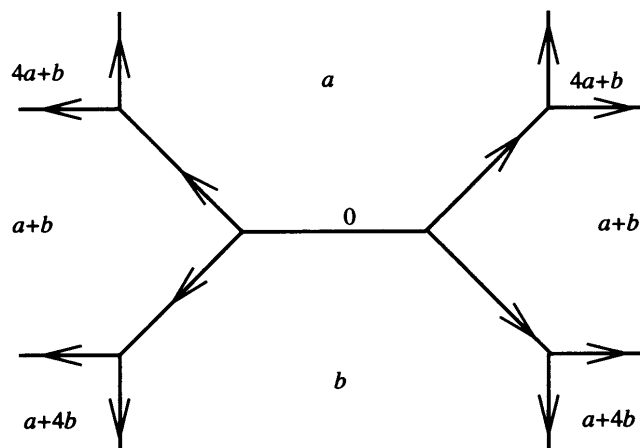
フルヴィッツの簡約アルゴリズムによれば

$$(5, 23, 27) \xrightarrow{S} (27, -23, 5) \xrightarrow{R} (9, -13, 5) \xrightarrow{R} (1, -3, 5) \xrightarrow{L} (1, -1, 3)$$

により単純湧き出し口 (simple well) W にたどり着く. 変換行列は $SRRL = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ である. すなわち,

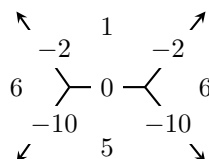
変数変換 $x = -2X - 3Y$, $y = X + Y$ により, $5x^2 + 23xy + 27y^2 = X^2 - XY + 3Y^2$ となる.

下図 [1, 17 頁] は中間係数 $h = 0$ の 2 次形式のトポグラフの 2 重湧き出し口 (double well) を表す.



A double well

例 9.1. 判別式が -20 の正定値原始形式の主類に属す被約形式 (6 つある) に対応する 2 重湧き出し口の図.



10 類数についての補足

判別式が $d < 0$ の正定値原始形式 $[[a, h, c]]$ が被約ならば, $h \leq 0$, $2a + h \geq 0$, $h + 2c \geq 0$ であるから,
 $-d = 4ac - h^2 = (2a + h - h)(2c + h - h) - h^2 = (2a + h)(2c + h) - h(2a + h + 2c + h) \geq -2h(a + h + c)$

となり, $d/2 \leq h \leq 0$ である. この範囲の整数 h に対して, $ac = (h^2 - d)/4$ をみたす整数 $a \geq 1$, $c \geq 1$ を求めて, $\gcd(a, h, c) = 1$ のものを選べば判別式が d の被約な正定値原始形式が全て求められる.

被約な正定値原始形式 $[[a, h, c]]$ のうちで, $h = 0$ または $2a + h = 0$ または $2c + h = 0$ をみたすものは Δ_0 の辺上にあり, その個数を S_d とする. それ以外のものは Δ_0 の内部にあるから, その個数を I_d とする. 定理 6.1, 定理 6.2 により, 判別式 $d \leq -5$ の正定値原始形式の正式同値類の個数 $h(d)$ は次式で与えられる.

$$h(d) = \frac{S_d}{6} + \frac{I_d}{3} \quad (19)$$

フルヴィッツ自身が言及 [2, 95 頁] しているように, 正定値原始形式 $[[a, h, c]]$ が被約である, という条件を, $\{h < 0, a + h \geq 0, h + c > 0\}$ または $\{h = 0, c \geq a\}$, とすれば正式同値類の代表を例外なく 1 つにすることもできる.

(2025 年 1 月 21 日提出, まえだひろのぶ, sugakugauss[at]gmail.com)

付録 平方因子を含まない m ($5 \leq m \leq 300$) について、虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の類数 $h(-m)$ を式 (19) により計算して $\{-m, h(-m)\}$ を出力するプログラムの例。

(Wolfram Mathematica 14.1.0 for Linux ARM (64-bit) / Raspberry Pi 5).

```

In[1]= klasse[D_] := ( disk = If[Mod[D, 4] == 2 || Mod[D, 4] == 3, 4*D, D];
      hStrecke = Range[0, -disk/2];
      mitteKoeffi[h_] := If[Mod[h*h - disk, 4] == 0, Divisors[(h*h - disk)/4], {}];
      quadraForm[a_, h_, c_] := If[GCD[a, h, c] > 1 || 2*a + h < 0 || 2*c + h < 0 || h > 0, {}, {{a, h, c}}];
      redForm[h_] := Map[quadraForm[#, -h, -(disk - h^2)/(4 #)] &, mitteKoeffi[h];
      gesamteFormen := Flatten[redForm/@ hStrecke, 2]; /. {} -> Sequence[];
      seiteForm[a_, h_, c_] := If[2*a + h == 0 || 2*c + h == 0 || h == 0, quadraForm[a, h, c], {}];
      seiteFormen[h_] := Map[seiteForm[#, -h, -(disk - h^2)/(4 #)] &, mitteKoeffi[h];
      gesamtSeiteFormen := Flatten[seiteFormen/@ hStrecke, 2];
      anzahlSeite := If[gesamtSeiteFormen == {}, 0, Length[gesamtSeiteFormen]];
      innereFormen = Complement[gesamtFormen, gesamtSeiteFormen];
      anzahlInnere := Length[innereFormen];
      anzahlSeite/6 + anzahlInnere/3
    );
nDisk = -Select[Range[5, 300], SquareFreeQ];
Partition[Transpose[{{nDisk, klasse/@ nDisk}}, 6] // Grid
  {-5, 2}  {-6, 2}  {-7, 1}  {-10, 2}  {-11, 1}  {-13, 2}
  {-14, 4}  {-15, 2}  {-17, 4}  {-19, 1}  {-21, 4}  {-22, 2}
  {-23, 3}  {-26, 6}  {-29, 6}  {-30, 4}  {-31, 3}  {-33, 4}
  {-34, 4}  {-35, 2}  {-37, 2}  {-38, 6}  {-39, 4}  {-41, 8}
  {-42, 4}  {-43, 1}  {-46, 4}  {-47, 5}  {-51, 2}  {-53, 6}
  {-55, 4}  {-57, 4}  {-58, 2}  {-59, 3}  {-61, 6}  {-62, 8}
  {-65, 8}  {-66, 8}  {-67, 1}  {-69, 8}  {-70, 4}  {-71, 7}
  {-73, 4}  {-74, 10}  {-77, 8}  {-78, 4}  {-79, 5}  {-82, 4}
  {-83, 3}  {-85, 4}  {-86, 10}  {-87, 6}  {-89, 12}  {-91, 2}
  {-93, 4}  {-94, 8}  {-95, 8}  {-97, 4}  {-101, 14}  {-102, 4}
  {-103, 5}  {-105, 8}  {-106, 6}  {-107, 3}  {-109, 6}  {-110, 12}
  {-111, 8}  {-113, 8}  {-114, 8}  {-115, 2}  {-118, 6}  {-119, 10}
  {-122, 10}  {-123, 2}  {-127, 5}  {-129, 12}  {-130, 4}  {-131, 5}
  {-133, 4}  {-134, 14}  {-137, 8}  {-138, 8}  {-139, 3}  {-141, 8}
  {-142, 4}  {-143, 10}  {-145, 8}  {-146, 16}  {-149, 14}  {-151, 7}
  {-154, 8}  {-155, 4}  {-157, 6}  {-158, 8}  {-159, 10}  {-161, 16}
  {-163, 1}  {-165, 8}  {-166, 10}  {-167, 11}  {-170, 12}  {-173, 14}
  {-174, 12}  {-177, 4}  {-178, 8}  {-179, 5}  {-181, 10}  {-182, 12}
  {-183, 8}  {-185, 16}  {-186, 12}  {-187, 2}  {-190, 4}  {-191, 13}
  {-193, 4}  {-194, 20}  {-195, 4}  {-197, 10}  {-199, 9}  {-201, 12}
  {-202, 6}  {-203, 4}  {-205, 8}  {-206, 20}  {-209, 20}  {-210, 8}
  {-211, 3}  {-213, 8}  {-214, 6}  {-215, 14}  {-217, 8}  {-218, 10}
  {-219, 4}  {-221, 16}  {-222, 12}  {-223, 7}  {-226, 8}  {-227, 5}
  {-229, 10}  {-230, 20}  {-231, 12}  {-233, 12}  {-235, 2}  {-237, 12}
  {-238, 8}  {-239, 15}  {-241, 12}  {-246, 12}  {-247, 6}  {-249, 12}
  {-251, 7}  {-253, 4}  {-254, 16}  {-255, 12}  {-257, 16}  {-258, 8}
  {-259, 4}  {-262, 6}  {-263, 13}  {-265, 8}  {-266, 20}  {-267, 2}
  {-269, 22}  {-271, 11}  {-273, 8}  {-274, 12}  {-277, 6}  {-278, 14}
  {-281, 20}  {-282, 8}  {-283, 3}  {-285, 16}  {-286, 12}  {-287, 14}
  {-290, 20}  {-291, 4}  {-293, 18}  {-295, 8}  {-298, 6}  {-299, 8}

```

Out[3]=