

関孝和と Bézout の終結式の理論の比較

上野 健爾

目次

1	関孝和の終結式の理論	3
1.1	関孝和が受け継いだ中国伝統数学	3
1.2	天元術	6
1.3	天元術と関孝和の傍書法	8
1.4	関孝和の終結式の理論	9
2	Bézout の終結式の理論	14
2.1	Bézout が受け継いだ数学	14
2.2	Bézout の行列式の定義	16
2.3	Bézout の終結式	18
3	まとめ	21

はじめに

1683 年に関孝和は「解伏題之法」の重訂を行い、終結式の理論を完成させた。関の理論では連立高次方程式

$$\begin{aligned}f(x, y) &= a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \cdots + a_n(x)y^n \\g(x, y) &= b_0(x) + b_1(x)y + b_2(x)y^2 + \cdots + b_n(x)y^n\end{aligned}$$

から y を消去して x のみの多項式 (終結式) を定義するために、連立高次方程式から y に関して $n - 1$ 次の n 個の方程式系 (これを関孝和は換 n 式と呼んだ)

$$\begin{aligned}a_{11}(x) + a_{12}y + a_{13}y^2 + \cdots + a_{1n}y^{n-1} &= 0 \\a_{21}(x) + a_{22}y + a_{23}y^2 + \cdots + a_{2n}y^{n-1} &= 0 \\&\dots \quad \dots \\a_{n1}(x) + a_{n2}y + a_{n3}y^2 + \cdots + a_{nn}y^{n-1} &= 0\end{aligned}$$

を構成し、係数のなす行列 $(a_{ij}(x))$ の行列式を定義することによって終結式を定義した。大変奇妙に見えるが、関孝和は連立 1 次方程式とは全く独立した形で行列式を定義した。関が受け継いだ中国伝統数学では、二千年以上前に成立した数学書『九章算術』で連立 1 次方程式の解法に関しては、実質的に行列を用いたきわめて進んだ取り扱いがされていたにもかかわらず、連立 1 次方程式の一般的な取り扱いはなされていなかった。その後の中国伝統数学でも、連立 1 次方程式に関する一般論は誕生せず、従って行列の理論も行列式の理論も誕生することはなかった。こうした中国伝統数学の特徴については後述する。

一方、ヨーロッパでは関孝和の理論に遅れること 81 年、1764 年に E. Bézout が論文 [Be1] を発表し、終結式の理論を初めて完成させた。終結式や行列式に関してはライプニッツが研究を進展させ連立 1 次方程式に関しては Cramer に先だって解の公式を完成させていたが ([Le]), 未発表のまままで終わり、その後の理論の進展には影響を与えることはなかった。西洋数学ではデカルトの『幾何学』以来、方程式論と座標幾何学は密接に関係して進展し、記号も整備され、連立高次方程式の理論は曲線や曲面の交点の理論と関係して発展した。なかでも、Cramer は平面曲線の理論に連立 1 次方程式の理論を適用し、そのために連立 1 次方程式の解の公式、いわゆる Cramer の公式と、それを記述する行列式の定義の原型を与えた ([Cr]).

こうした数学を受け継いだ Bézout は、終結式を構成する前行列式を定義し、Cramer の連立 1 次方程式の理論を完全なものとして、それを使って終結式を定義した。Bézout は n 変数の n 個の連立方程式

$$F_j(u, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

に対して

$$\sum_{k=1}^n M_k(u, x_2, \dots, x_n) F_k(u, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

が u の多項式なるようは乗法子 M_j を見つける問題を設定することによって終結式を定義した。 M_j の係数を未知数と考えると式 (1) が u だけの多項式なる条件は連立 1 次方程式として定式化することができ、乗法子 M_j の次数を最小になるように連立 1 次方程式を解いて係数を確定し、(1) を終結式とした。Bézout 自身は終結式ではなく最終方程式と呼んでいる。論文 [Be1] では 5 未知数までの場合を考察し、後に [Be2] で一般の場合を考察した。Bézout の定理の一般形は [Be2] で与えられている。また、関孝和が考察した連立方程式の場合は、終結式が関孝和と全く同じ方法で得られることも示している。

ところで、二人の数学者は終結式には不用な因子が含まれることを強く認識していた。関孝和はそのために、換 n 式の各式の係数の共通因子を消去することだけでなく、 y に関する同次数の係数の共通因子も消去するように理論を構成している。これは行列式で行と列の役割が本質的に同じであることを関が見抜いていたことを示している。そのみならず終結式の次数の上限をもとの連立方程式の係数の次数を使って表現している。一方、Bézout [Be2] は連立方程式に出てくる項を詳しく調べ、いくつかの項が欠けている場合は終結式の次数が Bézout の定理で得られる次数より小さくなることを示した。

以上のように、関孝和と Bézout の終結式の理論は二人が受け継いだ数学に大きな影響を受け、その中で創意工夫の産物である。唯、関孝和の場合は後述するように、一般論が全くない中国伝統数学を受け継ぎながら、多未知数の方程式の書き方の工夫から始めて終結式の一般論を完成させた点では、その飛躍の大きさを考えると Bézout とは比較にならない偉業であったことは論を待たない。

以下、これらのことを今少し詳しく述べる。

1 関孝和の終結式の理論

1.1 関孝和が受け継いだ中国伝統数学

中国伝統数学の体系化は二千以上前に編纂された『九章算術』に始まり、その数学が西洋数学に取って代わられるまで大きな力を持ち続けた。中国伝統数学は一言で述べれば、個別の問題を解くためのアルゴリズムの提示であった。多くのアルゴリズムはいくらかの改良を加えられながら、明代まで受け継がれた。また、『九章算術』は数学書の構成そのものに大きな影響を与え、その影響は関孝和やかれの跡を継ぐ江戸時代の数学者にも引き継がれた。

『九章算術』は問題集であり、問題とその解き方に応じて九つの章に分かれており、そのこともあって『九章算術』と呼ばれた。『九章算術』は問題、解答、解き方のアルゴリズムが記されていたが、問題の解法に関する一般論的な説明はなく、また、なぜそのようなアルゴリズムで解答が得られるのかの説明もなかった。たとえば第一章「方田」の第 5 番目、6 番目の分数の約分に関する問題は次のように記述されている*1。

今十八分の十二有り。これを約つづめて幾何いくぼくを得るぞと問う。

答こたへに曰く 三分の二。

又また九十一分の四十九有り。これを約つづめて幾何いくぼくを得るぞと問う。

答こたへに曰く 十三分の七。

約分術やくぶんじゆつに曰く 半すべきはこれを半し、半すべからざるべきは分母ぶんぼ分子ぶんしの数を副そえ置きて、少を以て多を減じ、更に相減損あひひきしてその等らを求むるなり。等数らを以てこれを約つづむ。

約分の方法として分母、分子を 2 で割ることができれば 2 で割り、割ることができなければ、いわゆる互除法を分母と分子に対して行い、最大公約数 (等数) を求めて、分母分子を割ればよいというのが、「約分術曰」以下のきわめて省略された説明である。『九章算術』の本来の説明はこれだけで、互除法がなぜ最大公約数を与えるかの説明はない。これに対して、三国時代の魏の劉徽は『九

*1 今有十八分之十二問約之得幾何

答曰三分之二

又有九十一分之四十九問約之得幾何

答曰十三分之七

約分術曰可半者半之不可半者副置分母分子之数以少減多更相減損求其等也以等數約之 ([Gu] 上 九章算術本文 p.12-13). 漢字は通用の書体に変更し、後世の注は省略した。

章算術』に註釈をつけ、『九章算術』の不備を補おうとした。上の約分術に関しては、劉徽は次のような注をつけている。

等数これを約む^{つづ}、即ち除なり。其の相減する所以は皆等数の重疊なり。故に等数を以てこれを約む^{つづ}。^{*2}

劉徽の注の最初は約は除と同じ意味であることを指摘している。二番目の部分が互除法が最大公約数を与える理由が述べられている。即ち $a - b = c$ に関して a と b の最大公約数を d とすると c も d の倍数になることを注意している。このことから互除法が最大公約数を与えることが分かる。劉徽は『九章算術』が円周率として 3 を使っていることに異議を申し立て、円に内接する正 96 角形の周の長さを計算し、それをを用いて円周率を上と下から近似し、近似値として 3.14 を得ている。また、球の体積の公式を求めようとしてうまく行かず、「敢不闕疑，以俟能言者」（敢えて疑わしきを闕^かかず、以て能く言う者を俟^まつ）と記して、失敗した自分の論法を詳しく註釈書に残した。このように、劉徽は中国伝統数学で、初めて証明の重要性に気づいた数学者であったが、後世の数学者は劉徽のこの考えを理解できず、中国伝統数学ではついに証明を紙上に記すことはなかった。この伝統は江戸時代の数学者にも受け継がれている。関孝和もこの伝統の上に立ち、自己の数学上の発見が正しいことの説明を紙上に残すことはなかった。弟子が尋ねれば口頭で説明した可能性は考えられるが、かれも証明の重要性は理解していなかったと思われる。

中国伝統数学の特徴として、証明の概念が欠落していただけでなく、一般論も欠如していた。その典型的な例を『九章算術』第八章「方程」に見ることができる。数学用語「方程式」は章名「方程」に由来する。第八章の冒頭の問題は次のようである^{*3}。

今、上禾^か三乘^{へい}、中禾二乘、下禾一乘、実三十九斗、上禾二乘、中禾三乘、下禾一乘、実三十四斗、上禾一乘、中禾二乘、下禾三乘、実二十六斗^{おのおのいくばく}有り。上、中、下禾の実一乘各幾何ぞと問う。

答えに曰く

上禾一乘九斗四分斗の一

中禾一乘四斗四分斗の一

下禾一乘二斗四分斗の三

上中下の穀物 1 束からどれだけの実が採れるかを問う問題で、上 3 束、中 2 束、下 1 束から実 39 斗

^{*2} 等数約之即除也其所以相減者皆等数之重疊故以等数約之 ([Gu] 上 九章算術本文 p.13).

^{*3} 今有上禾三乘中禾二乘下禾一乘実三十九斗上禾二乘中禾三乘下禾一乘実三十四斗上禾一乘中禾二乘下禾三乘実二十六斗問上中下禾実一乘各幾何

答曰

上禾一乘九斗四分斗之一

中禾一乘四斗四分斗之一

下禾一乘二斗四分斗之三

([Gu] 下 九章算術本文 p.327)

が採れ、上 2 束、中 3 束、下 1 束から実 34 斗が採れ、上 1 束、中 2 束、下 3 束から実 26 斗が採れるときにそれぞれの束から実がどれだけ採れるかを問う問題である。今日の記号を使えば上禾 1 束から実 x 斗、中禾 1 束から実 y 斗、下禾 1 束から実 z 斗採れるとすると、問題から連立 1 次方程式

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

を立てることができる。『九章算術』の時代にはこうした方程式を書き記すことはできなかったが、竹や象牙や金属などでできた棒(算籌^{ちゆう}と呼ばれ、江戸時代の日本では算木と呼ばれた)を机上に次のように並べて、連立方程式にあたるものを表現した。

$$\begin{array}{cccc} | & || & ||| & \text{(上禾)} \\ || & ||| & || & \text{(中禾)} \\ ||| & | & | & \text{(下禾)} \\ =\overline{|} & \equiv||| & \equiv||| & \text{(実)} \end{array}$$

文章を上から下へ、右から左へと記したので、一番右の行が最初の方程式の係数を並べたものになる。それぞれの棒が算籌^{ちゆう} 1 本に対応している。13 世紀末に朱世傑によって表された『算学啓蒙』では紙上に上の形で連立方程式を表した。『九章算術』ではこうして並べた算木を動かして連立方程式を解くアルゴリズムを記している。

この形の表示では、横書きになれた私たちには見にくいので、上の表記を反時計回りに 90 度回転し、算籌^{ちゆう} をアラビア数字に直して

上禾	中禾	下禾	実
3	2	1	39
2	3	1	34
1	2	3	26

の形で表現することにする。『九章算術』や『算学啓蒙』による連立方程式の記述は実質的に連立方程式の行列表示と見ることが可能である。しかも、連立方程式の解法は、今日の用語を使えば行列の行の基本変解によって連立方程式の係数行列の対角化を行って解いている。しかし、中国伝統数学では行列の概念が生まれることはなかった事実に注意する必要がある。以下に『九章算術』に従って算籌の動きを算用数字を使って記す。

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array} & (2 \text{ 行} \times 3) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 6 & 9 & 3 & 102 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array} & (2 \text{ 行} - 1 \text{ 行} \times 2) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array} \\
(3 \text{ 行} \times 3) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 3 & 6 & 9 & 78 \end{array} & (3 \text{ 行} - 1 \text{ 行}) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{array} & (3 \text{ 行} \times 5) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 20 & 40 & 195 \end{array} \\
(3 \text{ 行} - 2 \text{ 行} \times 4) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{array} & (1 \text{ 行}, 2 \text{ 行} \times 36) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 108 & 72 & 36 & 1404 \\ 0 & 180 & 36 & 864 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{array} & (1 \text{ 行}, 2 \text{ 行} - 3 \text{ 行}) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 108 & 72 & 0 & 1305 \\ 0 & 180 & 0 & 765 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{array} \\
(2 \text{ 行} \div 5) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 108 & 72 & 0 & 1305 \\ 0 & 36 & 0 & 153 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{array} & (1 \text{ 行} - 2 \text{ 行} \times 2) \rightarrow & \begin{array}{cccc} 108 & 0 & 0 & 999 \\ 0 & 36 & 0 & 153 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{array}
\end{array}$$

このようにして，連立方程式の解として

$$x = \frac{999}{108} = 9\frac{1}{4}, \quad y = \frac{153}{36} = 4\frac{1}{4}, \quad z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$$

を得る．このように連立 1 次方程式を解くアルゴリズムはきわめて近代的であり，二千年前の議論とは思えないほどであるが，その後，解法に関してはこれ以上の進展はなかった．算籌^{ちゆう}や紙上に算籌記号を使って具体的な方程式を表すことはできたが，連立方程式の一般形を表す記号が登場せず，従って連立 1 次方程式の一般的な解法，たとえば Cramer の公式のような公式を見出すことはなかった．これは，具体的な連立 1 次方程式を解くアルゴリズムが強力で，具体的に与えられた方程式を確実に解くことができたために，そのアルゴリズムそのものを研究の対象にしようとする動機が生まれにくかったことにも起因しているように見える．

いずれにしても，証明概念の欠如，一般論の欠如は中国伝統数学のもつ根源的な欠陥であった．そうした，欠陥の他の例として天元術を挙げることができる．

1.2 天元術

中央アジアでモンゴル族が台頭し，東西の交流が活発になったことが原因と考えられるが，11 世紀以降，北部中国，特に金で新しい方程式論が誕生した．それまで，中国伝統数数学の方程式は机上に算籌^{ちゆう}を並べ，それを動かして解を得ていた．既に『九章算術』で平方根や立方根の計算が算籌^{ちゆう}を使って行われていたが，途中の計算では特別な形の 2 次方程式や 3 次方程式を解くことになる．例えば $x^2 = a$ を解くために近似解として a_1 を取ると $x = a_1 + y$ と置くことによって y に関する 2 次方程式

$$y^2 + 2a_1y = a - a_1^2$$

が生じる．開平のアルゴリズムはこの方程式を解くことにも対応している．こうした事実に基づいてやがて 2 次方程式，3 次方程式が算籌^{ちゆう}を使って解くことができるようになった．さらに 11 世紀には，北宋の数学者賈憲によって二項係数を使って高次の冪根を求めるアルゴリズムが導入され，

さらに一般の方程式の数値解を求めることができるようになった。その方法は本質的に組み立て除法であったが、そのことを明確にして一般の方程式数値解を組み立て除法を用いて得る方法は Ruffini や Horner に先だって関孝和によって完成された。

11, 2 世紀の北部中国では算籌ちゆうの記号を紙上に記して方程式を求める方法が発見された。問題を解くために未知数を決める際に、例えば円の直径(円径という)を未知数とする場合は「立天元一為円径」(天元の一を立て円径と為す)と宣言したので、江戸時代には天元術と呼ばれるようになった。当時は如積術と呼ばれた。天元術での多項式や方程式の記法は式の係数だけを昇冪の順に記し、係数の数字は算籌ちゆうの記号を使った。中国伝統数学では足し算や等号や括弧の記号がなかったので、不便な記法ではあったが、式の加減乗除を行うことによって方程式を立てた。立てられた方程式は、恐らくは算籌ちゆうを使って数値解が求められたと推測される。

天元術を使うことによって、1 未知数の方程式を立てることができるようになったが、その理論的な説明は数学書には記されず、方程式を導く過程だけが記された。例えば、朱世傑著『算学啓蒙』巻下の最後の章「開方釈鎖門」の問題 8 は次のようである。

今、直田八畝五分五厘有り。只云う長平和して九十二歩を得る。長平、おのおのいくばく各幾何ぞと問う。答えに曰く 平三十八歩。長五十四歩。

術に曰く天の一を立て平と為す。○
| 以て云える数を減じ余りを長と為す。平を用いて乗

○
起し積と為す。≡|| 左に寄せ、畝を列し歩を通じ左に寄せたると相消して開方の式を得
×

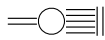
○
=○≡||
る。 ≡| 平方にこれを開き平を得る。以て和歩を減じて即ち長なり。問に合す。
|


問題は面積が 8 畝 5 分 5 厘 (1 畝 = 240 歩) の長方形の田があり、長辺(長)と短辺(平)との和が 92 歩のとき、長辺と短辺を求める問題である。「天元の一を立て平と為す」は今日用語を使えば、短辺(平)を未知数 x と置くことを意味する。算木記号 ○
| は $0 + x$ の係数を昇冪の順に記したものである。

「以て云える数を減ず」とは只云う以下で記された長辺と短辺の和 92 歩から短辺を引くことを意味し、これは長辺であるので、短辺を掛けると $x(92 - x) = 0 + 92 - x^2$ が面積となる。こ
○

の式を算木記号で書いたものが ≡|| である。これが面積 8 畝 5 分 5 厘 = $8.55 \times 240 = 2052$ 歩で
×

あるので、 $92x - x^2 = 2052$ がえられる。中国伝統数学では等号の記号がなかったので、右辺から左辺を引いた式を作って方程式を記す必要があった。これが「相消す」という操作である。また、等号の記号がなかったので方程式と多項式の区別が記号の上ではつかなかったが、開方の式と記すことで、式が方程式を意味することを宣言したことになる。開方の式 $2052 - 92x + x^2 = 0$ は算木記



号を使うと  となる。







このように理解すると天元術による方程式を立てる操作は今日の数学的な考え方となんら変わらないことが分かる。しかし、以上の操作に関する数学的な説明が全くなく、上の文のような記述しか数学書には記されておらず、この文を読んだだけでその意味を理解するのは難しかった。

実際、中国では明代に天元術は理解できなくなり、天元術を記した数学書を理解できなくなっていった。『算学啓蒙』と天元術は朝鮮に伝わり、『算学啓蒙』は朝鮮で再刻され、天元術は朝鮮では理解され保持された。

1.3 天元術と関孝和の傍書法

朝鮮で再刻された『算学啓蒙』は日本にも輸入され、江戸時代に訓点をつけて翻刻された(1658年に土師道雲と久田玄哲によって出版された訓点本が最初の翻刻である)。天元術を記した数学書で江戸時代初期に見ることができたものは、この『算学啓蒙』だけであった。しかし、天元術を理解することは難しく、誤解に基づいた「天元の一」が使われた。天元術を日本で初めて正しく理解したのは澤口一之であるとされている。かれは1671年『古今算法記』を出版し、天元術を正しく使って、『算法根源記』などで提出された問題を解き、最後の巻で解答を載せない問題を15問、数学者の挑戦問題として提出した。これは難問であり、澤口一之自身も正しい解答をもっていなかったようである。この問題を解くために必要な1未知数の方程式を問題から直ちに導くことは難しく、多未知数の連立方程式を立て、未知数を消去して最終方程式を導く必要があった。しかし、天元術は1未知数の方程式しか記述することができず、関孝和以前の江戸時代の数学では多未知数の方程式を記述する方法なかった。それを解決したのが関孝和の傍書法である。

傍書法では単項式の係数を算木記号で表し、その横に未知数の名前とその未知数の冪指数を記した。例えば 3甲^2 は  と記した。また  のように算木記号の右に二つ以上の文字が記されている場合は積を表す。今の場合 甲^2 と 乙^4 の積 $\text{甲}^2\text{乙}^4$ 表す。乙の下の三は乙に乙自身を三回掛けることを意味し、今日の用語では4乗であるが江戸時代は3乗と呼んだ。このように、江戸時代の文献では n 乗は今日の $(n+1)$ 乗に当たるので注意が必要である。さらに  のように算木記号が二つ以上同じ列にある場合は算木記号が表すそれぞれの式を足すことを意味し、今の場合 $\text{甲}^2\text{乙}^4 + 2\text{乙}$ を意味する。足し算だけでなく引き算の記号もないので、引く代わりに負の係数の式を足すと考え、負の記号としては斜め棒を引いて表した。従って  は $3\text{乙}^3 - 6\text{丙}$ を表す。「再」は再自乗、すなわち3乗を表している。例えば

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{甲乙} & \text{乙} \\ \hline \text{巾三} & \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{|c|} \hline \text{乙} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{乙} \\ \hline \text{再} \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{|c|} \hline \text{丙} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{甲乙丙} & \text{丙} \\ \hline & \text{巾} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{丙} \\ \hline \end{array}$$

は現代の表記を使えば次のようになる。

$$(甲^2乙^4 + 2乙) + (3乙^3 - 6丙)x + (甲乙丙 + 丙^2)x^2 - 2丙x^3 = 0$$

傍書法では、天元術に倣って一つの未知数 x は記されず、その係数のみが x の昇幂の順に縦に記される。 x^m の係数に、天元術と違って数値だけでなく数式を許すことによって多未知数の方程式や多項式を記述することができるようになった。今日から見れば不便な記号ではあったが、それでも消去法の一般論を展開することができるだけの力を有する記法であった。

1.4 関孝和の終結式の理論

傍書法によって多未知数の方程式を記述できるようになり、関孝和さらに未知数の消去に関する一般論を構築した。その構成法を以下で簡単に記そう。

1.4.1 換 n 式

関孝和は y に関して次数 n の連立方程式

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots + a_ny^n = 0 \\
g(x, y) &= b_0 + b_1y + b_2y^2 + \cdots + b_ny^n = 0
\end{aligned}$$

から n 個の y に関して次数 $n-1$ の方程式を構成し、換 n 式と呼んだ。ここで、 $m = \deg_y g(x, y) < \deg_y f(x, y) = n$ のときは $g(x, y)$ の y^{m+1}, \dots, y^n の係数を 0 とし、形式的に両方程式の次数を揃える。このようにすると、実は終結式に余分な因子が出てくるが、その因子は終結式からは消去するように関は理論構成をしている。

換 n 式の構成は帰納的に行う。最初の式は

$$F_1(x, y) = b_n f(x, y) - a_n g(x, y) = 0$$

で定義する。 y^{n-1} 次の係数は $b_n a_{n-1} - a_n b_{n-1}$ であることに注意する。二番目の式は

$$F_2(x, y) = b_{n-1} f(x, y) - a_{n-1} g(x, y) + y F_1(x, y) = 0$$

と定義する。これが y に関して $n-1$ 次式になることは $b_{n-1}f(x, y) - a_{n-1}g(x, y)$ の y^n の係数が $b_{n-1}a_n - a_{n-1}b_n$ であることから $yF_1(x, y)$ の y^n 次の係数と打ち消し合うことから分かる。以下帰納的に $F_{k-1}(x, y) = 0$ が決まれば

$$F_k(x, y) = b_{n-k+1}f(x, y) - a_{n-k+1}g(x, y) + yF_{k-1}(x, y) = 0$$

として y に関して n 次式が定義される。関孝和はこのように記しているが、この定義から分かるように

$$F_k(x, y) = (b_{n-k+1} + b_{n-k+2}y + \cdots + b_n y^{k-1})f(x, y) - (a_{n-k+1} + a_{n-k+2}y + \cdots + a_n y^{k-1})g(x, y) = 0$$

と定義することと同値である。このようにして n 個の y に関して $n-1$ 次方程式

$$F_j(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}y^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

を得ることができるので、次はこの連立方程式から y を消去することを考える。今日では係数の作る行列 $(a_{ij}(x))$ の行列式を取ることによって終結式 $R(f, g) = \det(a_{ij}) = 0$ を定義できるが、関孝和には当初行列式概念はなかった。そのために関は行列式を直接定義せず、「逐式交乗」の結果として行列式を得ている。

1.4.2 逐式交乗と行列式

「逐式交乗」とは換 n 式

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= a_{11}(x) + a_{12}(x)y + a_{13}(x)y^2 + \cdots + a_{1n}(x)y^{n-1} = 0 \\ F_2(x, y) &= a_{21}(x) + a_{22}(x)y + a_{23}(x)y^2 + \cdots + a_{2n}(x)y^{n-1} = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ F_n(x, y) &= a_{n1}(x) + a_{n2}(x)y + a_{n3}(x)y^2 + \cdots + a_{nn}(x)y^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

に対して $\sum_{j=1}^n M_j(x)F_j(x, y)$ が x のみの多項式となるように x の多項式 $M_j(x)$ を見出し、残った x の方程式を終結式として定義する方法である。

$n = 2$ の場合は

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= a_{11}(x) + a_{12}(x)y = 0 \\ F_2(x, y) &= a_{21}(x) + a_{22}(x)y = 0 \end{aligned}$$

から $a_{22}(x)F_1(x, y) - a_{12}(x)F_2(x, y)$ を考えることによって y が消去でき、終結式

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

を得ることは容易であるが $n = 3$ の場合から急に難しくなる。関孝和がどのようにして $M_j(x)$ を見出したかは定かではない。「解伏題之法」では M_j の各項が記され、実際に $y^m, m \geq 1$ の項が消えることを確かめている。

従来の解釈では $F_j(x, y) = 0$ から実際に y を消去して見出したとするものが多い。 $n = 3$ の場合、実際に消去を行うと

$$a_{23} \left\{ a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right\} = 0$$

が得られる。 a_{23} を略して終結式を得ることができる。

もし、関が連立 1 次方程式を使うことができたならば、 $M_j(x)$ は

$$\begin{aligned} a_{12}M_1 + a_{22}M_2 + a_{32}M_3 &= 0 \\ a_{13}M_1 + a_{23}M_2 + a_{33}M_3 &= 0 \end{aligned}$$

を満たさなければならないので、 M_2, M_3 を未知数として連立 1 次方程式を解くと

$$M_1 : M_2 : M_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

を得る。しかし、関孝和が連立 1 次方程式を使った可能性は低いと思われる。消去法の理論と連立 1 次方程式の理論との関係については関は全く触れていないからである。いずれにしても、関は $n = 3$ の場合に $M_j(x)$ が 2 次の行列式で表されることを見出し、それをヒントに高次の場合も $M_j(x)$ の形を見出したと推測される。今日の用語を使えば、関は $n \times n$ 行列の行列式を第 1 列に関する展開式で定義したことになる。

1.4.3 交式・斜乗

一方、「解伏題之法」では逐式交乗は面倒であるので、交式・斜乗に代えると宣言している。斜乗とは対角線および反対角線に平行に行列の成分を掛けたもの正負の符号をつけて足し合わせることも意味する。関孝和は「解伏題之法」では図 1 や図 2 のように図示している。図で実線で記した部分は赤線で、破線で記した部分は黒線で記している。これは算籌^{ちゅう}では赤は正の数を黒は負の数を表したことによる。

交式とは換 n 式 $F_j(x, y)$ の順番を変えたもの。ただし $F_1(x, y)$ は常に 1 番目に置く。行列でいえば 1 行目は変えずに他の行を入れ替えてできる行列が対応する。この行を入れ替えた行列の斜乗を取って、正負の符号をつけて足し合わせることによって行列式を定義する。4 次以上の場合には行列で斜乗をとってもすべての項が現れないために、関孝和が見出した方法である。例えば 4 次の行列式の場合は、(1,3,4,2) の順番で行を並べた行列と (1,4,2,3) の順番で行を並べて行列の斜乗を取って足し合わせると 4 次の行列式となる (図 3)。

すなわち

$$\det(a_{ij}) = S(1, 2, 3, 4) + S(1, 3, 4, 2) + S(1, 4, 2, 3)$$

と定義したことになる。 $n = 5$ の場合の交式の選び方を関は間違えていた。 $n \geq 5$ の場合、松永良弼 (1694–1744) によって正しい交式の選び方が確立された。

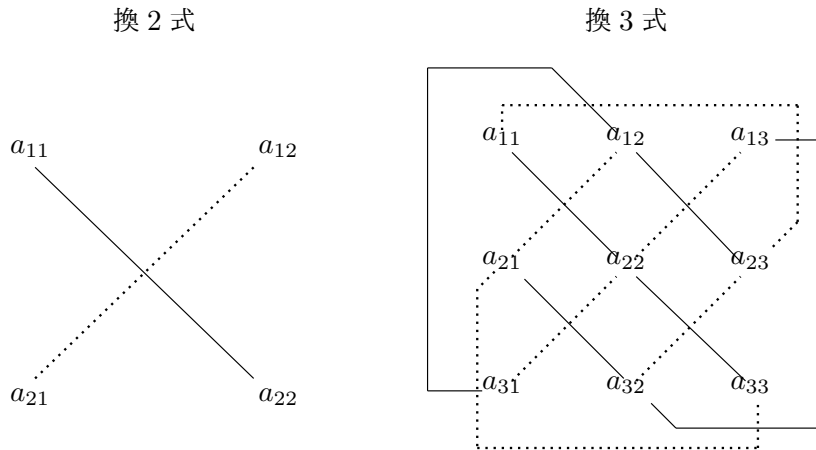


図 1 実線はその方向に掛け合わせたものが正，破線はその方向に掛け合わせたものを負に取る。

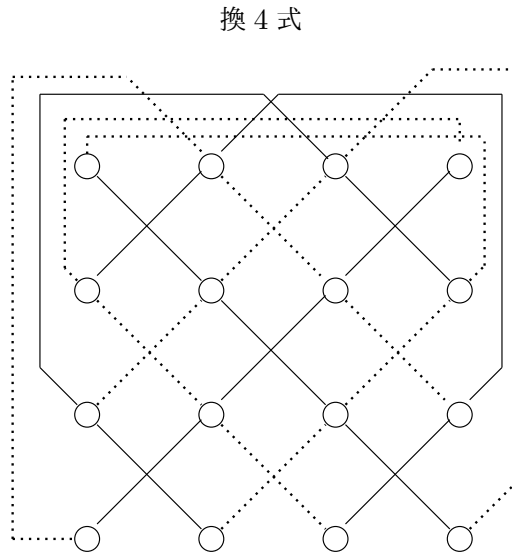


図 2

松永良弼著「解伏題交式斜乗之諺解」(正徳 5 年 (1715))

$n = 5$ の場合は斜乗の符号も「解伏題之法」では間違っていて与えられていた。この間違いは長い間気づかれず、1789 年になって菅野と石黒によって訂正された。

菅野元健著「補遺解伏題生剋篇」(寛政 10 年 (1798))

石黒信由著「交式斜乗逐索」(寛政 10 年 (1798))

なお、交式が、 n 次の巡回置換

$$\sigma_n = (1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$$

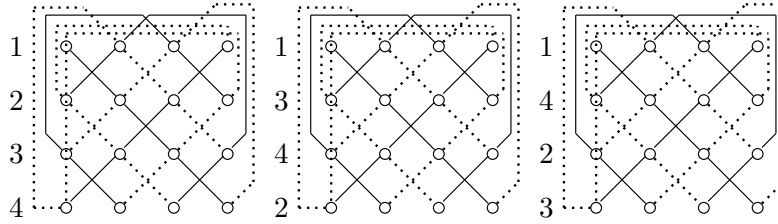


図3 $\det(a_{ij}) = S(1, 2, 3, 4) + S(1, 3, 4, 2) + S(1, 4, 2, 3)$

及び置換 ω_n

$$\omega_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} (1\ n)(2\ n-1)\cdots(m\ m+1) & n = 2m \\ (1\ n)(2\ n-1)\cdots(m\ m+2) & n = 2m+1 \end{cases}$$

で生成される, n 次対称群の部分群である二面体による左剰余類の代表元の取り方と同一視できることが長田 [O] によって示されている.

交式と斜乗に関する詳しい解説は『関孝和全集』第1巻の「解伏題之法」の現代語訳につけられた解説を参照して頂きたい ([Se] 第1巻 pp. 589-609).

1.4.4 終結式の次数

関孝和は終結式が不要な因子を含むことが多いことを認識していた. そのため, 次数を下げるために換 n 式の各方程式の共通因子を除去した.

それだけでなく換 n 式の y^k の係数に共通因子がある場合をそれを除去することも行っている. 行列式の行と列の役割を認識していたことが分かる.

さらに, 終結式の次数の上限の計算法を与えた. 連立方程式

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, & \deg_y f &= m \\ g(x, y) &= 0, & \deg_y g &= n \end{aligned}$$

に対して

$$\begin{aligned} f(x, y)^n &= \sum_{k=0}^{mn} A_k(x) y^k \\ g(x, y)^m &= \sum_{k=0}^{mn} B_k(x) y^k \end{aligned}$$

と定義すると, 終結式の次数の上限は

$$\deg R(f, g) \leq \max_{0 \leq k \leq mn} \{\deg A_k(x) B_{mn-k}(x)\} \quad (2)$$

で与えられる. 関は (2) の右辺は終結式の次数であると主張しているが, 実際は終結式がこの次数より小さくなることもあり, 終結式の次数の上限であると訂正する必要がある.

2 Bézout の終結式の理論

2.1 Bézout が受け継いだ数学

西洋数学では関孝和の遅れること 81 年, Bézout が初めて終結式の理論を構築した ([Be1]). Bézout は関孝和に比べるとはるかに恵まれた環境にあり, 終結式の理論を構築するための数学的な道具はすべて揃っていたと言っても過言ではない.

Bézout は論文 [Be1] の中で, Newton, Euler, Cramer の名前をあげており, かれらの数学から大きな影響を受けたことを示唆している.

2.1.1 Newton と MacLaurin

ニュートンのケンブリッジ大学での代数学の講義はかれの許可なく 1707 年に出版された ([Ne]). その中でニュートンは連立方程式の次数が 2 次式と 3 次式の場合に終結式的具体形を与えている. 結果だけが記され, 終結式の導出の過程は記されていない. 例えば

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= 0 \\fx^2 + gx + h &= 0\end{aligned}$$

から x を消去した結果は

$$ab(ah - bg - 2cf) + bf(b^2 - cg) + c(ag^2 + ef^2) = 0$$

と記されている. また,

$$\begin{aligned}ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\fx^3 + gx^2 + hx + k &= 0\end{aligned}$$

から x を消去した式は

$$\begin{aligned}(6ah - bg - 2cf)(adh^2 - ack^2) + (ak + bh - cg - 2df)bdfh - (ak + bh + 2cg + 3df)a^2k^2 \\+ (cdh - d^2g - c^2k + 2bdk)(ag^2 + cf^2) + (3gh + bg^2 + df^2 - 3afk)d^2f \\- (3ak - bh + cg + df)bcfk + (bk - 2dg)b^2fk - (b^2k - 3adh - cdf)agk = 0\end{aligned}$$

と記されている. 計算の過程は記されていないが, これらの終結式使って 2 変数の連立方程式から変数を消去する例が与えられている..

一方, Maclarulin の代数学の教科書 [Ma] では 3 元連立 1 次方程式まで扱われ, いわゆる Cramer の公式が与えられている. Cramer[Cr] の出版より早かったが, フランス語訳されたのは 1853 年で [Cr] より遅かったので, Bézout には影響を与えなかったようである.

2.1.2 Euler と Cramer

Euler は『無限解析入門』第 2 巻で平面曲線の交点を求めるために変数の消去を行った ([Eu1], §483–§485). Euler は

$$\begin{aligned} Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \&c. = 0 \\ py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \&c. = 0 \end{aligned}$$

から y を消去するために

$$\begin{aligned} py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + cy^{n-4} + \&c. = 0 \\ Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} + C^{m-4} + \&c. = 0 \end{aligned}$$

をそれぞれ最初の式と 2 番目の式に掛けて y^k , $k \geq 1$ の項が等しい条件を探した.

$$\begin{aligned} Pa + Qp &= pA + qP \\ Pb + Qa + Rp &= pB + qA + rP \\ Pc + Qb + Ra + Sp &= pC + qB + rA + sP \\ &\&c. \end{aligned}$$

が条件式として得られる. Bézout の議論の原型の一つと考えられ, Bézout が参考にしたと思われる.

さらに 1764 年の論文 [Eu2] では次のように消去法を与えている. 方程式

$$\begin{aligned} a_m(x)y^m + a_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + a_0(x) &= 0 \\ b_n(x)y^n + b_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + n_0(x) &= 0 \end{aligned}$$

で定義される平面曲線の交点を (x_0, y_0) とすると

$$\begin{aligned} a_m(x_0)y^m + a_{m-1}(x_0)y^{m-1} + \cdots + a_0(x_0) \\ &= (y - y_0)(c_{m-1}y^{m-1} + \cdots + c_0) \\ b_n(x_0)y^n + b_{n-1}(x_0)y^{n-1} + \cdots + n_0(x_0) \\ &= (y - y_0)(d_{n-1}y^{n-1} + \cdots + d_0) \end{aligned}$$

が成り立つような c_i, d_k が存在する. これらの式が成り立つために

$$(a_my^m + \cdots + a_0)(d_{n-1}y^{n-1} + \cdots + d_0) = (b_ny^n + \cdots + b_0)(c_{m-1}y^{m-1} + \cdots + c_0)$$

が $x = x_0$ で成り立たなければならない. c_i, d_k を未知数と考え, y^l の係数を比較することによって, $m + n$ 未知数の $m + n$ 個の連立 1 次方程式を考えた. Euler は $c_{m-1} = a_m, d_{n-1} = b_n$ において, y の定数項以外の係数の等式を考え $m + n - 2$ 個の未知数の $m + n - 2$ 個の連立 1 次方程式

が得られる。これを解いて、定数項の部分から得られる式に代入すると、終結式が得られ、それを解くことによって x_0 を求めることができる。終結式を求める一般的方法が示されたことになる。

さらに大きな影響を与えた著作として Cramer[Cr] がある。この著作の中で Cramer は平面曲線に関する問題を考察した。特に、かれは

(1) 平面曲線は $n(n+3)/2$ 個の点によって一意的に定まる

ことを主張し、それを証明するために連立 1 次方程式を考察し、今日 Cramer の公式、あるいは Cramer の規則と呼ばれる連立 1 次方程式の解の公式を与えた。かれは 3 元連立 1 次方程式までの解の具体形を与え、一般の場合も解を記述するために必要な分母、分子に現れる式、それは連立方程式の係数を成分とする行列式に他ならないが、の形状を言葉で説明した。Cramer はさらに

(2) m 次および n 次平面曲線は mn 個の点で交わる

ことを主張し、Bézout の定理への扉を開けている。

ところで、Cramer は、自己の主張 (2) から異なる n 次曲線 $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ は n^2 個の点で交わるが、 $af(x, y) + bg(x, y) = 0$ はこれらの n^2 個の交点を通るので、 n^2 個の交点の点を通る n 次曲線は無限個存在することに気づいた。一方、 $n > 3$ のとき

$$n^2 > \frac{n(n+3)}{2}$$

であるので (1) の主張に矛盾することに悩んだ。かれはこの事実を Euler に知らせたが、二人ともこの矛盾を解決することはできなかった。Cramer の公式を適用するためには n 元連立 1 次方程式は独立である、換言すれば方程式の係数を成分とする行列の階数が n であることが必要である。従って、Cramer の主張 (1) はこの条件が満たされるような点の配置が必要であることは今日では明らかであるが、当時はそこまで明確になっていなかった。Bézout の考察では方程式の係数はできうる限り一般的であることが暗黙の内に要求されている。

2.2 Bézout の行列式の定義

Bézout は [Be1] では終結式の理論を構築するために、まず行列式の定義から始めている。これはすでに Cramer によって連立 1 次方程式の解法の関連して、本質的に行列式が定義されたことによる。以下に見るように、Bézout は Cramer の理論を最大限活用している。

行列式を定義するためには置換の符号を定義する必要があるが、Bézout は帰納的に次のようにして置換の符号を決めた。

まず、2 文字 a, b の置換に関しては、 a, b を置換してできる順列を考え、順列 ab の符号を $+$ 、 a, b を入れ替えた順列 ba の符号を $-$ と定義する。これを Bézout は

$$ab - ba \tag{3}$$

と記している。次に a, b に新しい文字 c を加えて、 abc を置換してできる順列の符号を次のように

決める. ab に c をつけ加えてできる順列 abc は ab と同符号の $+$, abc で b と c を入れ替えた acb では符号が変わり $-$. さらに acb で a と c を入れ替えたものは符号が変わり $+$ になる. ba に対して c をつけ加えた順列 bac の符号は ba の符号と同じ $-$, この順列の a と c を入れ替えてできる順列 bca は符号が変わって $+$, さらに b と c を入れ替えた cba の符号は再び符号が変わって $-$ となる. このことを Bézout は

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba. \quad (4)$$

と表現している. abc に置換を施して得られた順列の符号がこの置換の符号と定義する. 従って, 例えば

$$\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = +1$$

である. 以下帰納的に順列の符号と対応する置換の符号数を決めることができる. Bézout は 4 次の順列の符号まで具体的に記している. 今日使われる置換の記号

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n-1 & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{k-1} & n & j_k & \cdots & j_{n-2} & j_{n-1} \end{pmatrix}$$

は Bézout の時代にはまだ確立されていなかった. コーシーによるこの記号の導入は 1844 年のことである ([Ca]).

一般的に書けば, Bézout は

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n-1 & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{k-1} & n & j_k & \cdots & j_{n-2} & j_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n-k} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & n \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n-k} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と置換の符号数を決めたことになる.

行列式は 2 次の場合は Bézout は次のように表現している. 2 元連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ a'x + b'y &= 0 \end{aligned}$$

を考える. すると係数からできる行列式 $= 0$ は (3) から

$$ab' - a'b = 0$$

と書き表される. ここで (3) の a は第 1 列, b は第 2 列を表し, 順列の第 1 番目は第 1 行, 第 2 番目は第 2 行と考えて積を取り順列の符号を使って足すことによって行列式が定義できる. 例えば (3) の ab は $a_{11}a_{22}$ に対応し $-ba$ は $-a_{12}a_{21}$ に対応し $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ が 2 次の行列式 $\det(a_{ij})$ である.

3 次の行列式に関しては Bézout は

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0 \end{aligned}$$

に対して (4) より

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' \quad (5)$$

$$= (ab' - ba')c'' - (ab'' - ba'')c' + (a'b'' - b'a'')c = 0 \quad (6)$$

を与えている。行列式 (5) は、(4) で a は第 1 列、 b は第 2 列、 c は第 3 列を表し、順列の第 1 番目は第 1 行、2 番目は第 2 行、3 番目は第 3 行を表しているとして解釈することによって得られる。例えば $-acb$ は $-a_{11}a_{23}a_{32}$ を bca は $a_{12}a_{23}a_{31}$ を表している。

結局、一般的には上のように符号数を決めて、

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と行列式を定義したことになる。また (6) は最後の列による展開式によって行列式を定義したことに対応する。すなわち

$$\Delta_{nk} = (-1)^{n+k} \det(a_{ij})_{1 \leq i \leq n-1, j \neq k}$$

とおいて行列式を

$$\det(a_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{nk} \Delta_{nk}$$

と定義する。Bézout はこの形で行列式を定義できることを述べている。終結式の定義で Bézout は方程式を降幂の順に記しており、昇幂の順に記した関孝和と逆になっているが、関孝和は第 1 列による展開式で行列式を定義したので、方程式の係数から終結式を見ると関孝和と Bézout の定義は符号の違いを除いて一致していることが分かる。

2.3 Bézout の終結式

Bézout は 2 未知数の連立方程式 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ から y を消去して終結式を求めるために

$$R(f, g) = G(x, y)f(x, y) + H(x, y)g(x, y)$$

が y のみの多項式となるような乗法子 $G(x, y)$, $H(x, y)$ を求める問題として定式化した。その際に $\deg R(f, g)$ の次数が最小となるように乗法子を選ぶ。Bézout は乗法子の係数を未知数と考えて連立 1 次方程式の問題として乗法子を求めている。[Be1] の簡単な例を記そう。連立方程式

$$f(x, y) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + \cdots + Ux + V = 0 \quad (7)$$

$$g(x, y) = A'x^{m'} + B'x^{m'-1} + C'x^{m'-2} + D'x^{m'-3} + E'x^{m'-4} + \cdots + U'x + V' = 0 \quad (8)$$

を考える。ただし、 A, B, \dots は y の多項式であり、 $f(x, y)$ は斉次 $m + p$ 次式、 $g(x, y)$ は斉次 $m' + p'$ 次式と仮定する。これらの式に対して

$$F(x, y) = Mx^n + Nx^{n-1} + Px^{n-2} + Qx^{n-3} + Rx^{n-4} + \dots + Sx + T$$

$$G(x, y) = M'x^{n'} + N'x^{n'-1} + P'x^{n'-2} + Q'x^{n'-3} + R'x^{n'-4} + \dots + S'x + T'$$

と置いて $F(x, y)f(x, y) + G(x, y)g(x, y)$ を考える。このとき $m + n = m' + n'$ が成り立つと仮定して、 $F(x, y)f(x, y) + G(x, y)g(x, y)$ の最高次の係数から 1 次の係数まで 0 になるという条件を課す。

$$AM + A'M' = 0$$

$$AN + A'N' + BM + B'M' = 0$$

$$AP + A'P' + BN + B'N' + CM + C'M' = 0$$

$$AQ + A'Q' + BP + B'P' + CN + C'N' + DM + D'M' = 0$$

$$AR + A'R' + BQ + B'Q' + CP + C'P' + DN + D'N' + EM + E'M' = 0$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$SV + S'V' + UT + U'T' = 0$$

と $m + n = m' + n'$ 個の連立 1 次方程式ができる。変数の個数は $n + n' + 2$ 個である。最初の式から $M = A', M' = -A$ と置いて連立 1 次方程式を解くことを考えると、方程式の個数は $n + n' - 1$ 個となるので方程式が解けるためには $n + n' - 1 = m + n = m' + n'$ が成り立てばよい。従って $n = m' - 1, n' = m - 1$ と取ることができ、 $f(x, y), g(x, y)$ がこの形の一般的な多項式とすると、 $F(x, y), G(x, y)$ の係数を一意的に決めることができる。このとき $VT + V'T' = 0$ が終結式となる。 $VT + V'T'$ の次数が問題となるが、上の連立 1 次方程式を Cramer の公式で解くが、 $F(x, y), G(x, y)$ の係数は多項式である必要があるので、Cramer の公式では分母が共通であるので、分子のみを $F(x, y), G(x, y)$ の係数として採用する。

Bézout の記法では分かりにくいので連立方程式を

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^m a_j(y)x^{m-j} = 0$$

$$g(x, y) = \sum_{k=0}^{m'} a'_k(y)x^{m'-k} = 0$$

と書き直そう。また

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{m'-1} c_k(y)x^{m'-k}$$

$$H(x, y) = \sum_{j=0}^{m-1} c'_j(y)x^{m-j}$$

と書き直そう。ここで

$$c_0 = a'_0, \quad c'_0 = -a_0$$

と置く。また

$$\deg a_j(y) = p + j, \quad \deg a'_k(y) = p' + k$$

と仮定している。このとき、解くべき連立 1 次方程式は

$$\sum_{k=1}^l (a_{l-k}c_k + a'_{l-k}c'_k) = a'_0a_l - a_0a'_l \quad l = 1, 2, \dots, m + m' - 2$$

である。ただし、 a, a' の添数が負となる場合、 a の添数が m より大きい場合、および a' の添数が m' より大きい場合はいずれも 0 と約束する。この連立方程式を c_j, c'_k を未知数とする連立 1 次方程式と見て行列表示すると、各列の成分の次数は行番号が増える毎に 1 増える。このことを使えば、Cramer の公式の分母、分子に現れる多項式は斉次多項式であることが分かる。簡単な計算から

$$\deg R(f, g) = \deg(a_m c_{m'-1} - a'_{m'} c'_{m-1}) = mm' + m'p + mp' \quad (9)$$

であることが分かる。

以上の議論は多くの示唆を Bézout に与えたと思われる。まず、以上の計算を遂行するためには $f(x, y), g(x, y)$ の係数は一般の場合であり、計算に出てくる行列式が 0 とならないことが要求される。また $f(x, y), g(x, y)$ が一般の斉次多項式であるある場合、言い換えれば $\deg a_0 = 0, \deg a'_0 = 0$ で $f(x, y)$ の全次数が $m, g(x, y)$ の全次数が m' の場合は終結式の次数は mm' である。これは、いわゆる Bézout の定理の特別な場合に他ならない。

一方、 $\deg a_0 = p, \deg a'_0 = p'$ の両方が正の場合は、終結式の次数は Bézout の定理が主張する $(m+p)(m'+p')$ ではなく、それより小さい $mm' + m'p + mp'$ となっている。このことに Bézout は多大な興味を示し、斉次多項式でどの項が欠けると終結式の次数がどのように下がるか、上記の乗法子の構成法に基づいて詳細な議論を行うことになり、成書 [Be2] にまとめられた。

ところで、上記の乗法子の決定法は 2 変数だけでなく、 n 変数の n 個の連立方程式の場合に自然に拡張できる。Bézout [Be1] では 5 変数の 5 個の連立方程式の場合まで具体的な計算を行っている。

さらに、Bézout は x に関する次数が同じ n である連立方程式

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \\ g(x, y) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 = 0 \end{aligned}$$

に対しては終結式を別の方法で簡単に求めることができることにも注意している。

まず、 x に関する次数が $n-1$ になる n 個の連立方程式を次のように構成した。

$$\begin{aligned}
F_j(y, y) &= (b_n x^{j-1} + b_{n-1} x^{j-1} + \cdots + b_{n-j+1})f(x, y) \\
&\quad - (a_n x^{j-1} + a_{n-1} x^{j-1} + \cdots + a_{n-j+1})g(x, y) \\
&= a_{j1}(y) + a_{j2}(y)x + a_{j3}x^2 + \cdots + a_{jn}(y)x^{n-1} = 0 \\
j &= 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

この係数の行列式を取れば終結式

$$R(f, g) = \det(a_{ij}(y))$$

が得られる.

ところで, 上の $F_j(x, y)$ の構成法は関孝和の換 n 式の構成法と全く同じである. 関孝和はこの連立方程式から, 逐式交乗法によって終結式を得たが, それは係数のなす n 次行列の行列式に他ならなかった. Bézout は行列式が既に定義できていたので, それを使って終結式が定義できたわけである. 数学的な内容は全く同じであるが, 受け継いだ数学の違いで, 理論展開の順序が異なる形になっている.

3 まとめ

関孝和と Bézout の終結式は両者の引き継いだ数学の違いによって構成の順序が大きく違っていた. Bézout は Cramer の公式を使うことができ, また Cramer の示唆に基づいて行列式を定義し, Euler の終結式の議論に基づいて終結式の理論を展開することができた. 唯, Euler は 2 未知数の場合しか取り扱わなかったが, Bézout は $n \geq 2$ 未知数の n 個の連立方程式に対して乗法子を考えることによって, Euler の議論を拡張した.

一方, 関孝和は一般論が全く存在しない中国伝統数学とそれを受け継いだ江戸前期の数学しか知ることは無かった. かれは多未知数の方程式の記述法を考案し, それに基づいて未知数消去の一般論を構成した. 行列式は, かれが逐式交乗と呼んだプロセスの過程で見出された. 個々の問題を解くことが数学だと見なされた時代に, 消去法の一般論を考察したこと自体驚くべきことであった. 関孝和の越えるべきハードルの高さは Bézout とは比較することができないほど高かった.

参考文献

- [Be1] É. Bézout : “Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations”, Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences, Ann.1764, p.288–338.
- [Be2] É. Bézout: *Theorie Général des Équations Algébriques*, Paris, 1779.
- bibitem[Ca]Ca A Cauchy : “Mémoire sur les arrangement que l'on peut former avec des lettres données, Exercice d'analyse et de physique mathématique”, 3(1844), pp.151-242.

- [Cr] G. Cramer : *Introduction a L'analyse des Lignes Courbes Algébriques*", Genève, 1750.
- [Eu1] L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum*, To. Secundus, Lausanne, 1748.
- [Eu1] L. Euler: "Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations". *Mém. Acad. Sc. Berlin* 20(1764), 1766, pp.91–104 (E310).
- [Gu] 郭書春匯校『九章算術新校』上・下, 中国科学技術大学出版社, 2014.
- [Le] G. Leibniz: "De sublacione literarum ex equationibus seu de reductione pluriunaequationum et ad unam, et quidem in hac scheda theoremata generalia exhibentur proaequationibus simplicibus" (諸方程式から文字を除くこと, あるいは複数の方程式を1個に還元することについて, 事実この論文では単純方程式に関する一般的な諸定理が提示される), *Studia Leibnitiana*, 4(1972), pp.168–80(邦訳『ライプニッツ著作集 数学・自然科学』3, 工作舎, pp.364–378).
- [Ma1] C. Maclaurin: *A Treatise of Algebra*, London, 1748.
- [Ne1] I. Newton: *Arithmetica Universalis*, London, 1707.
- [O] N. Osada: "Determinants by Seki Takakazu from the group-theoretic viewpoint", p.83–100, in "Mathematics of Takebe Katahiro and History of Mathematics in East Asia", edited by Morimoto & Ogawa, *Advanced Studies in Pure Mathematics Vol. 79*(2018), Math.Soc. Japan.
- [Se1] 関孝和 「解伏題之法」, 1683.
- [Se2] 上野・小川・小林・佐藤編『関孝和全集』全3巻, 岩波書店, 2023