グラスマン多様体の起源

高崎金久（大阪公立大学数学研究所）

1 はじめに

グラスマン多様体は与えられた線形空間の中の一定次元の線形部分空間全体の集合として定義される．n 次元線形部分空間の m 次元線形部分空間全体からなるグラスマン多様体は $\mathrm{Gr}(m,n)$ という記号で表される．これはまた $n-1$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ の $m-1$ 次元線形部分多様体（すなわち $m-1$ 次元平面）全体の集合とみなすこともできる．

このようなグラスマン多様体の原型は 19 世紀半ばの Cayley や Plücker の直線幾何学 [15] に見出される [8]．直線幾何学は 3 次元射影空間の中の直線全体の集合を舞台とする．今日の視点から見れば，この集合は $\mathrm{Gr}(2,4)$ である．Plücker はこの集合に一種の同次座標（プリュッカー座標）を導入した．$\mathrm{Gr}(2,4)$ はこの座標によって 5 次元射影空間 $\mathbb{P}^5$ の中に 2 次曲面として埋め込まれる（プリュッカー埋め込み）．このような一見異なる多様体の間の対応は F. Klein [1]や S. Lie らによってさらに追求されて，C. Segre らイタリア学派の代数幾何学者にも研究にもつながった．

19 世紀後半の Schubert による数え上げ幾何学の研究 [18, 19] の中にもグラスマン多様体の原型が見出せる．Schubert は射影空間内のある条件を満たす直線や平面の個数を数え上げることを問題にして，その条件設定の仕方や独自の記号的表現を編み出した．Schubert の数え上げの方法は個数保存原理（Prinzips von der Erhaltung der Anzahl）というあまり厳密でない原理に基づくもので，その記号的計算も暗号的で解釈が難しかった．Schubert の方法の正当化は Hilbert の 23 の問題の 1 つとして 20 世紀に持ち越されることになったが，そこで用いられたのがグラスマン多様体とその特別な部分多様体（今日シューベルト多様体と呼ばれる）である．Schubert の論文の中にもシューベルト多様体の次元勘定に相当する考察が見出せる．

このように Cayley，Plücker，Schubert の研究は後年のグラスマン多様体の導入につながるものだったが，じつはこれらの先駆的研究には Grassmann への言及が皆無である．[2]Grassmann は 1844 年に延長論（Ausdehnungslehre）と題する著作 [9]

[1]Plücker の弟子であり，Plücker の死によって中断された直線幾何学の基礎の完成に携わった．

[2]S. Gindikin の解説記事 [8] は 19 世紀の直線幾何学が 20 世紀後半の R. Penrose のツイスター理論へつながった経緯を一般向けに紹介しているが，この解説記事にも R. Penrose の初期の論文にも Grassmann の名前が見当たらない．

を書いて，1862年に改訂版 [10] を出している（いずれも Grassmann の全集 [7] の中に収録されている）．Grassmann の延長論は今日では線形空間論の始まりとみなされている.[3]線形空間を用いて構成されるグラスマン多様体に Grassmann の名前が冠される理由はこの著作にあると考えるのは自然だが，直線幾何学や数え上げ幾何学の創始者たちは Grassmann にまったく言及していない.

このことの背景には，Grassmann の延長論がその独特の用語・スタイルや内容の難解さのために出版当時ほとんど無視され，1870年前後からようやく注目を集めるようになった，という事情がある [5]. Cayley も Plücker も Schubert も Grassmann の著作を知らなかったか，知っていたとしても関係があるとは考えなかったのだろう．こうして次のような素朴な疑問が生じる：

1. いつ誰がグラスマン多様体という言葉を使い始めたのか？
2. なぜ Grassmann の名前が入っているのか？
3. Grassmann 自身はグラスマン多様体を考えたのか？

第2の疑問についてはすでに1つの答が知られている．たとえば，コルモゴロフ編『19世紀の数学』[2] 1.5 節の「グラスマンの多次元幾何学」の項には次のような記述がある.

> 改訂版の「延長論」(1862) でグラスマンは、n 次元ベクトル空間とそのベクトルの「外積」を定義したが、これは今日では単に n ベクトルと呼ばれる。グラスマンは任意のベクトルの外積を、基ベクトル（彼は単位元と呼んだ）の外積の1次結合として表した。この1次結合の係数は、いまでは n 次元空間の m 次元平面の「グラスマン座標」と呼ばれる。この座標は n 次元空間の m 次元平面を調べる際の基本的な道具となる。したがって、そのような平面の集まりを「グラスマン多様体」と今日呼ぶのである。延長された量の加法，乗法がグラスマンを「符号の変わる数」の代数へと導いたのだが、これについてはすでに述べた。

ここに言及されている「グラスマン座標」はプリュッカー座標の別名である．また，「符号の変わる数」はベクトルの外積を意味する.

第3の疑問は多様体というもののの見方に関わっている．多様体（ドイツ語で Mannigfaltigkeit，フランス語で variété）の概念は Riemann の 1854 年の教授資格取得講演 [17] において初めて登場したとされる．この講演が出版されて広く知ら

[3]G. Peano は Grassmann の延長論に基づく著作 [14] を書いた．そこでは線形空間の公理的定義と諸概念の定式化が行われたが，それは Grassmann の延長論を再構築する試みだった．この著作では集合論の記号 $\in, \cup, \cap$ も導入されて，その後の Peano の記号論理的方法の先駆けとなった. Peano はこの著作の出版の翌年に有名な自然数の公理を提案した.

れるようになったのは Riemann の死後の 1867 年のことである.[4] これは Grassmann の延長論の出版時期よりも少し後になる．Grassmann は 1844 年の延長論 [9] においてもっぱら線形空間とその外積演算を扱った．1862 年の延長論 [10] においてはそこに内積演算とさまざまな応用が加わったが，もっぱら線形空間を扱っていることに変わりはない．延長論では点から始めて線分や直線，平行四辺形や平面，並行 6 面体や 3 次元空間，というように次々に高次元の幾何学的構成要素を導入するが,[5] Riemann の幾何学と違って，曲がった空間は視野に入っていない．それ以上に重大なのは，空間内に広がった幾何学的構成要素を 1 つの点（Raumelement）とみなす，という Plücker の幾何学 [15] のような視点が欠けていることである.[6] その意味では Grassmann が文字通りにグラスマン多様体を考えていたとは思えない．しかしながら，上掲の『19 世紀の数学』からの引用文が主張するように，Grassmann が外積を用いてプリュッカー座標に相当するものを考えていたことは事実である．

以下では第 1 の疑問についていくつかの文献を調べた結果を報告し，第 2・第 3 の疑問も考え合わせて，延長論とグラスマン多様体の関係について考えてみたい．

2　直線幾何学とグラスマン多様体

直線幾何学とグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(2,4)$ の関係を手短かに説明しておこう．なお，ここでの説明の仕方は現代的なもので，Cayley や Plücker のやり方とは異なる．

3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ の直線 L を指定するには，その上の相異なる 2 点 x, y を与えればよい．x, y を同次座標（これも Plücker によって導入された）によって

$$x = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4), \quad y = (y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$$

と表せば，L のプリュッカー座標

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} \quad (1 \le i < j \le 4)$$

が定まる．p_{ij} は一斉に 0 になることはなく，プリュッカー関係式

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$

[4] 1873 年 5 月の Nature 誌にはこの講演の W. K. Clifford による英訳が掲載されている．Clifford は Grassmann の外積代数と Hamilton の四元数を融合した代数 [4]（今日クリフォード代数と呼ばれる）を見出したことで知られるが，幾何学に関しても業績を残している．Clifford による Riemann の講演の英訳を読むと，Mannigfaltigkeit が manifoldness と訳されていることが目を引く．variété（H. Poincaré によって Analysis Situs[16] において導入された）も含めて，これらはすべて「多様性」を意味する言葉であり，数学用語に限らず普通の言葉としても使われている．

[5] このことは「空間」といえば 3 次元空間を意味した当時において画期的なことだった．

[6] Plücker は射影平面内の直線が別の射影平面（双対射影平面）の点と対応するという事実から出発して，射影空間内の直線を 1 つの点とみなすという視点に到達した [8].

を満たす．さらに，このあと説明する簡単な考察によって，L の点 x, y の選び方を変えてもプリュッカー座標は一斉に定数倍されるだけであることがわかる．こうして $p_{12}, \cdots, p_{34}$ を同次座標とする $\mathbb{P}^5$ の点

$$(p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$$

が L から定まる．逆に，プリュッカー関係式を満たす $\mathbb{P}^5$ の点にはある直線 L が一通りに対応することがわかる．この対応

$$L \ \longleftrightarrow \ (p_{12} : \cdots : p_{34}) \in \mathbb{P}^5$$

によって $\mathbb{P}^3$ の直線全体の集合すなわち $\mathrm{Gr}(2,4)$ は $\mathbb{P}^5$ の中のプリュッカー関係式で定義される 2 次曲面と対応する．

L に対する x, y の選び方の影響を調べるためには，x, y の成分を並べた 2×4 行列

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

を考えるとよい．プリュッカー座標 p_{ij} はこの行列の 2 次小行列式である．L の各点はある数の組 $(t_1, t_2) \neq (0, 0)$ によって

$$(t_1 x_1 + t_2 y_1 : t_1 x_2 + t_2 y_2 : t_1 x_3 + t_2 y_3 : t_1 x_4 + t_2 y_4)$$

と表せる．L に対して x, y を選び直すことは ξ に左側から 2×2 正則行列を乗じること

$$\xi \to h\xi, \quad h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad \det h \neq 0$$

に相当する．これによってプリュッカー座標は $p_{ij} \to \det(h) p_{ij}$ というように一斉に定数倍される．これが上で指摘したことである．

この行列 ξ によって $\mathbb{R}^4$ の 2 次元線形部分空間全体の集合との関係も説明できる．直線 L に対応するのは ξ の 2 つの行ベクトル

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

によって $\mathbb{R}^4$ の中に張られる線形部分空間

$$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} = \{t_1 \boldsymbol{x} + t_2 \boldsymbol{y} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

である．ξ に対する 2×2 正則行列の作用 $\xi \to h\xi$ は V の基底変換に相当する．こうして $\mathrm{Gr}(2,4)$ を $\mathbb{R}^4$ の 2 次元線形部分空間全体の集合とみなすことができる．

ちなみに，第 4 列の成分を 1 にした行列

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{P}^3$ 内のアフィン空間 $\mathbb{R}^3$ の 2 点 (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) を通る直線に対応している． Klein は 19 世紀数学を概観する著書 [1] の中で Grassmann の業績も紹介しているが，その説明の中にこの行列が Grassmann の「第 2 段階の基礎図形」（2 次元的広がりをもつ）を表現するものして登場する．Klein は Grassmann の延長論を「ほとんど判読不能」と評し，Grassmann による自著 [9] の解説記事（1854）を採り上げて，その中の「基礎図形」の概念を上のような行列を用いて紹介している．Klein は 1870 年代には Grassmann に言及するようになったが，延長論自体は読みこなせなかったようである [5].

3　グラスマン多様体という名称が登場する文献

グラスマン多様体という名称はいつ頃文献に登場するのだろうか？あるいは，その名称を使っていないが，Grassmann に言及しながら実質的にグラスマン多様体を扱っている文献はいつ頃まで遡れるのか？いくつかの文献に基づいて，いささか雲を掴むようなこの問題を考えてみた．

3.1　van der Waerden の論文（1936）

van der Waeden の 1936 年の論文 [21] は表題にグラスマン多様体（Grassmannschen Mannigfaltigkeit）という言葉が入っているかなり初期の論文である．この論文は “Zur algebraischen Geometrie” という題目の一連の論文の中の 1 つで，Hirzebruch が 2010 年に行った講演 [13] の中で Schubert の論文 [18, 19] とともに紹介されている．van der Waerden の論文が出版された頃にはグラスマン多様体という名称がすでに普及して，Schubert の数え上げ幾何学の研究との関係についても理解が進んでいたと思われる．

Hilzebruch の講演では実代数多様体の位相幾何学的性質に関する Ehresmann の 1837 年の論文も引用されている．しかし Ehresmann はその前の 1834 年にグラスマン多様体に関する画期的論文（Ehresmann の学位論文になった）を書いている．その論文は内容的にも Schubert の研究と密接に関連している．なぜこの論文が引用されていないのか不思議である．

3.2　Ehresmann の論文（1934）

Ehresmann の学位論文 [6] はグラスマン多様体の胞体分割を与えたことで知られている．この胞体分割は Schubert[18, 19] のアイディアに基づいて構成されていて，各胞体の閉包はシューベルト多様体になる．Ehresmann はこの胞体分割を用いてグラスマン多様体のベッチ数を求めた．グラスマン多様体をはじめとする対称空間の位相幾何学的性質については，É. Cartan が外微分形式を用いる研究を行って

いたが，その方法によって個々の対称空間のベッチ数を求めることは難しかった．Ehresmann はグラスマン多様体の場合に焦点を絞り，胞体分割を具体的に構成することによってこの問題を解いた．

この論文の表題にある “certain espaces homogènes” はグラスマン多様体である．本文ではグラスマン多様体（variété de Grassmann）という名称が使われている．論文の第 II 部の表題は “Les variétés de Grassmann considérées comme des espaces homogènes symétriques” であり，その最初の節の冒頭には次のようなグラスマン多様体の定義とプリュッカー座標による記述がある：

> L’ensemble des variétés des variétés planes à k dimensions d’un espace projectif complexe á n dimensions définit une variété algébrique V appelée *variété de Grassmann.* En définissant chaque variété plane à k dimensions par l’ensemble de ses $\binom{n+1}{k+1}$ coordonnées plückeriennes homogénes $p_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ on obtient une représentation biunivoque de la variété V par une variété algébrique sans singularités de l’espace projectif à $\binom{n+1}{k+1} - 1$.

Ehresmann はグラスマン多様体を射影空間の線形部分空間全体の集合として捉えているので（これは前述の van der Waerden の論文でも同じである），このグラスマン多様体は我々の記法では $\mathrm{Gr}(k+1, n+1)$ に相当する．

Ehresmann は Grassmann の研究自体には言及しておらず，この多様体がグラスマン多様体と呼ばれる理由も論文からはわからない．また,「グラスマン座標」ではなくて「プリュッカー座標」（“coordonnées plückerienne”）という言葉が用いられていていることも目を引く．上の引用部分を読む限り，この多様体は Grassmann 多様体という名称とともに以前から知られていたように見える．グラスマン多様体は対称空間の 1 例であるから，Cartan [7]がそのように名付けたのではないか，という想像も働くが，Cartan の国際数学者会議における総合報告 [3] などではグラスマン多様体という名称が使われていない．対称空間の種類は多数に上るので，そのうちの 1 つにわざわざ名前を付ける必要は感じなかったのかもしれない．

Ehresmann はシューベルト多様体に関してすでに多数の数え上げ幾何学的研究があると述べて，F. Severi と van der Waerden のいくつかの論文や Segre の解説記事を引用している．じつはこの中に Ehresmann に先行して「グラスマン多様体」とぃう名称を使っている論文がある．

3.3 Severi の論文（1915）

Ehresmann の前掲論文の引用文献の中に Severi の論文 [20] がある．この論文の表題は “Sulla varietà che rappresenta gli spazî subordinati di data dimesionne,

[7]外微分形式の理論構築のために Grassmann の外積代数の概念と記号を借りているが，Grassmann の著作そのものをどの程度読んだかはわからない．

immersi in uno spazio lineare" であるが，このイタリア語の表題を英訳すれば "On the variety that represents spaces subject to a given dimension, immersed in a linear space" となる．要するにこれはグラスマン多様体を論じた論文である．ここで線形空間（spazio lineare）と呼んでいるのは射影空間である．当時の一般的な記法では，n 次元射影空間は S_n という記号で表される．

この論文はプリュッカー座標（一般次元の場合にはグラスマン座標と呼んでいる）を用いてグラスマン多様体（V_t という記号で表されている）の性質を論じている．V_t は我々の記法で $\mathrm{Gr}(k+1, r+1)$ と表されるグラスマン多様体を $\binom{r+1}{k+1}-1$ 次元射影空間の部分多様体として実現したもので，$t=(k+1)(r-k)$ 次元代数多様体になる．

論文の最初の段落では Grassmann の 1862 年の延長論 [10] を引用しながら，プリュッカー座標がある行列の最大次数の小行列式として定義されることや，ある 2 次同次関係式を満たすことを述べている．第 4 段落では "la V_t, che ciameremo varieta grassmanniana di indici (r,k)"，英訳すれば "V_t, which we will call the Grassmannian variety of indices (r,k)" という文言においてグラスマン多様体という名称が登場する．Ehresmann の論文と違って，この多様体をグラスマン多様体と命名する，と言っているようにも見える．

しかしこの論文が我々の探して求めていたものであるとはまだ断定できない．Severi が最初の段落の脚注で述べていることによれば，D'Ocidio [8]は 1877 年の論文にプリュッカー座標が満たす 2 次同次関係式を書き記していて，Grassmann と A. Clebsch も同じ頃にこの種の関係式に言及していた．[9]Clebsch は 1870 年代初めに Grassmann に注目していた数少ない数学者の 1 人であるが [5]，多くの弟子や友人をもち，その影響力は大きかった（Klein もその影響を受けた 1 人だった）．イタリア学派の代数幾何学者が Severi の論文以前に Grassmann 多様体を論じていた可能性も大いにある．

4　延長論とグラスマン多様体

1862 年の延長論 [10] にはプリュッカー座標が登場する（それゆえにプリュッカー座標はグラスマン座標とも呼ばれている），ということを序文で述べた．そもそも延長論のどこにそういうことが書いてあるのだろうか？

この点に関しては 1862 年の延長論の英訳 [11] の Suplementary Notes が参考になる．そこには「グラスマン変数」すなわちグラスマン座標＝プリュッカー座標が延

[8]D'Ocidio は Plücker の直線幾何学に触発されて線織面の研究（1881–1882）を行った．Segre は D'Oidio の弟子であり，D'Oidio の指導の下で線織面や 2 次曲面を研究した．

[9]Severi によれば Grassmann がそれに言及したのは 1877–1878 の Crelle 誌においてであるが，Grassmann は 1877 年に死去したので，これは最晩年のことになる．また，Clebsch は 1872 年に死去した．Clifford も 1879 年に死去したが，そのときにはまだ 30 代半ばだった．

長論第3章（外積[10]の定義や性質を説明している）に登場することや，Grassmannがそれを用いて線形部分空間を捉えようとしていたと解釈されることなどが指摘されている．それに従って延長論の本文を調べれば，第3章の第65項と第70項にそのような内容が記されていることがわかる．以下にその要点を紹介する．

第65項では，$a_1, \cdots, a_n$ を線形独立な基本量[11]として，そのいくつかの線形結合 $\sum \alpha_i a_i$, $\sum \beta_i a_i$, $\cdots$ [12]の外積

$$\left[\sum_i \alpha_i a_i \sum_j \beta_j a_j \cdots\right] = \sum_{i,j,\cdots} \alpha_i \beta_j \cdots [a_i a_j \cdots]$$

を考えている．延長論では外積をこのように角括弧によって表す.[13]現代的な記法では

$$\sum_i \alpha_i a_i \wedge \sum_j \beta_j a_j \wedge \cdots = \sum_{i,j,\cdots} \alpha_i \beta_j \cdots a_i \wedge a_j \wedge \cdots$$

となる．反対称性

$$[a_i a_j a_k \cdots] = -[a_j a_i a_k \cdots] = \cdots$$

によって $[a_i a_j \cdots]$ を

$$[a_i a_j \cdots] = \pm [a_r a_s \cdots], \quad r < s < \cdots$$

というように昇順の外積に書き直せば

$$\left[\sum_i \alpha_i a_i \sum_j \beta_j a_j \cdots\right] = \sum_{r<s<\cdots} \left(\sum \pm \alpha_r \beta_s \cdots\right)[a_r a_s \cdots]$$

となる．

この展開式が第65節の主な主張である．ここで $\sum \pm \alpha_r \beta_s \cdots$（原文の通りに書いている）は $\alpha_r, \alpha_s, \cdots, \beta_r, \beta_s, \cdots$ を並べて得られる行列式にほかならない．延長論では行列式に対して特別な記号を用意せず，このようなルーズな書き方をする．現代的記法を用いて正確に書けば，この $[a_r a_s \cdots]$ の係数は

$$\sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \alpha_{\sigma(r)} \beta_{\sigma(s)} \cdots = \begin{vmatrix} \alpha_r & \alpha_s & \cdots \\ \beta_r & \beta_s & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

[10]外積は延長論では kombinatorische Produkt （英訳すれば combinatorial product）という名称で呼ばれている．

[11]原語は einander stehenden Grösse である．英訳では Grösse は magnitude と訳されている．

[12]原著では基本量と係数の添え字はドイツ文字 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots$ であるが，煩雑なので，ラテン文字 $i, j, \cdots$ を使うことにする．

[13]E. Cartan は外微分形式の理論でこの角括弧記法を用いている．

である．総和は（m を外積の次数として）m 個の数 $r, s, \cdots$ の $m!$ 通りの置換全体にわたるもので，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号を表す．この行列式は横長の $m \times n$ 行列

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

の番号 $r, s, \cdots$ の列を取り出して得られる小行列式である．こうしてプリュッカー座標（グラスマン座標）が現れる．この外積を用いたプリュッカー座標の解釈は現在でもそのまま使われている．

第 70 項では基本量の線形結合として任意の 2 組 $a_1, \cdots, a_m$，$b_1, \cdots, b_m$ [14]が与えられたときに

外積 $[a_1 \ldots a_m]$ と $[b_1 \cdots b_m]$ が定数倍を除いて等しいこと

$$[a_1 \cdots a_m] \equiv [b_1 \cdots b_m]$$

の必要十分条件はそれぞれの張る線形空間が等しいこと

$$\mathrm{Span}\{a_1, \cdots, a_m\} = \mathrm{Span}\{b_1, \cdots, b_m\}$$

である

という主張が成り立つことを証明している．もちろんこれは現代的に言い換えた主張であるが，$\mathrm{Span}\{a_1, \cdots, a_m\}$ と $\mathrm{Span}\{b_1, \cdots, b_m\}$ は原文で die aus ihren einfachen Faktoren ableitbaren Gebiete と呼ばれているもの（英訳された延長論 [11] では the domain derived from their elementary factors と訳されている）に相当する．$a_1, \cdots, a_m$ と $b_1, \cdots, b_m$ がそれぞれ einfachen Faktoren（simple factors）であり，それによって張られる線形空間が Gebiete という言葉で表されている．

上の主張は線形空間をその基底の外積 $[a_1 \cdots a_m]$ によって捉えるという考え方（延長論の根幹をなす）を具現するものである．ちなみに，第 84 項はこのような外積（今日では外積代数の分解可能元と呼ばれる）から基底を復元する方法を紹介している．

これらの主張を組み合わせれば，n 個の基本量を基底とする線形空間の m 次元線形部分空間がプリュッカー座標によって一意的に捉えられることになる．これは確かにグラスマン多様体の概念へ向けて 1 歩踏み出したものといえるだろう．ただ，そこから線形部分空間全体を 1 つの幾何学的舞台として捉えることには相当の距離がある．やはり直線幾何学のような背景がなければグラスマン多様体に思い至ることは難しいように思われる．その意味で，1870 年以降に Grassmann の研究に関心をもつ Klein や Lie のような数学者が現れてきたことの意義は大きい．

[14]上の $a_1, \cdots, a_n$ と混同しないように注意されたい．そのような n 個の基本量が別途与えられているとして，それらの線形結合を $a_1, \cdots, a_m$ および $b_1, \cdots, b_m$ と表しているのである．

Severi[20] が脚注で触れているように，Grassmann 自身も晩年になってプリュッカー座標（言い換えれば，外積代数の分解可能元）を特徴付ける代数的関係式の問題に取り組んだ．J. Dieudonné は Grassmann の評伝 [5] の最後の部分でこの問題に触れて，Grassmann の全集 [7] の編者である F. Engel と J. Study もこの問題に取り組んだことを指摘している．そして Study の方法を延長論の精神に則って外積代数の言葉で解説している．Dieudonné は延長論（特に 1844 年版）が座標を使わずに線形空間を記述したことを重視していて，プリュッカー座標の使用を避けて，外積と内部積（interior product）$a \lrcorner b$ [15]だけを用いるやり方で Study の方法を説明している.[16]Engel と Study は 1894 年から 1911 年にかけて刊行された Grassmann の全集に数多くの注釈を書き加えた．前節で追求を試みた問いへの答がこれらの注釈の中に隠れている可能性もある．

5　結論

序文で提示した 3 つの疑問は相互に絡み合っている．その中でも「なぜ Grassmann の名前が入っているのか？」と「Grassmann 自身はグラスマン多様体を考えたのか？」という問いにはすでに知られた答があるが，延長論の中でそのことに関わる箇所を具体的に紹介した．他方,「いつ誰がグラスマン多様体という言葉を使い始めたか？」という問いについては，1915 年の Severi の論文まで遡ることができたが，これはまだ最終的な答ではないように思われる．さらなる探索の範囲は Clebsch の影響を受けた人々や D'Ocidio と Segre 以降のイタリア学派だろう．Engel と Study が Grassmann の全集に付けた注釈の中にも手がかりがあり得る．さらに Cartan がこのことにどのように関わっているのかも気になる．

もちろんこのささいなテーマの向こうには Grassmann の延長論自体が及ぼした影響という大きなテーマがあるが,[17]それについてはすでに数多くの研究が行われている．

参考文献

[1] F. クライン（著），彌永 昌吉（監修），足立恒雄・浪川幸彦（監訳），石井省吾・渡辺弘（訳）,『19 世紀の数学』，共立出版 1995 年.

[2] A. N. コルモゴロフ（編），小林昭七（監訳）,『19 世紀の数学 II』，朝倉書店 2008 年.

[15] 1862 年の延長論 [10] にはその原型も見出せる．

[16] 同様のやり方は Griffth と Haris の本 [12] でも紹介されている．

[17] Dieudonne による評伝 [5] は「Grassmann の悲劇」という表題の下で，グラスマンの数学研究が同時代の数学者になかなか受け入れられなかった状況を詳しく紹介している．脚注の中には，Grassmann と同じ時代どころか，日本数学会の数学事典の旧版も Grasmann に言及していなかった，という逸話が記されている．

[3] É. Cartan, Les espaces riemanniens symétriques, Verh. Int. Math. Kongr. **1**, 1932, pp. 152–161.

[4] W. K. Clifford, Applications of Grassmann's extensive algebra, American Journal of Mathematics **1** (1878), 350–358.

[5] J. Dieudonné, The tragedy of Grassmann, Séminaire de Philosophie et Matématiques, 1979, fascicule 2, 1–14.

[6] C. Ehresmann, Sur la toplogie de certain espaces homogènes, Annals of Mathematics **35** (1934), 396–443.

[7] F. Engel (ed), *Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, Bd. 1–3, Leipzig, 1894-–1911.

[8] S. Gindikin, Complex universe of Roger Penrose, Mathematical Intelligencer **5**, no. 1, Springer-Verlag, 1983, pp. 27–35.

[9] H. Grassmann, *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Abwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, Leipzig, 1844.

[10] H. Grassmann, *Die Ausdehnungslehre, Vollständig und in strenger Form begründet*, Berlin, 1862.

[11] H. Grassmann, *Extension Theory*, translated by L. Kannenberg, History of Mathematics Source Series, vol. 19, American Mathematial Society, 2000.

[12] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, 1978.

[13] F. Hirzebruch, 125 years of the Schubert Calculus, Edinburgh, September 17, 2010 and Bonn, November 13, 2010.

[14] G. Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Trino, 1888.

[15] J. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, Bd. 1–2, Leibzig, 1868–1869.

[16] H. Poincaré, *Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique, Serié 11, Gauthier-Villars, 1985.

[17] B. Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Göttingen, 1854.

[18] H. Schubert, Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzhahlen unseres Raumes, Mathematische Annalen **26** (1986), 26–51.

[19] H. Schubert, Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension, Acta Mathematica **8** (1886), 97–118.

[20] F. Severi, Sulla varietà che rappresenta gli spazî subordinati di data dimesionne, immersi in uno spazio lineare, Annali di Matematica, Serie III, **24** (1915), 89–120.

[21] B. L. van der Waerden, Zur algebraischen Geometrie VIII, Der Grad der Grassmannschen Mannigfaltigkeit der linearen Räume S_m in S_n, Mathematische Annalen **113** (1936), 199–205.