確率論学者としての亀田豊治朗の業績
― 過渡期の数学者 ―

鈴木真治

目次

序

本論の目的は，戦前の我国を代表する官製アクチュアリーであり独創的な統計学者でもあった亀田豊治朗について，主に次の 4 点を考究にすることにある．

(1) 亀田の略歴を辿りながら，その業績と彼の活躍した時代背景とを照らし合わせることで学術的な面のみならず政治的な影響も浮き彫りにすること
(2) 亀田の主著『確率論及ビ其ノ應用』を通じてコルモゴロフの公理発表前夜の「確率」の取り扱いについての概観を与えること
(3) 亀田の 1915 年と 1925 年の主論文を通して確率論学者としての亀田の業績を 20 世紀初頭の数学的文脈の中に位置づけて評価すること
(4) ⑵と⑶から数学者としての亀田の先進性と保守性を総括すること

1 亀田豊治朗の略歴

亀田豊治朗は，1885（明治 18）年 1 月 18 日，東京出身の大阪商人亀田安兵衛の次男として大阪に生まれた．その後，父と共に東京に移り，小学校を卒業すると直ぐに鉄道作業局の一雇員となって 1897（明治 30）年から実社会で働き始めた．幸運なことに当時鉄道事務官に昇進したばかりの小林源蔵[1]から亀田はその類稀な学才を認められ，学問を継続する援助を受けることができた．現代では分からないが，少なくとも筆者の学生時代くらいまでは，貧しい家に秀才の子供が生まれると，これを援助してくれる人物が現れ，学資を工面してくれるという話は珍しくなかった．（もっとも，後々は自分の娘の婿養子になることが条件だったりもしたが.）

亀田は，逓信省鉄道作業局で働きながら 2 年後の 1899（明治 33）年には工手学校を卒業している．工手学校は技手（職人と技術者の中間的存在）の養成学校で，かなり厳しいカリキュラムが課せられており，この当時，帝大を出ただけの未熟な監督官の下で実務能力の高い工手が現場を支えているという状況はしばしば見受けられた．しかし，工手は低い地位のままで据え置かれ，この頃の亀田はそのような現実を目の当たりしていたのかもしれない．

19 歳の春，亀田は，当時の長官平井晴二郎の紹介で小石川にある藤澤利喜太郎の私邸を訪ね，中等教員検定試験に合格して教員資格を取得するという自らの希望に対する意見を求めた．藤澤は「人間の実力は自分で思って居る丈では分からぬものである．（中略）兎も角試験を受けて，どれだけの力があるかを見て貰うことがよかろう.」と，先ずは，試験を受けることを勧めた．亀田は藤澤の勧めに従い，その年の１１月に受験し，これに見事合格．翌年 6 月には，彦根中学校に教諭とした赴任することになった．

[1] 日本の鉄道官僚で，後に衆議院議員．

東京を去るに臨んで，亀田は藤澤を訪ね，更なる希望を述べた．「私は年も未だ若いし，凡てが未熟でありますから，今，幸い職に就きましても此の儘単に経験を積むだけでは教員としても不十分のように思われます．今一度上京して出来得るならば帝国大学に入学したいと思います．併し，中学校も高等学校も経て居りませぬから，選科のようなものでもありまして入学が出来得るならば非常に仕合わせと存じます．」これに対し，藤澤は次のように答えた．「選科は以前はあったが今は置かれて居ない．然し高等学校卒業の検定試験と云う制度もあるから，その方から進むならば入学を許される筈である．」

爾来，亀田は藤澤の言葉に従って卒業検定試験合格に向けて全力を傾けようとした．しかし，世間は亀田の才覚を受験勉強だけに専念することを許さなかった．中学校の教諭になって 1 年も経たないうちに，国有鉄道共済組合設計のため，小林[2]に東京に呼び戻され再び鉄道作業局に勤務することになったのである．我国初の社会保険の制度設計であり，それ自体が歴史に残る大仕事であって，満足に受験勉強に時間を割くことはできなかったのではないかと思われる．しかし，この制度準備において亀田は粟津清亮との知己を得る僥倖に恵まれている．保険学においては一日の長がある粟津は，「英国アクチュアリ会から貰った教科書を亀田君に示し軽易な保険料の計算法も手を採って君に伝授したのであって，亀田君は容易に之を習得して，後に述べる所の帝鉄救済組合の数理的基礎をつくった．」[3]と述懐している．亀田と保険数学との出会いを知る上での興味深いエピソードである．

結局，亀田は，藤澤から卒業検定試験の話を聞いてから 2 年余り経った，1908（明治 41）年 10 月に第一高等学校卒業検定試験に合格し，東京帝国大学入学を果たした．国鉄側が亀田の受験を慮って嘱託の身分で勤務させていたとはいえ，国有鉄道共済組合の制度設計のための膨大な作業の合間を縫っての受験勉強でなされたことを考えると驚くべき快挙と言わざるを得ない．

亀田の大学での学業は順調で，卒業時に銀時計恩賜の栄誉を受けている．そして亀田の進学に大きな影響を与えた藤澤が進路においても決定的な指針を与えることになる．卒業を翌年に控えた 1910（明治 43）年，亀田を為替貯金局長の下村宏に会わせたのである．下村は東京帝大の法科の出身ではあったが，学生時代に藤澤の統計学の授業を受けていた．事前に藤澤から亀田のことを聞いていた下村は「この度，郵便局を機関として生命保険を創始したいと云う計画がある」と切り出した．「君は共済組合の仕事もやり，保険に興味を持っていると藤澤教授から聞いているが，卒業後この方面に従事する気はないか．」局長自らの一本釣りである．亀田は元々が国鉄の技師であり，国鉄は，独学で帝大に入学するような離れ業をやってのけた将来有望な亀田のために，いろいろと便宜を図ってくれていた．当然，そのことは亀田にも分かっていたし，恩義にも感じていたであろう．しかし，「数学を実際的方面に応用し，広くこれを活用して行く」ことが年来の希望であった亀田にとって，下村からの誘いは非常に魅力的であり，恩師の藤澤もそれを望んでいた．亀田は下村の誘いを快諾し，ここに彼の簡易保険事業への参画が決定した．

翌 1911（明治 44）年，亀田は，下村の下で，保険調査部嘱託として簡易保険の主に数理方面の調査研究に従事し，1912（明治 45）年には第一回郵便保険年金諮問会議に参加している．この頃，煙草元売販売を営む宮城県多額納税者，新沼綱五郎の妹であった十歳年下のまきと結婚している．媒酌人は亀田にとって恩人とも言える小林源蔵であった．

1913（大正 2）年 5 月には留学のためドイツへ旅立ち，同年 11 月には長男豊が生まれている．ところが，ドイツに着いた翌年，第一次世界大戦が勃発，いつ身柄を拘束されるとも限らない状況に陥ってしまった．幸いにも，亀田は，日本が宣戦布告（1914 年 8 月 23 日）をする 1 週間前にドイツを逃れてイギリスに渡ることが出来たので難なきを得，留学期間を短縮せざるを得なかったのは残念であったが，無事帰朝することができた．

亀田は帰国するや，1914（大正３）年 11 月 30 日には，日本アクチュアリー会に入会し，翌 1915（大正 4）年には，自身を代表する論文“Theorie der erzeugenden Funktion und ihre Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung（母函数理論とその確率論への応用）”を発表[4]．これを元にした学位論文「母函数ノ理論及其ノ確率論上ノ應用」が，1918（大正 7）年の東京帝国大学理科大学紀要において発

---

[2] 小林はこの当時，日露戦争での 1 年半にわたる虜囚生活から解放されて帰国したばかりで，［野田］p.13 によると鉄道作業局主記課長であった．彼はまた粟津の帝大時代の同窓生でもあった．
[3] ［華西 9］ p.126
[4] この当時の欧文の学術論文にドイツ語が多かった理由は明治 14 年の政変に遡るとの説がある．（詳しくは［Laurens & Mazliak］参照のこと）

表され，同年 12 月 23 日に学位が授与されている．日本において確率論による初めての学位授与であった．

このようなアカデミックな活動をしつつも，亀田は本職である数理官僚として実績を確実に積み重ねていた．下村に簡保事業への参画を誘われてから 6 年，紆余曲折しつつもようやく 1916（大正 5）年 10 月 1 日に発足した簡易保険制度においては初代統計課長に任じられ，次の主管事項を担当した．

(1) 責任準備金の計算
(2) 還付金及び契約変更の計算
(3) 統計の作成

特筆すべきは，(3)である．全件調査に基づく「正式統計」と証券番号が 500 の倍数の契約だけを抽出して作成されたデータに基づく「簡易統計」を作成し，それぞれで契約者の職業別契約数を集計した上で，簡易統計からの推計値と正式統計による実数の差違が如何に小さく，しかも「ベルヌーイの定理の統計学に於ける応用[5]」によって具体的に見積もれることを検証している．このような実験的試行を簡易保険において何度も行っていたことが，後に亀田が第 1 回国勢調査に関わった際，斬新な簡易統計の応用へと繋がっていくのである．

1920（大正 9）年 10 月 1 日，我国初の国勢調査が実施された．この歴史的国家イベントは，経済を含む国情を明らかにすることで国民統治に利するという実利的な目的もさることながら，日本が欧米列強と肩を並べる文明国となった証とみなされ，国の大々的な宣伝・啓蒙活動も功を奏し，一種の国粋主義的様相さえ見せていた．

国勢調査が実施されたとき，亀田は簡易保険局技師兼逓信技師兼鉄道技師であり，逓信省簡易保険局統計課長でもあったが，11 月 26 日付で，国勢院統計官の兼任を命ぜられている．しかし，国勢院統計官には東京帝国大学の数学科を卒業した森數樹がいたし，杉亨二の弟子でもあった横山雅男や内閣統計局で永年人口動態調査や死因調査に携わってきた二階堂保則が統計官として実務の中心にいたので，亀田が特別になにかをする余地はなかったと思われる．ところが，集計作業真っ最中の 1923（大正 12）年 9 月 1 日に発生した関東大震災により，国勢調査の集計作業は大きく遅延することを余儀なくされた．しかし，国民は国勢調査を「一等国の仲間入りの証」と捉えており，その結果を心待ちにしていた．そこで苦肉の策として，亀田の言うところの簡易統計が行われることになった．この当時，簡易統計を自信を持って行える人物は，簡易保険で何度も実験的に「簡易統計」を行ってきた亀田を置いて他に居なかったであろう．翌年，亀田は『抽出方法に依る第一回國勢調査結果の概観』にその結果をまとめて発表した．フィッシャーによる本格的な数理統計学の研究書『研究者のための統計的方法（1925 年)』が世にでる 1 年前のことであり，世界的にもかなり評判になった．それ故，1930（昭和 5）年 9 月に東京で開催された第 19 回国際統計協会会議において，亀田の報告に対し，極めて優秀な成果として会長報告がなされ，出席の諸外国の学者から大きな賞賛を受けた．亀田の報告講演が終わるやアメリカ人を主とした数人の学者が直ちに亀田を囲んで詳細な説明を求めていたことを同席していた齋藤齊が書き残している．

当に，順風満帆の人生と言えよう．この頃の亀田の興味深いエピソードを後の日本アクチュアリー会第 7 代会長になる竹下清松が残している．彼は，亀田の帝大での 1 年後輩にあたる．

どういう場所であったかは覚えていないのですが, 各大学の休憩室に木炭をたいた火鉢が出て来る. そこに集ったときに亀田君が言ったか, アクチュアリ―会の例会のときに言ったのか, よくこういうことを言いました。「僕は何とかして伯爵になりたい. 」ちょっと聞くとえらい野心を持っておる男くらいにしか思われない。そして亀田君がなぜ伯爵になりたいというのか当時私にはちょっと理解できなかった. ところがその後考えてみますと, どうも亀田君はラプラスくらいの大学者になりたい. いやなるつもりだと言葉に綾をつけたものであるまいかと思うのです. 亀田君は確率論を非常に勉強し, 学位論文は確率論の基本原理に関するものでした。ラプラスはご承知のように確率論の大先輩, 大数学者で, ナポレオンから伯爵をもらった. 亀田君ももう少し健在であったなら, 伯爵どころか, ノーベル賞に値する研究を大成したのだろうと, これまた惜しまれます. [竹下]

[5] ベルヌーイの定理と言うよりもラプラスの定理，または中心極限定理の応用と言う方が現在では馴染み深いであろうが，ここでは亀田の論文に従った．

筆者は，「言葉に綾をつけたもの」という竹下の推測は相当程度に当たっていたと思料する．少なくとも，亀田が本気で伯爵位を望んでいたとは考えにくい．なぜなら，亀田の師である藤澤でさえ爵位は有していなかったし，その更に師であり文部大臣を歴任した菊池大麗でも男爵がやっとであった．亀田がこのような事例を知らない筈はなく，伯爵など現実的には有り得ないことは熟知していたはずだ．

1925（大正 14）年，亀田は 1915（大正 4）年のドイツ語論文の増補改訂版として“Theory of Generating Functions and Its Application to the Theory of Probability,”を新設された東京帝國大學理學部紀要（第 1 巻第 1 節第 1 部）の最初の論文として発表した．新しい雑誌の巻頭論文に選ばれるというのはその論文の重要性が認められていたからだろうし，亀田がわざわざドイツ語から英語に変えた理由は第一次世界大戦でのドイツの敗北にあったと考えられる．（詳しくは［Laurens & Mazliak］参照のこと）

【亀田の数学関係の論文目録】

論文名	掲載雑誌・掲載年
逐差法の記號分離に就て	日本アクチュアリー会会報　第 1 号 p.156-p.180（1941）
二次微分方程式ト積分方程式トノ関係 (IV)	全国紙上数学談話会. 157 p.152-p.167（1938）
二次微分方程式ト積分方程式トノ關係 (III)	全国紙上数学談話会. 151 p.3-p.16（1938）
二次微分方程式ト積分方程式トノ関係 (II)	全国紙上数学談話会. 150 p.391-p.398（1937）
二次微分方程式ト積分方程式トノ關係 (I)	全国紙上数学談話会. 149 p.357-p.364（1937）
積分方程式ノ近似解法 (II)	全国紙上数学談話会. 112 p.13-p.21（1936）
積分方程式ノ近似解法 (I)	全国紙上数学談話会. 111 p.1-p.8（1936）
On an integrable class of differential equations.	Proceedings Phys.-Math. Soc. Japan (3) 15, 184-194 (1933).
A general method for solving linear integral equations. III.	Proceedings Phys.-Math. Soc. Tokyo (3) 11, 169-180 (1929).
A general method for solving linear integral equations. II.	Proceedings Phys.-Math. Soc. Tokyo (3) 11, 17-27 (1929).
On the reduction of frequency curves.	Skand. Aktuarietidskrift 11, 112-118 (1928).
A general method for solving linear integral equations. I.	Proceedings Phys.-math. Soc. Japan (3) 10, 231-234 (1928).
Foundation of the theory of probability.	Proceedings Phys.-Math. Soc. Tokyo (3) 7, 90 (1925).
On the transformation of differential equations.	Proceedings Phys.-Math. Soc. Tokyo (3) 7, 93 (1925).
On Fourier’s double integral theorem.	Proceedings Phys.-Math. Soc. Tokyo (3) 7, 89 (1925).
Theory of generating functions and its application to the theory of probability.	Journal Faculty of Science Tokyo 1, 1-62 (1925).
A method for solving some integral equations.	Tôhoku Math. J. 23, 197-209 (1924).
On the Fourier series.	Proc. of the physico-math. Soc. of Japan (3) 5, 60-68 (1923).
On the theory of finite differences.	Tôhoku Math. J. 16, 62-72 (1919).
母函数ノ理論及其ノ確率論上ノ應用　［学位論文］	東京帝国大学理科大学紀要（1918）
第一次世界大戦（1914-1918）	
Eine Verallgemeinerung des Poissonschen Problems in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.	Tôkyo Math. Ges. (2) 8,155-158 (1917-18) (1917).

Geometrischer Beweis und Erweiterung eines Satzes von Tschebyscheff.	Tôhoku Math. J. 6, 155-165 (1915).
Theorie der erzeugenden Funktionen und ihre Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung.	Tokyo Math. Ges. (2) 8, {262－295336－360} (1915).
Über zwei Probleme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.	Tôkyo Math. Ges. (2) 8, 556-564 (1915-16) (1915).
Geometrischer Beweis und Erweiterung eines Satzes von Tschebyscheff.	Tôhoku Math. J. 6, 155-165 (1914).

亀田は，これまでの豊富な実務経験に基づき，共済制度一般を解説した「共済組合に就て」(1924（大正 13）年）及び，短期及び長期の基礎計算や長期計算給付所要財源の実際計算を説明した「共済組合の基礎計算に就て」(1927（昭和２）年）を発表，共済組合の意義や官業共済組合の沿革および現状，共済組合の短所と長所，社会保険との比較，基礎計算などについて論じた「官業共済組合と社会保険」（1937（昭和 12）年）のような共済組合についての貴重な基礎文献を残している．また船員保険[6]や労働保険にも深く関わっていたのだが，船員保険が実現した頃（1939（昭和 14）年）には，亀田は既に官を辞していたし，労働保険についても，それが実現されるのは亀田の没後であった．

確率論の歴史に名を残す英雄たちウィナー，コルモゴロフ，レヴィ，クラメール，フォン・ミーゼス，ヒンチン，フェラー等々の研究が百花繚乱と咲き乱れる黄金の 30 年代，亀田は既に 50 代を迎えようとしていたが，重要な著書を精力的に執筆している．1932（昭和 7）年の『確率論及ビ其ノ應用』は，確率の定義が古臭いとの批判はあるにしても，統計学を確率論の応用分野として明確に位置付けた好著であるし，1933（昭和 8）年発行の『保険數學』は戦前の和書における保険数学の最高峰と言ってよかろう．そして 1933（昭和 9）年には第 6 代アクチュアリー会会長に就任している．

1938（昭和 13）年 1 月，簡易保険は，当時の社会情勢下で新設された厚生省保険局に移され，亀田は，厚生省保険院総務局数理課長と簡易保険局統計課長を兼任することになったが[7]，同年 10 月，官を辞して第一生命保険相互会社の取締役に就任している．当時の内規または慣習では，一般の公務員には 55 歳定年制が適用されていたことを考えると，未だ定年までに 1 年 2 カ月ほどあったが，亀田としては既に簡易保険数理実務[8]の道筋は凡そ目鼻がついたと感じていたのかもしれない．

亀田の最後の論文「逐差法の記號分離に就て」が日本アクチュアリー会会報第 1 号に掲載されたのは 1941（昭和 16）年で，亀田は同雑誌の編集委員長でもあった．

厚生省を離れて 6 年後の 1944（昭和 19）年，亀田は脳溢血とカタル性肺炎のため東京帝大病院で亡くなった．奇しくも亀田と縁の深い簡易保険創立と郵便年金創始及び国勢調査施行と同じ 10 月 1 日であった．享年 59 歳．多年に渉る功績が評価されて勲三等旭日中綬章を授与された．

【亀田の年譜】

年月	亀田の経歴	関連事項
1885.1.18	東京府人龜田安兵衛の二男として大阪に生まれる．	
1894.8		日清戦争勃発
1897.8	逓信省鉄道作業局勤務．小林源蔵と出会う．	
1899	家督相続 工手学校卒業	日本アクチュアリー会設立
1904.春 .11	平井晴二郎の紹介で藤澤利喜太郎と出会う． 中等教員検定試験合格	日露戦争勃発
1905.6	滋賀県立第一中學校赴任	

[6] 国が保険者となり，一般の民間労働者を対象とした社会保険としての初めての年金制度．

[7] このとき亀田は正四位の位階に叙せられたとのことである．粟津はこれを評し，「逓信省の給仕が独立の技能を以て拮据（きっきょ）三十年此高位を占められたことは例の少ないことであるが，我々の敬服すべき偉業である」と述べている．［華西 9］p.133

[8] 1926（大正 15）年，郵便年金の創設，1931（昭和 6）年，小児保険の創設，1938（昭和 13）年，簡易生命保険経験生命表（昭和 5～9 年度）の作成，及びこれにもとづく新料率の算定も手掛けていた．

1906.5	鉄道技手に任官	
1907.5	国有鉄道共済組合保険設計	保険数学との出会い
1908.10	第一高等学校卒業検定試験合格 東京帝国大学入学	
1910.8	藤澤の勧めで，為替貯金局長の下村宏を訪ねる.	
1911	東京帝国大学卒業（銀時計恩賜）. 保険調査部嘱託として簡易保険の主に数理方面の調査研究に従事	
1912	第一回郵便保険年金諮問会議に参加	
1913.5	省命により保険数学及び経営方法の研究のためドイツへ留学（第一次世界大戦のため翌年帰朝）	
1914.2 .11	チェビシェフによる定理の幾何学的証明と拡張 日本アクチュアリー会入会	第 1 次世界大戦勃発
1915.7	母函数理論とその確率論への応用	
1916.6 .10	簡保職員向けの実務研修で保険数学講師 簡易保険制度発足,初代統計課長	
1918.12	学位授与　※日本で最初の確率論に対する学位	
 1920.11	簡易統計論 国勢院統計官兼任	
1921.12	労働保険調査会臨時委員	
1923	『国勢院統計講習会講演録』	関東大震災
1924.4	『共済組合について』 『抽出方法に依る第一回國勢調査結果の概観』	
1925	統計的研究法に就いて 欧米出張	フィッシャー『研究者のための統計的方法』
1927.5	『共済組合の基礎計算に就いて』	
1928	國勢調査の利用に就て	
1930.9	第 19 回国際統計協会会議参加	
1932	『確率論及ビ其ノ應用』	
1933	『保險數學』 第 6 代アクチュアリー会会長就任	コルモゴロフの公理
1934	『生命保険論』	
1938.1 .8 .10	厚生省保険院総務局数理課長と簡易保険局統計課長を兼任 『官業共済組合と社会保険』 退官. 第一生命保険相互会社取締役就任	
1941	「逐差法の記號分離に就て」	太平洋戦争勃発
1944.10.1	脳溢血とカタル性肺炎のため東京帝大病院で死去 勲三等旭日中綬章	
1945.8		終戦

2　亀田の確率についての見方

1932（昭和 7）年に出版された亀田の著書『確率論及ビ其ノ應用』における確率の定義は存外古典的で，翌年発表されたコルモゴロフの『確率論の基礎概念』と併せ読むととても同時代の著書とは思えないほどのギャップを感じざるを得ない．以下に，該当部分を転載しておく．

亀田による「確率」の定義（1932）
定義1.結果の確率

ある事象の生起する確率とは，その事象を生じ得べき状態にある同種のものを無限に多く集めて観察したるとき，その事象の生起する度数と全観察数との比の極限をいう.
定義2.原因の確率 ある結果を生じた原因の確率とは，その結果と同種の結果を無限に多く観察したとき，その原因の存在したりし場合の数の全観察数に対する比の極限値をいう.
定義3.確率の一般定義 命題“A は B なり”が真なる確率とは，前提 A に相当する具体的事実を無限に多く集めたとき，この命題の真なる場合の数と全体の場合の数との比の極限値をいう.

コルモゴロフによる「確率」の定義（1933）
要素ωの集合をΩとし，Ωの部分集合を要素とする集合族を$\mathcal{F}$ とする. ωを根元事象といい，Ωを標本空間，$\mathcal{F}$の要素を確率事象という. Ⅰ. $\mathcal{F}$は集合体である. Ⅱ. $\mathcal{F}$の各集合 A に，非負の実数 P(A)が定められている. この数 P(A)を事象 A の確率という. Ⅲ.P(Ω)＝1. Ⅳ.A と B が共通な要素を持たないとき P(A+B)=P(A)+P(B). Ⅴ. $\mathcal{F}$の事象の減少列 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ について $\cap_n A_n = \emptyset$ ならば $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$がなりたつ. 公理Ⅰ-Ⅴを満たす3つの組(Ω,$\mathcal{F}$,P)を確率空間という.

確率の定義については古典論に留まっていた亀田ではあるが，自身は確率の基礎について，その当時の様々な学説をかなり広く学んでいたことが本書の前書きから伺われる．少し長いがその全文を引用しておこう．コルモゴロフによる現代確率論が確立される前の混沌とした状態が垣間見えて興味深い．

著者が確率論の研究に志してから約二十年になるが，其間に最も心を苦しめた問題は確率論を如何なる基礎で立てるかであった．普通の教科書にある様な equally likely な場合の比を以て確率を定義する立て方は応用の範囲が狭い，強いて之を広げれば種々の矛盾撞着を生ずる．又 Bohlmann,Broggi 流の公理主義及び Keynes の記号論理的の立て方は前者より優って居るが，尚種々の難点がある．其の他心理主義，論理主義等幾多の説をも検討したが，何れも満足するに至らなかった. 本書は経験的確率を基本として von Kries の Spielraum 説を加味して立論したものである. 経験的確率に基づく立て方は決して新しいものではない．Venn(Logic of Chance 1843)の如きも古くから此の説を立てているが，併し数学的でない為か永く顧みられなかった様である．然るに近年に至り此の説は欧州諸国に種々の改良を加えて復活しつつある，例えば Coolidge(An Introduction to Mathematical Probability,1925) Mises(Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechmung, Math, Zeitschrift, 1919)等之れに属する，尤も経験的確率に基づく説も著者に依り細目は夫々異なって居る．本書の如きも之等の著者とは独立に論述したから何れにも一致して居らない. 本書には成るべく新しい知識を集めることに努めたが，紙数と程度とに制限されて不充分を免れなかった．殊に応用の方面は甚だ簡略となった部分が少なくない，此の点は読者の諒察を乞う所である.

この前書きでは，公理主義，論理主義，心理主義，経験的確率といった用語が目につくが，「確率とは何か」に対する見解を問う「確率の哲学」としての立場で立論すると永遠に答えのない問題について論じることになりかねない．ここでは，この当時の確率に対する代表的な考え方を示すに留める．

古典主義	ラプラス式確率	確率とは，すべての可能な場合の数に対する好都合な場合の数の比である.
公理主義	数学的確率	数学の基礎を公理によって構築しようと考えたヒルベルトの思想に基づいて構築された確率を指す.

		亀田は，その当時の具体例としてボールマン(Bohlmann),ブロッジ(Broggi)を挙げているが，現在では，コルモゴロフの公理に収れん[9]している．
客観主義	経験的確率 (頻度確率)	統計データから確率を導きだす．注目している出来事がどのようにその現象のなかでおこっているかをデータとして引き出して，その出来事の頻度が占める割合を算出し，それを確率とする． ヴェン(Venn)，フォン・ミーゼス(von Mises)，クーリッジ(Coolidge)
主観主義	個人確率[10]	ある特定の個人が特定の具体的な命題について持つ信頼度の尺度である．この場合の「個人」とはある意味で「合理的」であると想定されるが，二人の合理的な人が同じ証拠にもとづいて同じ命題に対して抱く信頼度が同じであるとは限らない． フォン・クリース(von Kries)の遊隙説
	心理確率[11]	確信度の数量的表現としての確率
	主観確率	ベイズ主義（用語としての「ベイズ主義」は 1950 年代になって発案される） ベイズ推定とは主観確率を更新する理論である．（ラムゼー（1931））
論理主義 (必然論)	論理的確率	確率とは，一連の命題が論理的必然性により，個人的な意見とは独立に特定の命題の正しさを保証する程度である．論理の拡張と見なされる． ケインズ(Keynes)

【ラプラス式確率】

上記の表で，「ラプラス式確率」と書いたのは，亀田が「普通の教科書にある様な equally likely な場合の比を以て確率を定義する立て方」と書いているものを明示したかったからであり，この定義は有名なラプラスの著書『確率の哲学的試論』からの引用したものである．しかしながら，古典的確率論を確立したラプラスの確率に対する思想は，そのような簡単な定義付けで尽くされるようなものではなかった．むしろ，以下に示すように，その後の様々な確率の定義の始祖と言った方が実相に近いと思われる．

ラプラスはいわゆる「ラプラスの魔」に象徴される決定論的世界観の持ち主であり，科学の進歩により人間は啓蒙されてラプラスの魔のような完璧な知性に近づくと信じる啓蒙主義者でもあった．このラプラスにとっての「確率」とは，決定論的に動いている世界を完全には把握できていない人間の無知の程度に関わる概念であった．

ラプラスは，確率が従う 7 つの原理を明示していて，「ラプラス式確率」はその第 1 原理である．ラプラスの提示した原理は，現在の確率の公理からは程遠く，例えば第 6 原理（ベイズの定理）は他の原理から演繹される．しかし，その定式化は公理主義を胚胎するものであった．また，彼の第 1 原理にある「場合の数」の計算には，暗黙の裡に無差別原理が入り込んでいて，論理的確率の要素もあり，「人間の無知の程度に関わる概念」として捉えているところは主観主義への親和性が感じられる．一方で，統計データから大数の法則や中心極限定理を駆使して確率計算を行っており，経験的確率の信奉者でもあった．更に，ベイズとは独立にベイズの定理を発見し，当初は，現在のベイズ統計にあるような事前確率を想定していたくらいであるから，ベイズ主義の始祖の一人でもあったことに留意しておく必要がある．

【数学的確率】

現代の純粋数学は公理から構築される．その考え方は亀田の時代には既にヒルベルトによって強く提唱されており，確率論もその射程に含まれていた．ここで言う数学的確率論とは応用数学としてではな

---

[9] 細かいことを言えば，後にサヴェージの個人確率のようなものが現れるし，コルモゴロフ自身も晩年にランダムネスを主軸とする確率論の再構築を試みたが，それについてはここでは触れない．

[10] この用語は，サヴェージによるもので亀田の時代にはなかったが，内容的にはラプラスによる合理的判断基準としての確率に近く，心理確率との差異を明確にするため敢えてここで使用した．

[11] 亀田の言う「心理主義」とはどのような考えを指していたのであろうか．時代的に考えて，エッジワースが『数理心理学』において目指した「効用の測定」,「確信の度合計算」のようなものを想定していた可能性はある．

く，純粋数学として現実世界との関連付けを，形式上，抜きにした公理によってのみ統制される確率論を意味する．以下，亀田がその例として挙げたボールマンとブロッジによる確率の公理を簡単に説明する．

（ボールマンによる確率の公理化）

1900 年 8 月 8 日，パリで開催された第 2 回国際数学者会議においてヒルベルトは有名な「数学の諸問題」についての講演を行った．その 6 番目「物理学の公理の数学的取り扱い」に拠れば，「確率論の公理化問題」を初めて扱ったのはゲッチンゲン大学の私講師であったゲオルグ・ボールマン(1869-1928)であった．ヒルベルトの講演のあった同じ 1900 年の春に開催された第 3 回国際アクチュアリー会議においてボールマンはこの問題について次のような公理化を語っている．

定義 1：　ある事象Eが起こる確率は，Eに関連する適当な正値有理数 $p(E)$である．
定義 2：2 つの事象E_1とE_2は，両方が発生する確率が 0 である場合，非互換的であるという．
公理 1：事象E が起こることが確実である場合，$p(E) = 1$であり，事象E が起こることが不可能である場合，$p(E) = 0$である．
公理 2：2 つの事象 E_1 と E_2 が非互換的である場合，E_1またはE_2 が発生する事象 E の確率は $p(E_1) + p(E_2)$ である．
公理 3：E_2が発生する確率が p_2' である場合，E_1が発生することがわかっている場合，E_1と E_2が発生する事象 E^*の確率は $p(E^*) = p(E_1)\,p_2'$
定義 3：E_1と E_2 は次の場合に独立していると呼ばれる．
$p(E^*) = p(E_1)p(E_2)$.

コルモゴロフの定義を知る現代の目から見れば，集合概念を使用していないため，事象の定義がユークリッド式の未定義用語となっている[12]ことや，確率が正値有理数になっていることにラプラス式確率の不必要な残滓が感じられる．また，p_2'は未定義であるので公理 3 は実際にはp_2'の定義であって公理ではない．

しかしながら，このような欠陥があるとしても，史上初めて確率が事象の函数として定義づけられたことの意義は大きい．実際，確率論にさしたる興味を持っていなかったヒルベルトがこのボールマンの仕事を見て，前述の２３個の問題の第 6 番目「物理学の公理の数学的取り扱い」のなかに確率論の公理化をわざわざ付言したのである．ただ，ボールマン自身は自分の仕事にそれほどの価値を感じていなかったようで，「確率計算の基本的な性質のいくつかを公理の名前で呼ぶ以上のことはしていない」と書いている．

（ブロッジによる確率の公理化）

一方，ヒルベルトはこの主題に対するより完全な取扱に関心を持ち続けた．ウーゴ・ブロッジ（1880-1965）は，1907 年，ヒルベルトの指導の下で博士論文「確率計算の公理」を完成させた．ブロッジは，事象を記述するために集合論を使用し，σ-加法性も導入した．しかし，「σ-加法性は加法性にから導かれる.」という誤った主張をしてしまい，16 年後の 1923 年に，スタインハウスからそのことを指摘されることになる．ブロッジはルベーグ測度を利用し，興味の対象を可測集合に限定したが，これらの概念を公理体系に含めることまではしなかった．彼の主な関心は，一連の公理の独立性，完全性，一貫性に関する考察であった．

【経験的確率】

公理主義に基づく数学的確率は，その範囲内にいる限り，整合的であり，大数の法則や中心極限定理も精緻に証明することが出来る[13]．しかし，その理論構成は，コルモゴロフの公理を見れば分かるように，事象に対する確率が与えられているところから始まっているのであって，具体的に事象に対する確

[12] ボールマンが影響を受けたであろうヒルベルトのゲッチンゲン大学における 1898-1899 の冬学期の講義「ユークリッド幾何原論」では，点や線，面の「集まり」を最初に明示している．
[13] 亀田が『確率論及ビ其ノ應用』を執筆していた当時は，未だ，公理から大数の法則が導出されていなかった．これは翌年，コルモゴロフにより達成される．

率を測定することついては言及していない．

一方，亀田の定義の仕方は，大量の統計値から確率を測定することが想定されており，これは，亀田の序文にあるように，確率を観測者側ではなく，観測される対象世界に存在すると考える客観主義に基づく経験的確率，あるいは頻度的確率として捉えていたことを意味する．

ここで，亀田が「経験的確率に基づく」ものとして挙げていたヴェン，クーリッジ，フォン・ミーゼスの説についても簡単に触れておこう．

（ヴェンによる偶然の論理説）

ラプラス式確率が実際に計算できるのはサイコロやコイン，トランプのような対称性を内在していて「等しく可能性が高い（equally likely)」場合が明確なものに限定される．一方で，我国の 30 歳の男性が 1 年以内に死亡する確率は，統計データがなければ計算できない．このような統計から求まる頻度も確率論の対象としたいと考えるのは自然な流れであろう．

ジョン・ベンは『偶然の論理』（1866)において，事象の確率を，無限試行系列における相対頻度の極限値と定義した．もう少し彼自身の言葉に寄り添った表現をするなら，確率の基本的概念は系列であり，この系列は，いくつかの目立った特徴もしくは属性を共有する観測事象からなっている．観測事象の系列を分析すると偶発的属性が，場合の数のすべてに対してある一定の比率で存在する傾向がみられ，しかも，より多くの事象の観測を継続していくと，その比率は次第に一様になっていくことが経験的に知られているとした．

ベンは，「等しく可能性が高い」という表現の意味を問われた時，観測者の心の状態に求める回答と観察される物事の特徴に帰する回答が考えられるのであるが，もし前者を選ぶなら，確率は心理学の一部となり，物事に関する推論の科学とすることをやめることになると言う．後者を選ぶなら，想定される物事の特徴に求めることになる．つまり，その出来事は長い目で見れば本当に同じ頻度で起こるということである．この主張の根拠はおそらく過去の経験にあり，われわれの信念という概念を完全に排除するように答えを組み立てることは，間違いなく不可能だろう．しかし，以前のように信念の量に平等性を求めるのと，ここでのように出来事の発生頻度に平等性を求めるのとでは，やはり大きな違いがあるとした．

（クーリッジの経験仮説）

ラプラス式確率の定義は，「等しく可能性が高い」の意味が曖昧であるし，場合の数が無限にあると適用できないことからそのままでは採択できない．そこで，あらゆる形式の確率を 1 つの定義の下に含めたいという願望から，クーリッジはこれから説明する形式に導かれるとした．

[第 1 経験仮説]

2 つの異なる方法で起こり得る事象が本質的に同じ条件の下で非常に多くの回数繰り返されると，試行の総回数に対する，一方の方法で起こる回数の割合は，総試行回数が無限に増加するにつれて，一定の極限に近づく．

[定義]

第 1 経験仮説で説明された極限は，それらの条件下で事象が第 1 の方法で発生する確率と呼ばれるものとする．

※この定義の問題点は「本質的に同じ条件」とは何かが曖昧であることと，かなりの長い期間に亘って繰り返し試行が為されなければこの定義は適用できず，十分長い期間に亘って繰り返し試行が為され場合でさえも定義された確率は近似でしかないことである．

[第 2 経験仮説]

ある事象がある特定の数の方法において発生し，そのすべてが同じ確率で発生し，そのうちの特定の数が好ましいと判断される場合，総数に対する好ましい方法の数の比率は，その事象が好ましく起こる確率に等しくなる．

※歪みのないサイコロで 1 の目が出る確率は，定義によれば何度も試行しなれば測定出来ないことになるが，このような対称性のある場合は 1/6 と考えることも認めている．

[第 3 経験仮説]

ある 1 つの事象が n 個の独立変数 $X_1, X_2, \cdots X_n$ に依存し，これらn個の変数がn 次元連続多様体に連続

的に埋め込まれていているとき，１つの解析函数$F(X_1, X_2, \cdots X_n)$が存在して，無限小領域

$$X_1 \pm \frac{1}{2}dX_1, X_2 \pm \frac{1}{2}dX_2, \cdots X_n \pm \frac{1}{2}dX_n$$

に１組の値（$X_1, X_2, \cdots X_n$）が対応する確率は，

$$F(X_1, X_2, \cdots X_n)dX_1\, dX_2 \cdots dX_n$$

から高位の無限小だけの差違となる．

（フォン・ミーゼスの集団（Kollective）説）

頻度的確率を定義するためには「ランダムな無限列」を適切に定義しなければならい．この「ランダムな無限列」を二つの公理によって数学的に取り込もうとしたのがフォン・ミーゼスのコレクティヴの考えである．

コレクティヴとは次の二つの条件を満たす集団現象あるいは観察結果の無限列である．

（１）〔収束の公理〕コレクティヴの要素の性質の相対頻度は一定の極限値に収束する．

（２）〔偶然性の公理〕これらの一定の極限値は如何なる箇所選択（place selection）によっても影響を受けない．即ち，事前に定められた規則に従って選択された部分列において相対頻度を計算しても，それは，もとの系列におけるのと同一の極限値に収束する．

確率とは与えられたコレクティヴに対する相対頻度の極限値である．

この定義の志向性は，自然科学への確率論や統計学の応用の有効性を担保しようとしているところにあり，コルモゴロフも『確率論の基礎概念』の「§２現実世界との関連付け」でフォン・ミーゼスの著作を大いに参考にしたと書いている．しかし，亀田もコルモゴロフもそれぞれの自著執筆当時（1932, 33）には気づいていないが，1939 年に J. ヴィレ(Ville)の学位論文『コレクティヴ概念に対する批判的研究[14]』によってコレクティヴであってもヒンチンの重複対数の法則（1924）を満たさない無限列が示され，コレクティヴは「ランダムな無限列」の定義としては不十分であると見なされるようになる．

【主観的確率】

一般的な社会通念として広く浸透している確率に対する考え方としては，確率は観測者側ではなく，観測される対象世界に存在するとされる． 偏りのないサイコロを何度も投げたとき１の目の出る頻度は 1/6 に近づいていくことは，観測者側とは無関係に存在する現象であるし，気圧のような客観的物理量がその気体を構成する分子の平均速度から求まることや，量子力学が電子や光子のような素粒子の観測確率を正確に予言することなども，客観的存在としての確率を裏付けるものと考えられるであろう．

しかしながら，確率の最初の定義は，ヤコブ・ベルヌーイによる，「確率とは将来の出来事に対する私たちの期待の強さの尺度」であって確率を客観的な存在としては捉えていなかったことが分かる．同様に，ラプラスの「人間の無知の程度に関わる概念」として確率の意味付けも確率が観測者側に存在することを明言している．このような主観的存在としての確率を「主観的確率」と言う．亀田が自説に加味したとして引用するフォン・クリースの遊隙説は主観的確率の一種である．ここで，簡単に説明を与えておく．

（フォン・クリースの遊隙説）

フォン・クリースもラプラス同様の決定論者であったので，特定の事象が生起するかしないかに関する確率は，主観的なもので，それを語る者が世界について何らかの知識を欠いているということに基づくものであるとした．更に，決定論のより具体的な様相を，物理学を例にとって考察し，微分方程式が法則論的決定を表し，積分定数が存在論的決定を表すとすることで，この両方が定まることで存在が決定されるとした．

[14] 本論 “Etude critique de la notion de collectif” は Martingale が，概念としてではなく用語としてではあるが，確率論の論文で初めて現れた記念すべき論文としても有名である．

ここでクリースは，客観的可能性という概念を導入し，存在論的決定に関する粗い記述と，法則論的決定に関する知識または想定の組み合わせに基づくものとして理解されるとした．つまり積分定数たる初期条件，すなわち存在論的決定が粗いものしかないならば微分方程式の定める法則論的決定を適用させても将来の予想は不定性が生じることになる．

クリースは，上に述べたような，複数の結果が生じる余地（あそび）のことを遊隙と呼んだ．この概念を用いていえば，或る事象が客観的に可能であるというのは，その事象の先行状況が含んでいるあそびの中に，当該の事象の生起が含まれているということである．そして，クリースは，客観的可能性の大小を，あそびの概念によって特徴づけている．例えば，或る状況記述によって生じるあそびの中に，特定の出来事の生起が含まれているとしよう．このとき，その出来事の生起と非生起のあそび全体に占める割合が，それぞれ半分ずつであるならば，その出来事が生起する客観的可能性は 1/2 である，ということになる．このように，或る出来事の生起の客観的可能性は，その出来事の生起が，先行状況が含むあそび全体のうちに占める割合によって，大小比較したり，数値化したりすることができるのである．

フォン・クリースは，ラプラスの「equally likely な場合」に分ける段階で主観が入り込んでいるかもしれないことを「フォン・クリースの逆説」を提示することで示したことでも有名である．亀田は特に引用していないが，遊隙理論を自説に取り入れているくらいなので，おそらくこの逆説も知っていた可能性が高い．

（ベイズ統計における事前確率）

現在では，主観確率を論ずるに際し，ベイズ主義を避けて通ることは出来ない．しかし，用語としての「ベイズ主義」は 1950 年代になって発案されるものであるから，亀田の主著『確率論及ビ其ノ應用』でベイズ主義について触れられていないのは当然である．一方で，事前確率と事後確率の考え方はトーマス・ベイズやラプラスが 18 世紀に導入しており，現代のベイズ主義に直接つながる確率の主観的解釈もラムゼーが既に 1931 年に提唱しているので，亀田がそれらを知っていてもおかしくはない．亀田は，主著のなかで「第十三章　べいずノ定理　原因ノ確率」と一章を割いて解説している．「確率ハ何ヲ同種トシテ計算スルカニ依リ値ヲ異ニスルモノデアル．原因ノ確率ニ於テモ事象ガ既ニ起ツタ後ニ之ヲ起シタ原因ガ甲原因デアル確率ト，事象の生起ガ未ダ決定セラレヌ前ニ甲原因ガ発生スル確率トハ一般ニ値ガ違フ．此等両者ヲ夫々原因ノ事後確率及事前確率ト云フ．」亀田は本章で具体的な確率や統計の問題に対して事前確率と事後確率を計算している．既に，1925 年にフィッシャーが『研究者のための統計的方法』で「観測上の根拠が前もって存在するような場合を除くと，逆確率の方法では，既知の標本が取り出された母集団に関する推論を，確率論的に表現することはできないのである．」と言う強いメッセージを出していたこともあり，亀田も「べいずノ定理ハ応用ノ甚ダ広イ定理デアルガ，同時ニ議論ノ多イモノデアル．此定理ノ応用上屡々困難ヲ感ズルは原因 C_i ノ事前確率 P_i ガ知リ得ナイ場合デアル．之レニ或ル仮定ヲ置ケバ計算ハ出来ルガ必ズシモ事実ト一致スルトハ言ヘヌ．従来此定理ノ応用上時トシテ矛盾ガ現ハレ，其ノ価値ヲ疑ハシムルニ至ツタノハ P_i ノ知レヌ場合ニ置イタ仮定ガ正シクナイ為ト思ハレル」と，事前確率の危うさについて注意喚起をしている．

【論理的確率】

事象の生起確率を測定する際，「等しく可能性が高い」という特性が観測される側にあると考えるならば客観主義となるだろうし，測定する側の信頼度に拠ると考えるならば主観主義となるであろう．確率の出所には立ち入らず，確率を所与のものとして扱うなら公理主義となる．それに対し，確率を前提と結論の間の純粋な論理関係のなかに位置づけ，客観現象とも主観的判断とも関係ないとするのが論理的確率である．

（ケインズの確率論）

ケインズは若き日の大著『確率論』の序文において確率を論理学の一部門と考えたライプニッツを引き合いに出し，第 1 章の冒頭で「確率論は，推論によって獲得された知識の部分を扱い，そして推論によって獲得された諸結果が決定的であるかもしくは決定的でないか，それらの異なった度合の問題を扱う．」と言明し，「事象の生起と確率を論ずるよりも，命題の真理と確率を論ずる方が，(…) さらに多くの改善をもたらすであろう．」と主張している．

ケインズは頻度論に対して，主にジョン・ベンの『偶然の論理』を例示しながら，頻度論が適用出来るような場合は限られていて，大抵の場合は無差別原理からでも得られる．確率の主要な定理である「加法定理」，「乗法定理」，「逆確率の定理」が頻度論において得られた確率では特殊な場合にのみ成立するのであって，一般には成り立たない，と言った批判を述べている．

また，主観論との違いについては，次のように説明する．

「確実なおよび確からしさという用語は，ある命題について，異なった量の知識がその命題に対してわれわれがもつことを正当と認める合理的信念のさまざまな度合を表している．(…) したがって，この限りで，確率を主観的と呼ぶことができる．しかし，論理学にとって重要な意味において，確率は主観的ではない．つまり，確率は人間の気まぐれに左右されるものではないからである．命題は，われわれがそれを確からしいと考えるから確からしいのではない．われわれの知識を限定する諸事実がひとたび与えられたならば，それらの状況において確からしいことを，あるいは確からしくないことは，客観的に決まってしまい，したがってわれわれの考えとは独立である．それゆえに，確率論は論理的である．なぜならば，確率論は，与えられた状況において合理的にもつことができる信念の度合を扱い，合理的であろうとなかろうと単に特殊な個人の実際の信念を扱っているのではないからである．」

ケインズの論理的確率の特徴としては，確率が必ずしも数値として定まらないことが挙げられよう．このことはケインズの畏友ラムゼイから厳しく批判されている．時代的には，亀田が知っていてもおかしくはないが，ラムゼイの名前は特に引用されていない．一方で，論理的確率はカルナップに受け継がれる[15]が，こちらは亀田の知らない戦後の話である．

3　亀田の学位論文

學位記

東京府平民
正七位　亀田豐治朗

右論文ヲ提出シテ學位ヲ請求シ東京帝國大學理科大學教授會ニ於テ其大學院ニ入リ定規ノ試驗ヲ經タル者ト同等以上ノ學力アリト認メタリ仍テ明治三十一年勅令第三百四十四號學位令第二條ニ依リ茲ニ理學博士ノ學位ヲ授ク

論文審査ノ要旨

母函數ノ理論及其ノ確率論上ノ應用

本論文ハ緒論ト本論三章トヨリ成リ、第一章ニ於テハ母函數（ジェネレイチレグフヮンクション）ノ理論、第二章ニ於テハヘルミットノ展開ノ理論、第三章ニ於テハ確率論（プロバビリチイ）ニ於ケル母函數ノ應用ヲ論セリ而シテ各章ニ於ケル論述ノ要旨ハ次ノ如シ

第一章第一節ニ於テハ從來知ラレ居レル母函數ノ意義ヲ多少擴張シタル後嚴密ナル理論ニ據リテ其ノ諸性質ヲ演繹シ、第二節ニ於テハ母函數ヲ知リテ其ノ原函數ヲ求ムルノ方法即チ母函數ノ還原（インヴォルジョン）ヲ示シ第三節ニ於テハ二ツノ函數ノ母函數ノ組合セニ關スル定理ヲ證明シ第四節ニ入リテハ前節ノ結果ヲ用ヰテ所謂第二種ノ母函數ヲ第一種即チ第一節ニ論シタル母函數ニ變スル方法ヲ論述セリ

第二章此章ノ目的トスルトコロハヘルミットノ展開ヲ精論セントスルニアリ此展開ハ其ノ證明ノ根底ニ尚ホ未タ充分ニ嚴密ナラサルノ憾アルカ爲ニ從來確率論ニ用ヰラレタルコトアリ近時其ノ缺陷ヲ補正セントスルノ氣運ニ際會シ著者ハ本論文ニ於テ從來ノ證明ノ方針ヲ踏襲シ母函數ノ理論ヲ基礎トシテ新タニ其ノ嚴密ナル證明ヲ試ミタリ且又此展開ヲ用ヒテ母函數ノ還原ニ係ハル新タナル式ヲ誘導セリ

第三章此章ハ本論文ノ最終ノ目的トスルトコロヲ論述セルモノニシテ前二章ノ結果ヲ確率論中ノ所謂ポアソンノ問題ニ應用セリ此問題タルヤ大數ノ法則誤差ノ理論等幾多重要ナル諸定理ヲ抱含スルモノナレトモ之ニ關スル從來ノ研究ハ未タ以テ充分ナリトイフコトヲ得ス著者ハヘルミットノ展開ヲ利用シテ廣汎ナル解釋ノ下ニ於ケル此問題ノ解法ヲ案出スルコトヲ得タリ

以上述フルカ如ク要スルニ著者ハ近世解析法ノ要求スル嚴密ナル方法ヲ以テ母函數ノ性質及ヒヘルミットノ展開ヲ論シ之ヲ應用シテ廣汎ナル意義ノ下ニ於ケルポアソンノ問題ヲ解決スルコトヲ得タルモノニシテ勵精努力ノ效果見ルヘキモノアルノミナラス確率論上有益ナル貢獻ヲナセルモノナリ是ニヨリテ提出者龜田豐治朗ハ大學院ニ入リ定規ノ試驗ヲ經タル者ト同等以上ノ學力アリテ理學博士ノ學位ヲ受クルノ資格アルモノト認ム

亀田の学位論文**「母函数ノ理論及其ノ確率論上ノ應用」**は，1918（大正 7）年の東京帝國大學理科大學紀要において発表され，これに対し同年 12 月 23 日に学位が授与されたことは既に第 1 節で述べた通りである．本論文については上に掲示した 1919（大正８）年１月 30 日発行の官報第 1946 号に「論文審査の要旨」が報告されている．

実は，筆者は亀田の学位論文そのものは未見である．東京大学附属図書館 数理科学研究科図書室に問い合わせた（質問 ID: 00034777）のだが，この論文の所在を確認することは出来なかった．ひょっとしたら，震災で焼失してしまったのかもしれない．しかし，1915（大正 4）年 7 月 3 日に東京數學物理學會記事において二つに分けて発表された論文“Theorie der erzeugenden Funktion und ihre Anwendung

[15] “The Logical Foundations of Probability(確率の論理的基礎)”（1950）

auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung”（母函数の理論とその確率計算への応用）は亀田の学位論文の元となった論文であり，1925（大正 14）年には本論文の増補改訂版として“Theory of Generating Functions and Its Application to the Theory of Probability,”が東京帝國大學理學部紀要に発表されている．

以下にこの二つの論文の目次を併記しておく．1915 年版は２部構成で，第 1 部では第 1 節～第 6 節，第２部では第７節が記載されており，1925 年版は全３章の 3 部構成であったことが分かる．

【ドイツ語版と英語版の論文の目次の比較】

1925 年の学位論文の増補改訂論文（英語）	1915 年の学位論文の元の論文（ドイツ語）
緒論	緒論
第１章　母函数理論	第１部　母函数理論
第１節　第１種母函数	第１節　母函数の収束と基本特性
第２節　母函数の収束とその解析的特性	第２節　フーリエの定理の応用
第３節　合成積定理	第３節　合成積定理
第４節　母函数の反転	第４節　分数回繰返し積分
第５節　乗法定理	第５節　エルミート展開の理論の新しい正当化
第６節　第２種母函数	第６節　第２種母函数とディリクレ級数
第２章　エルミート展開の理論	第２部　確率論への応用
第３章　確率論への応用	第７節　ポアソン問題の解決
第１節　確率の一般定理	
第２節　ベルヌーイの定理とポアソンの定理	
第３節　一般ポアソン問題の解	
附録	

両者の目次を見比べると内容的にはかなり重なっているが，その構成は弱冠ちがっていることが見て取れよう．一方，学位論文の方は「本論文は緒論と本論三章とより成り，第１章に於ては母函数の理論，第２章に於てはヘルミットの展開の理論，第３章に於ては確率論に於ける母函数の応用を論ぜり…」とあるように全３章であったことが官報「要旨」に明記されていて，1925 年版に近かったことが分かる．しかし，更に詳しく官報における各章の記載内容を見ると各節の内容まで一致していたわけではないことが確認される．

以上から，亀田は既に発表済のドイツ語の論文から，おそらく日本語で，全３章の論文にまとめ上げて学位論文として提出したものと考えられる．英語版では，その後新たに知り得た他の論文からの知見も反映させ，構成を練り直し，証明を整理することでより読み易くしたのであろう．従って，その位置づけは，英語版の論文の緒論で本人も書いているように，「完全に拙論『母函数理論とその確率論への応用』の改訂であり拡張された解説」である．

いずれにせよ，学位論文の内容はこの二つの論文から凡そ推察することができる．

【1925 年版論文の解説】

以下の個別解説は，主に 1925 年の英語版の論文を目次の順に従って解説し，必要に応じて 1915 年のドイツ語版や 1932 年の著書『確率論及其ノ應用』を参照するものとする．

緒論

亀田は，本論文が 1915 年のドイツ語版の論文の改訂増補版であることを明示したあと，「本論では，第１章において母函数の理論を扱い，第２章ではその応用としてエルミート展開が収束するための十分条件について議論する．そして第３章では，前 2 章の結果を確率論に応用することで**ポアソンの問題**とベルヌーイの定理およびポアソンの定理の新証明を与える．」と全体の構成を与えている．

亀田が，本論で扱っている中心的なテーマであるポアソンの問題とは次のようなものである．

ポアソン問題[16]．数量 A[17]は，a と b の間にあるすべての値を取り得るものとする．同じ試行で，これらの値を取り得る確率は互いに異なり，さらに，各試行ごとに異なるものとする．n回試行した後，次の値を決定せよ．

1）A の値の合計が所与の値 s に等しい確率

2）この合計が 2 つの指定された制限の間に含まれる確率

亀田の 1915 年版では，この問題文は 1879 年のマイヤーの著書（ドイツ語）からそのまま引き写されており，1925 年版でも精確に英語に翻訳されている．実は，本書の著者アントワーヌ・マイヤー（1801-1857）はルクセンブルグ人で，ベルギーのフランス人コミュニティに属すリエージュ大学の数学教授であり，本書はオーストリアの数学者エマニュエル・チューバー（1851-1925)による翻訳であった．フランス語の原書は 1849 年から病没する 1857 年までのマイヤーによる講義録を夫人から譲り受けた弟子たちが 1874 年に出版した” COURS DE CALCUL DES PROBABILITÉS(確率計算講座)”であった．本書においてポアソンの問題は次のように定められている．

Problème de Poisson

56 Une chose A est susceptible de toutes les valeurs possibles entre a et b les probabilités de ces valeurs sont différentes entre elles pour la même épreuve et different de plus d une valeur à la suivante après p épreuves chercher 1 la probabilité P que la somme des valeurs de A sera une quantité donnée S 2o la pro babilité π que cette somme sera comprise entre deux limites.

A. MEYER ,CALCUL DES PROBABILITÉS p.106

この本質的に教育的なテキストの序文で，F・フォリアは次のように述べている．

マイヤーのこの著作は，ベルヌーイ，ド・モアブル，ラプラス，ポアソン，ガウス，エンケ，ビエネメなどによる確率計算に関する最も重要な著作の完全な要約あり，我々の考えるところでは，確率の解析理論を除けば，このテーマに関してこれほど広範な論考は他にないと，大胆に断言できるであろう．

従って，この問題の出典はかなり古く，現在ではこの問題がポアソンの問題と呼ばれることは殆どない[18]．しかも，1814 年にラプラスが『解析的確率論』で同様の問題を既に提出しており，そこでは「ポアソン問題」という名前は与えられていない．

亀田は，1915 版の緒言でこの問題の確率論における重要性の根拠を「確率計算における応用分野，たとえば，誤差論，リスク理論，気体分子運動論，数値計算，そしてまた賭博での確率計算における多くの問題が，この問題にまで遡ることが出来るからである．また，**ベルヌーイの定理**と**ポアソンの大数の法則**は同じ問題の特殊な場合の解決策とみなされている．」と説明する．そして，過去の多くの数学者，ラプラス，ポアソン，チェビシェフ，ベッセル，マルコフ，ハウスドフル，そしてエッジワース[19]たちの努力にもかかわらず，未だに完全な解決に至っていないと強調している．

そのような状況の下で，筆者はこの問題を解決しようと，母函数と任意関数のエルミート展開の助けを借りて，再び取り組んできた．ただし，このアイデアが，新しいものでないことには注意しておいて欲しい．チェビシェフ[20]は，1891 年にそのアイデアにすでに気づいていたが実行しなかった．また，ハウスドルフ[21]は同じ考えでガウスの誤差法則を証明しようとしたが，その解決方法が成立するための厳密な条件を与えることは出来なかった．（1915 年版）

亀田は，ポアソンの問題の難点は与えられた母函数から原始函数を求めるところ，いわゆる反転公式，

[16] A. Meyer, Vorlesung uber Wahrscheinlichkeits-Rechnung. 1879, p. 120.
[17] 現在ならば「確率変数 A」と読み替えた方が座りがよい．
[18] 『確率論史（1865)』（トドハンター）には「ポアソンの問題」の記載がある．
[19] このなかでベッセルとエッジワースは 1915 年版の論文では紹介されていない．おそらく英語版の論文を書くまでの 10 年間で知ったものと思われる．
[20] Acta Math. 14 (1891) p. 305-
[21] Leipziger Bericht 1901, p. 166-

にあると考えた．そこで本論第 1 章で母函数理論を展開し，フーリエの積分定理から第 1 反転公式を与え，第 2 章のエルミート展開論において第 2 反転公式を導出している．そしてこの二つの章の結果を利用することで第 3 章 においてポアソンの問題を解決しようとした．

ところで，亀田が引用するベルヌーイの定理およびポアソンの定理とはどのようなものであろうか．一世紀以上経った現在の我々の知る定理とでは，名前が同じでもその内容や表現に差違があることが考えられる．幸い，本論発表の 7 年後の 1932（昭和 7）年に出版された亀田の著書『確率論及其ノ應用』にこれらの定理が提示されている．ここでは，亀田のやや古風な表現と現在の標準的な内容を併記しておく．

<table>
<tr><th>亀田の著書・論文の表現</th><th>現代の表現</th></tr>
<tr><td>（ラプラスの定理）
生起の確率が p である事象に対し，互いに独立なるn回の試行を為したとき，事象の生起する回数が s 回乃至t回の範囲にある確率は，略近的に
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_s}^{\xi_t} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\frac{1+p-q}{2}\cdot e^{-\frac{\xi_t{}^2}{2}}+\frac{1-p+q}{2}\cdot e^{-\frac{\xi_s{}^2}{2}}\right)$$
に等しい．但し，$\sigma=\sqrt{npq}$，$\xi_s=\frac{s-np}{\sigma}$，$\xi_t=\frac{t-np}{\sigma}$ である．</td>
<td>（ラプラスの定理）
$X_1,X_2,\cdots$ は 1 を取る確率がpで 0 を取る確率が$q=1-p$である互いに独立な確率変数列とする．そのとき
$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$とし，$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$を任意の定数とするとき
$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\alpha<\frac{X-np}{\sqrt{npq}}<\beta\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（ベルヌーイの定理）
生起の確率が p である事象に対し，互いに独立なるn回の試行を為したとき，事象の生起する回数を r とすれば，事象の生起率 $\frac{r}{n}$ と確率 p との差の絶対値 $\left|\frac{r}{n}-p\right|$ が $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ の数倍を超ゆることは甚だ希である．詳言すればこの差の絶対値が$\gamma\sqrt{\frac{pq}{n}}$より大である確率は，$\gamma$が増加すれば急激に減少するところの積分
$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$$
で表される．</td>
<td>（大数の弱法則）
確率変数の列 $X_1,X_2,\cdot\cdot\cdot,X_k,\cdot\cdot\cdot$ は独立で，各 X_k が同じ 分布に従い，平均 $\mu=\mathrm{E}(X_k)$ が存在し，分散 $\sigma^2=\mathrm{V}(X_k)$ が有限とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して
$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|\leq\varepsilon\right\}=1$
が成り立つ．</td></tr>
<tr><td>ラプラスの定理と大数の弱法則を組み合わせると
$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|>\gamma\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$</td></tr>
<tr><td>（ポアソンの定理）
互いに独立なn回の試行を為すに，第 1 回の試行で事象の生起する確率が p_1，第 2 回の試行で事象の生起する確率はp_2，…第n回の試行で事象の生起する確率は p_n であるとする．
然るときは，これらn回の試行に於て，事象が生起する回数が s 回乃至t回（従って生起率が$\frac{s}{n}$乃至$\frac{t}{n}$）の範囲にある確率は，略近的に
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_s}^{\xi_t}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$$</td>
<td>（中心極限定理）
確率変数の列 $X_1,X_2,\cdot\cdot\cdot,X_k,\cdot\cdot\cdot$ を平均値 0，分散有限なる互いに独立な確率変数列とし，その分布函数はF_kとする．そのとき
リンデベルグの条件：任意の$\varepsilon>0$に対して
$$\frac{1}{V_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\varepsilon\sqrt{V_n}}^{\varepsilon\sqrt{V_n}}x^2\,dF_k(x)\to 1\quad(n\to\infty)$$
ただし，$V_n=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$
を満たすならば
$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{V_n}}$ の分布函数は正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$に収束す</td></tr>
</table>

に等しい．ただし，$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_iq_i}$，$\xi_s=\frac{s-\sum_{i=1}^{n}p_i}{\sigma}$，$\xi_t=\frac{t-\sum_{i=1}^{n}p_i}{\sigma}$ であってσは甚だ大であるものとする．	る．

1925 年版の緒言の最期は，本論での主要な概念である母函数とエルミート展開に関する次のような歴史的ノートで締め括られている．

> 第 1 種母函数はアーベルによって研究され，第 2 種母函数はラプラスによって研究された．後に，レルヒ，ランダウ，ピンシェル[22]は，母関数の収束，微分などに関し，母関数のいくつかの重要な性質の発見に成功した．
> エルミートは 1864 年に，任意の関数が級数展開できるかもしれないことを発見した．それ以来，この展開式はエルミート展開として知られるようになった．彼は，任意の関数がこのような形式の連続函数で展開できると仮定して，展開式の係数を計算したが，この仮定の妥当性については論じようとはしなかった．任意の函数をこの形式の級数で展開できる十分条件の発見は，その後多くの研究の対象となった．しかし，この問題が積分方程式の理論によって解決されたのはつい最近のことである[23]．本論では，母函数を利用することで同じ目的を達成した．

第 1 章　母函数理論

本章の第 1 節において，第 1 種母函数の定義が与えられ，第 1 章で導く母函数と原始函数の間の種々の関係式が一覧表として整理されている．また，積分方程式が第 1 種母函数を使うことで代数方程式に還元されることや第 2 章で論じられるエルミート展開にからめて無限級数に対する第 1 種母函数の取り扱いについても簡単に前ぶりを与えている．

第 2 節では母函数の複素平面上における収束域が 4 つの型に限定されることを示し，原始函数での微積分演算が母函数での代数演算に対応することが示されている．第 3 節では，いわゆる合成積定理で原始函数の合成積が母函数での積に対応することを証明し，第 4 節では有名なフーリエの積分定理を使って第 1 反転公式（母函数$F(\alpha)$から原始函数$f(x)$を求める方法）を導出している．第 5 節では合成積定理の双対定理である乗法定理が導かれている．これは原始函数の積が母函数の合成積に対応すると言う基本的な性質である．第 6 節ではこれまでの連続型の母函数に対して，離散型の母函数である第 2 種母函数を定義して，簡単な性質を証明している．

第 1 節　第 1 種母函数

【亀田の母函数の定義】

定義 1： $f(x)$ は実変数 x の函数とする，そのとき次の積分

$$J\big(f(x)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x}f(x)\,dx$$

は複素変数 α の函数と見なされ，$f(x)$の第 1 種母函数と呼ばれる．そして$f(x)$は原始関数と呼ばれる．母函数から原始函数を求めることを母函数の反転という．

定義 2（⇦第 6 節にて定義される）： $\bar{f}(x)$ は下記に示された一組の有限または無限の離散点の上で定義された函数とする．

$$\dots x_{-m}, x_{-m+1}, \dots x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_k, \dots,$$

ここでこの集合の点は有限値を極限に持つことはないとする．そのとき，下記の総和

$$\bar{J}(\bar{f})=\sum\bar{f}(x_k)e^{-\alpha x_k},\quad k=\dots-m,\dots,-1,0,1,\dots,k,\dots$$

は α の函数と見なされ，$\bar{f}(x)$ の第 2 種母函数と呼ぶことにする．

---

[22] イタリア語の発音だとピンケレ（拙注）

[23] Weyl, Math. Annalen. XVI p. 302-　Myller-Lebedeff, do. XIV p. 388

函数に対して定義される第1種母函数と数列に対して定義される第2種母函数の類似性，スティルチェス積分を使えば同時に表記できるのだが，を明示するために，ここでは敢えて併記した．
また，特性函数とこれに類似する積率母函数の現在の定義を参考までに述べると以下の通りである．

(Ω, F, P) を確率空間，X をその上で定義された確率変数，μ を X の分布とする．
このとき，確率変数 X の（または分布 μ の）特性関数 $\varphi_X(t)$（または $\varphi_\mu(t)$）を
$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) \quad \left(\varphi_\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,\mu(dx) \right)$$
によって定義する．同様に，積率母関数$\psi_X(s)$（または $\psi_\mu(t)$）は次式により定義される．
$$\psi_X(s) = E(e^{sX}) \quad \left(\psi_\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\,\mu(dx) \right)$$

これより亀田の generating function は現在の特性函数と積率母関数の定義における指数部分を加算し符号を変えたものになっていることが見て取れる．

$$J(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+it)x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$$

一方，fのフーリエ変換$\hat{f}$の定義は，慣習として，特性函数とは指数のなかの符号が違うから亀田の generating function とは同符合である．

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t)\,dt$$

亀田の原論文では定義1，定義2ともに母函数を意味する generating function が用語として使用されているが，定義を見る限り，現在の特性函数（characteristic function）の定義に近いので，亀田の論文を読む際はそのことを注意しておく必要がある．定義2において，亀田は脚注に“See Laplace. Théorie analytique des probabilités(1814).”と記しており，ラプラス自身が定義する母函数とは異なるにしても，この定義の由来がラプラスの著書にあることを示唆している．実際，ラプラスの著書の Ch. IV (pp. 329—333)を紐解けば，彼がこのようなタイプの函数を確率論のなかで考察していたことが伺われる．定義1は定義2の自然なアナロジーであり，これに対して「母函数」と名付けた理由も同様で，ラプラスに対するオマージュであろう．

論文の表題が示すように，この亀田流の母函数（特性函数に近い）の性質を詳しく研究し，その結果を確率論へ応用（ポアソンの問題の解決）することが本論の眼目である．亀田がドイツ語版の論文を発表した 1915（大正4）年当時，日本は言うに及ばず，世界に目を向けても，特性函数を本格的に研究するものはいなかった．現在の確率論史おいて特性函数を本格的に導入したのは P.レヴィであるとされているが，そのレヴィにしても具体的な特性函数の研究を始めたのは 1919 年であったことを留意しておく必要があろう．

1970 年に書かれたレヴィの回顧録によると，1919 年の冬の終わりにエコール・ポリテクニークで誤差論の基礎に関する3回にわたる講演をするよう依頼を受けたことから彼の本格的な確率論研究が始まる．当時レヴィは，誤差論についての Gauss の法則に対し，ポアンカレの考え方を踏襲していたが，ポアンカレが用いていた定義を変えて，e^{izX}の平均値を特性函数と呼んだ．この変更によって，実数の確率変数に対しては実軸上のすべての点で確実に定義される函数が得られるようになった．レヴィ自身は，1911 年か 1912 年にフーリエ級数からフーリエ積分を自力で探り当てたときに虚の指数を導入する利点を発見したと書いている．二つの独立な確率変数を加えることはそれらの確率密度の畳み込みの積をつくることになり，その演算はフーリエ変換によって単なる掛算に帰せられる．ところで確率密度をフーリエ変換したものがまさに特性函数なのであるから独立な確率変数の和は対応する特性函数の積に対応する．この特性函数の掛算の定理は既にラプラスやコーシーが知っていたのだが，1919 年当時のレヴィは，そのことを知らなかった．それ故，「その知識があれば解析の研究者はもっと早くに畳み込みの積が含まれているいくつかの積分方程式の積分に達することができたであろう．」と断言したのである．一方， 1925 年当時の亀田は積分方程式に畳み込みが極めて有効であることを知っていて，その事例についても簡単に触れていることに注意しておきたい．

レヴィは 1919 年のエコール・ポリテクニークの講義で，特性関数という概念を用いることで，ポア

ンカレの議論の欠陥を埋めて，彼の結果を完全にできることを紹介し，1922 年には，特性函数に関する二つの基本的な定理，現在レヴィの反転公式と言われるものと連続定理と言われるものを証明した．後にレヴィはこれらを駆使することで中心極限定理の証明を大幅に簡略化させた．

レヴィは 1922 年と 1923 年に科学アカデミーにこのテーマに関するいくつかのノートを提出した．その後の経緯を 1925 年出版の『確率計算』で次のように書き記している．

> この手法と私が新しいと思った結果のいくつかは，コーシーが 1853 年に科学アカデミーに提出したノートで開発されていたことを，このノートの最初のものについて書かれた G ポリヤからの手紙で知って，私は大変驚いた．コーシーの結果のすべてが公表されなかった可能性もある．科学アカデミーは，この著名な科学者が自分の発見を報告書に記入するのにいささか慎重さに欠けていると考えた．しかしながら，これほど多くの研究対象になっている問題に関して，当時最も偉大な数学者が書いたいくつかの注釈が注目されなかったのは不思議なことである．ポアンカレは『確率の計算』の第 2 版で，コーシーの方法の原理を数行で示しているが，それがコーシーのものであることを知らなかったようで，その意義を十分には理解していなかったことはほぼ間違いない．

【原始函数と母函数の演算の対応定理一覧表】

下表において，$F(\alpha)$は$J(f)$ を表し，$G(\alpha)$は，$J(g)$を表し，h, c, c_0, c_1, w_0, w_1 は 任意の実数定数であり，pは正の実数定数である．

原始関数	母函数	参照
$xf(x)$	$-\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)$	定理Ⅴ
$\frac{d}{dx}f(x)$	$\alpha F(\alpha)$	定理Ⅶ
$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$	$\frac{1}{\alpha}F(\alpha)$	定理Ⅷ
$f(x+h)$ $e^{-hx}f(x)$	$e^{h\alpha}F(\alpha)$ $F(\alpha+h)$	定理Ⅸ
$f(cx), c>0$	$\frac{1}{c}F(\frac{\alpha}{c})$	定理Ⅹ
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)dt$	$F(\alpha)G(\alpha)$	定理Ⅺ
$\int_{x-c_1}^{x-c_0} g(t)\, dt$ $f(x)\frac{e^{w_0x}-e^{w_1x}}{x}$	$G(\alpha)\frac{e^{-c_0\alpha}-e^{-c_1\alpha}}{\alpha}$ $\int_{\alpha-w_0}^{\alpha-w_1} F(\beta)\, d\beta$	定理Ⅻ
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(i\beta)\, G(\overline{\alpha-\beta}i)d\beta$	定理ⅩⅣ
$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,(x-t)^{p-1}dt$	$\frac{1}{\alpha^p}F(\alpha)$	附録 定理 A

第２節　母函数の収束とその解析的特性

次の定理の証明は本質的にはランダウが$\int_1^\infty \psi(t)t^{-x}\, dt$　に対して行った類似の定理の証明による．

定理Ⅰ：母函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\alpha x}\, dx \tag{1}$$

が２点

$$\alpha_0 = a+bi \text{ と } \alpha_1 = c+fi, \text{ ただし }\ a<c\ ,$$

において収束するとき

$$a < \xi < c$$

を満たすすべての点 $\alpha = \xi + \eta i$ でも同様に収束する.

次の定理Ⅱは定理Ⅰから自然に導かれるが，一般の正則函数の存在領域が任意領域であったことと比較すると内容的に興味深い．亀田がこのような母函数の収束域に留意するのは，その定義から原始函数$f(x)$が可積分だからと言って$f(x)e^{-\alpha x}$が可積分であるとは限らないからであろう．一方，通常の特性函数はe^{itx}を掛けて積分するので，原始函数$f(x)$が可積分ならば$f(x)e^{itx}$が可積分であることは自明であり，ここにあるような収束域の確認をする必要がない．そしてそのことが特性函数の積率母函数に対する優位性でもあった.

定理Ⅱ： 複素数点αの函数として考えられる母函数の収束領域は，以下の 4 つの場合のいずれかに属する.

i）複素平面全体.
ii）境界線が虚軸に平行な半平面.
iii）2 本の線が虚軸に平行な帯.
iv）すべての点が虚軸に平行な線上にある点群.

亀田は，これらの収束域を持つ原始函数の例を挙げてはいないが，原始函数を特に確率密度函数で例示するなら，i)正規分布，ii)指数分布，iii)両側指数分布，iv)コーシー分布がある．また，境界上のすべての点で収束する場合や部分的に収束する例を作ることも難しくない.

第 4 節　母函数の反転

次の定理は母函数の**第 1 反転公式**（母函数$F(\alpha)$から原始函数$f(x)$を求める方法）である.

定理ⅩⅢ：$F(\alpha)$ が $f(x)$ の母函数であって，積分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ が存在し，$f(x)$ はすべての有限区間において有界変動である場合

$$\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big) = \frac{1}{2\pi}\lim_{K\to\infty}\int_{-K}^{K}F(i\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha.$$

が成立する.

この亀田の第 1 反転公式はレヴィの反転公式と同じ思想圏にある定理であると考えられる.

第 2 章　エルミート展開の理論

本章の目的とするところはエルミート展開について詳しく研究するにあり，これまでこの展開は収束条件が与えられないままに確率論に用いられていた．亀田は一つの簡便な十分条件を与え，その条件に基づいて母函数の基礎理論を構築した．しかも，この展開を用いて母函数の還元に関わる新たなる式（第 2 反転公式）を誘導している.

定義 3：次のような形の式をエルミート多項式という：

$$P_n(x,c) \;=\; e^{c^2x^2}\;\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-c^2x^2}\right)$$

ここで，cは正の定数であるとする.

既述のとおり，エルミートは 1864 年に任意な函数$f(x)$がエルミート展開で表現されると主張したが，$f(x)$から計算されえたエルミート展開がもとの$f(x)$に収束するための十分条件をエルミートは与えなかった．次の定理はエルミート展開が絶対かつ一様に収束するための十分条件である[24]．しかも，系においてエルミート展開の係数が$f(x)$の母函数$J(f)(\alpha)$に$e^{-\frac{\alpha^2}{4c^2}}$を掛けた函数の$\alpha$についてのべき級数展開の係

[24] 現在の立場で論じるならばエルミート函数系の完全性の問題に帰着すると思われる.

数に一致することを示している.

定理ⅩⅨ：$f(x)e^{c^2x^2}$ の4つの微分のうち少なくとも一つが全区間(-∞,+ ∞)に対して有界変動であるようなすべての連続函数 $f(x)$ のエルミート展開は， $f(x)$ に絶対かつ一様に収束する．すなわち,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{c}{\sqrt{\pi}}e^{-c^2x^2}\right)$$

系：$f(x)$が定理ⅩⅨの条件を満たすならばそのエルミート展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{c}{\sqrt{\pi}}e^{-c^2x^2}\right)$$

の係数A_nは次の級数の係数と同一である.

$$J(f)e^{-\frac{\alpha^2}{4c^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\alpha^n$$

次の定理ⅩⅩは，母函数の**第2反転公式**と呼ばれるもので，函数$f(x)$がこの定理の条件を満たしているならば，母函数$J(f)$に$e^{-\frac{\alpha^2}{4c^2}-ba}$を掛けた函数を$a$について冪級数に展開することで原始函数$f(x)$のエルミート展開が直接得られる．つまり母函数から原始函数が得られることになる.

定理ⅩⅩ：c と b は実定数であり，$f(x)e^{c^2(x+b)^2}$ の4つの微分のうち少なくとも一つが全区間(-∞,+ ∞)に対して有界変動となるすべての連続函数 $f(x)$ は，次のような形式でエルミート展開される.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{c}{\sqrt{\pi}}e^{-c^2(x+b)^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, c^{n+1}\left[\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\right]_{z=c(x+b)},$$

更に，上記の係数 A_n に対しては

$$J(f)e^{-\frac{\alpha^2}{4c^2}-ba} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\alpha^n.$$

が成立する.

第3章　確率論への応用

本章において，本論の最終目標であるポアソンの問題を前2章の結果を使って解決している.

第2節　ベルヌーイの定理とポアソンの定理

本説ではポアソンの問題に先立ち，次のような問題を考察している.

【問題】:
1つの試行で1つの事象が起こる確率をpとする．s回の試行の後，次の確率を求めよ.
(i) 調度ν回事象が起こる確率
(ii)事象がλとμ回起こる確率（λ，μ回を含む）

亀田は，それまでに証明した諸命題を駆使して次の定理を導出することでこの問題の解答を与えようとした.

定理ⅩⅩⅢ：s回の独立試行が行われ，それぞれの試行である事象が起こる確率は定数 p であるとする．そのときその事象がちょうどν回起こる確率は

$$f(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n c^{n+1}\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2spq+\frac{1}{3}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2} + \frac{1}{\left(2spq+\frac{1}{3}\right)^2}\frac{spq(p-q)}{6}\frac{d^3}{dz^3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}$$

$$+\frac{1}{\left(2spq+\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}}}\left(-\frac{1}{1440}+\frac{spq(1-6pq)}{120}\right)\frac{d^4}{dz^4}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}$$
$$+\frac{1}{\left(2spq+\frac{1}{3}\right)^{3}}\frac{spq(p-q)(1-12pq)}{120}\frac{d^5}{dz^5}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}+\cdots,$$
ここで
$$q=1-p, \qquad c=\frac{1}{\sqrt{2spq+\frac{1}{3}}}, z=(\nu-sp)c$$
とする.
更に，その事象が起こる回数が λ と μ の間 (両方を含む) にある確率は，下式で与えられる.
$$\Pi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda_1}^{\mu_1}e^{-z^2}dz+\left[\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\right]_{\lambda_1}^{\mu_1}+\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}A_n\ c^{n+1}\ \frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\right]_{z=\lambda_1}+$$
$$\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}A_n\ c^{n+1}\ \frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\right]_{z=\mu_1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda_1}^{\mu_1}e^{-z^2}dz+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\frac{A_n}{2}+A_n)c^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\right]_{z=\mu_1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\frac{A_n}{2}+A_n)c^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\right]_{z=\lambda_1}$$
ここで
$$\lambda_1=\frac{\lambda-sp}{\sqrt{2spq+\frac{1}{3}}}, \quad \mu_1=\frac{\mu-sp}{\sqrt{2spq+\frac{1}{3}}}$$
とする.

上記の定理はエッジワース展開[25](1904)と同じ思想圏にあると思われる．1915 年論文では先行研究にエッジワースの名前はなかったが，1925 年論文では載せている．おそらく，1915 年の時点において亀田はエッジワース展開について知らずに上記の命題を発見して論文に収載し，その後どこかの時点でエッジワースの業績を知ったのでポアソンの問題の先行研究者として明示することにしたのであろう．ただ，［Fischer p.261］で指摘されているように，亀田は独立な確率変数の和の分布の問題は，収束エルミート級数展開で表現できれば完全に解決すると考えており，これらの展開が数項で打ち切られた場合の漸近的な振る舞いにはまったく興味をもたなかったと思われる． また，問題意識においても亀田がポアソンの問題の解決のためにこの展開式を導いたのに対し，エッジワースはガウスの誤差法則の精緻化を目指してエッジワース展開を考察した.

一方，［G&K p.210］によると，エッジワース展開は，クラメールが呼ぶところの条件 (C) が満たされるという仮定の下でクラメール によって 1937 年に証明され，現在の形式で G. エッセンによって 1945 年に証明された.

第 3 節　一般ポアソン問題の解

本説で亀田はポアソンの問題を次のように拡張し，その解答として定理 XXV を与えている.

【拡張されたポアソンの問題】：x_k,　$k=1,2,\cdots,s$,　は独立変数で，その確率分布 $f_k(x_k)$ は既知とする.
そのとき
(i) 線型函数
$\xi=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_sx_s$ ($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ は実定数)
の確率分布函数を求めよ.
(ii)函数 ξ が λ と μ の間の値を取る確率を求めよ.

[25] $f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\mu_3}{6\sigma^3}(x^3-3x)+\frac{1}{n}(\frac{\mu_3^2}{72\sigma^6}(x^3-3x)+\frac{\mu_4-3\sigma^4}{24\sigma^4}(x^4-6x^2+3))+\cdots\right\}$

定理ＸＸＶ：x_k,　$k=1,2,\cdots,s$,　は独立変数で，その第１種確率分布が $f_k(x_k)$ であり，更に，x_k が数値Ｂよりも大きい場合はその函数は常に消滅し，その上，有界変動であるとする．
そのとき
(i) 線型函数
$\xi=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_sx_s$ ($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ は実定数)
の確率密度函数はエルミート展開によって次のように与えられる．

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nc^{n+1}\frac{d^n}{dz^n}(\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}).$$

(ii)函数 ξ が λ と μ の間の値を取る確率は，次の公式によって与えられる．

$$\int_{\lambda}^{\mu}f(\xi)d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda_1}^{\mu_1}e^{-z^2}dz+\left[\sum_{n=1}^{\infty}A_nc^n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2})\right]_{\lambda_1}^{\mu_1},$$

ここで係数 A_n は次の級数によって与えられ

$$\sum_n A_nc^n=(\prod_{k=1}^{s}J(f_k))e^{\left(\Sigma m_k^{(1)}a_k\right)\alpha-\frac{\Sigma a_k^2(m_k^{(2)}-m_k^{(1)})}{2}\alpha^2}$$

そして

$$c=\frac{1}{\sqrt{2\Sigma a_k^2(m_k^{(2)}-\left(m_k^{(1)}\right)^2)}},$$

$$z=\left(\xi-\sum_k a_km_k^{(1)}\right)c$$

とする．

H.クラメールは[Cramér]p.64 の脚注で亀田の論文を引用し，「亀田は，その興味深い論文のなかで基本的な誤差の合成の観点から A-級数の収束問題を扱っている．たとえ亀田がその展開の収束条件しか考察していなかったとしても，彼の論文は様々な点で本論と接点がある．」として，この定理ＸＸＶを拡張した定理を証明抜きで紹介している．

4 亀田の確率論の先進性と保守性

第２節，第３節で確率論学者としての亀田の確率観や業績を主著『確率論及ビ其ノ應用』と 1925 年版論文を中心に論じてきたが，ここでそれらの内容をまとめておくことにする．

亀田の確率論の先進性

P.レヴィに先立って確率論における特性函数（厳密には現在の定義とは同じものではないし，亀田自身は母函数と呼んでいた）の重要性に気づき，レヴィの反転公式に近い反転公式（定理ＸⅢ）を含む母函数の基本的な性質（第１章第１節 3.の表）を当時の解析学の要求する厳密な方法に基づいて導出したことは亀田の確率論の先進性を示す証左として挙げられるかもしれない．

更に，この当時収束条件がはっきりしなかったエルミート展開に対し，収束条件（定理ＸⅨ）を明示した上でこれを母函数と結び付けて第２反転公式（定理ＸＸ）を導出したことも優れた結果であろう．

そしてこれら二つの反転公式をこの当時の確率論の基本的な問題とも言えるポアソンの問題（緒論）に適用し，本質的にはエッジワース展開と類似の展開式（定理ＸＸⅢ）を導いた上で解決したことは，当時の日本の確率論はもちろんのこととして，欧米の確率論を視野にいれても十分大きな貢献をなしたものと評価して良いのではなかろうか．

一方で．亀田の確率論はいくつかの点で 20 世紀の新しい数学の潮流に乗り遅れていたと思われる．以下において，それらの点について論じることとする．

亀田の確率論の保守性

確率論の基礎づけに対する認識

亀田は数学を純粋数学[26]と応用数学に分け，「純粋数学は数及び空間を比較的少数の公理に基づいて研究する学であるが，応用数学はこれを物理学，医学，保険学等他の学問技術へ応用する目的をもって研究する学問である.」とし，この当時の多くの数学者同様，確率論は応用数学に属していると見なしている．確率が様々な分野に応用ができていることから応用数学としての側面があると考えること自体は現在においても変わらないが,「応用数学では数および空間だけの公理ではその数学を成立せしむるに不充分であって，他の学問の原理原則を取り入れる必要がある．確率論は応用が広いだけに他の学問の根本観念や原理原則を取り入れる場合も殊に多いのであるがこれら各科学の原理原則を一々述べることはもとより不可能である.」としている．また，確率論の基礎観念を構築する際,「確率論の本質はなんであるか，如何にして確率を測るか，確率論は如何なる事象に対し適用し得らるるか」を根本問題として捉えているが，コルモゴロフのように，二つ目を大胆に切り捨て，現実世界との関連づけを一旦棚上げにして純粋数学としての確率論を構築するようなことは全く考えていなかったように思われる．あまり現実に密着した理論構成を行おうとする，応用面では良いとしても理論面では上手く行かないことがある．ユークリッド幾何でも，角は扱っても角度の測定方法についてまでは定義や公理で扱ってはいない.

本質的に応用数学者である亀田にとって，ボールマン，ブロッジ流の公理を知ってはいたが，ヒルベルトの第 6 問題については触れておらず，コルモゴロフのように現実との関連を棚上げにしてまで公理化することの意義を感じることはなかったのかもしれない．すくなくともレヴィが 1949 年の著書で記したように「コルモゴロフは，確率の公理に決定的な形を与えた.」とまでは捉えていなかったのではなかろうか.

ルベーグ積分に対する逡巡

亀田は，上記の母函数の定義の後に,「積分はリーマンの意味で使用されるのであってルベーグの意味ではない.」と明記している．そのためルベーグ積分を解析の常識とする現代の目からはいささか迂遠に見えるところがある.

実際，亀田はフビニ・トネリの定理（1907）を一切使わず，計算の中で起こる積分順序の交換を一つ一つ手間を掛けて正当化している．スティルチェス積分を適切に使用すればより統一的により一般的に諸命題を表現できたと思われるのだが，第 1 母函数と第 2 母函数を分けて定義し，連続と離散についてそれぞれ個別に対応しようとしている．エルミート展開の収束条件もルベーグ積分論を使わないため，エルミート多項式系が $L^2(-\infty,\infty)$の完全系であると言う現代的な立場から考えるとその条件付けは過渡的に見える.

ルベーグの革新的な積分論が発表されて既に 20 年以上が経っていたにも拘わらず，亀田がこのような中途半端な取扱いをしていたことに日本の数学が未だ世界標準に追いつく過渡期にあったことの証左と捉えることが出来るかもしれない．実際，そのように解釈する欧米の学者もいる.

> これらのやや逆説的な事象は，20 世紀初頭の日本における数学研究の伝統がまだ「若い」ことの特徴を強調している．西洋の知識，特に新しい発見は，すべてが同じ速度で日本に広まったわけではない．日本が急速に数学研究の「国際化」のダイナミクスの一部となり，20 世紀初頭から著名な科学者を輩出することができたとすれば，西洋の数学的知識と技術のレベルにおける日本との真の整合性は変わらないという事実が残るが，技術は 1920 年代までに完全には完成していなかったのである．[Laurens& Mazliak[27]]

ところで 1920 年代のルベーグ積分の世界での浸透度はどの程度のものであったのであろうか．一つの専門家からの参考意見として次のようなものがある.

---

[26] 亀田自身は「純正数学」と呼んでいる.

[27] Laurent Mazliak 氏はホワイトノイズ解析の創始者である飛田武幸氏のプリンストン時代の生徒である.［飛田 p.305］

彼(ウィナー)は 1920 年代の前半をこれに費やし，その成功の後は有限次元のときの平坦なルベーグ測度のように，ブラウン運動を表現する測度を基礎とする連続曲線の空間上の解析を展開することを提唱した．その頃は有限次元の場合ですらルベーグ測度は広く用いられる状況になっていないときで，ウィナーが提起した話は時代を先駆けていた．[池田]p.ix」

これを見ると，亀田が本論を発表した頃は，ルベーグ積分は，未だ世界的にも「常識」にはなっていなかったことが伺われる．一方，日本におけるルベーグ積分の浸透状況について調べて見ると，東京大学 100 年史には「昭和十年代に入って，掛谷宗一がルベーグ積分の講義を始めた.」とあるが，1928（昭和３）年に東京帝国大学数学科に入学した吉田耕作が「学部で吉江先生のルベーグ積分の講義を聴かせていただいた頃には，…[28]」と書いているから，シラバスで残っているかどうかは別として，実際にはもっと早くから導入され始めていたのであろう．1935（昭和 10）年に東京帝国大学に入学した伊藤清は学生時代を振り返って「僕はそのころルベーグ積分を分かってもいなかった．リーマン積分は縦に切って，ルベーグ積分は横に切ってするのだという式の時代ですから，そんなふうに少しは知っていたかもしれませんけれども，本当は分からなかった．［高橋］p.240」と記している．掛谷の講義で学んだのかどうかは判然としないが，同級生の小平邦彦は洋書で自習したらしい．[29]ルベーグ積分は現在考える以上に敷居が高かったことが推察される．高木貞治の名著『解析概論（1938 初版)』の元になった講義を伊藤や小平は直接受講しているが，ルベーグ積分はなかったとのことである．解析概論にルベーグ積分の章が追記されたのは 1943（昭和 18）年である．

これらを総括すると，1925（大正 14）年にルベーグ積分を避けた亀田を，時代の流れに乗り遅れた数学者であると切り捨てるのは些か酷である，と筆者は感じたが，この逡巡が彼の数学を古臭くしてしまったのも紛れもない事実であろう．

ブラウン運動に対する無関心

亀田は確率論の応用に対して広く関心を持っており，1932（昭和 7）年出版の『確率論及其ノ應用』に於いても「第十四章 確率論ノ應用」として１章を特別に設けている．そのなかで「物理学に於ける応用」について１節を割いて解説し，「量子論[30]，電子論，気体運動説等に応用せらるる．」とし，マクスウェル分布についてはかなり詳しく論じている．しかし，ブラウン運動については一言も触れていない．1905 年には，既に，アインシュタインはブラウン運動に関する画期的な論文を発表しており，そのアインシュタインの予言を実験で確認して原子論の正しさを決定づけた J.ペランが 1913 年に一般読者向けに著書『原子』を発表し，ブラウン運動の重要性を分かり易く解説している．本書は 1916 年には英訳され，1925 年には日本語訳まで出ている．1923 年には N.ウィナーがこのペランの著書に触発されてブラウン運動を数学の枠組みの中で構成することを目指し[31]，ウィナー測度（無限次元ガウス測度）を定義していたことを考えれば 1932 年の時点で，専門的な研究をしないまでも，本書にブラウン運動の確率論における重要性について触れることは出来たのではなかろうか[32]．ただ，これもないものねだりかもしれない．この当時，既に，亀田の数学における興味の中心は確率論から積分方程式や微分方程式，フーリエ級数に移りつつあった．そのような状況下にあった日々の行政業務に多忙な極東の数学者に，ブラウン運動の重要性を認識してその研究に勤しむことまで求めるべきではなかろう．

---

[28] 「私の数学勉強法」編者　矢野健太郎，吉田洋一，ダイヤモンド社　昭和 40 年　p.214

[29] 「ボクは算数しか出来なかった」小平邦彦，岩波現代文庫 ,2002, p.35

[30] この時期，ボース＝アインシュタイン統計(1924)もフェルミ＝ディラック統計(1926)，ボルンによる量子力学の確率解釈(1926)も発表されていたが，亀田がどの程度これらの情報を認識していたかは筆者には分からない．

[31] N.Winer, I am a Mathematician, The MIT Press,(1964),pp.38-39

[32] ポアンカレはアインシュタインの論文が発表される前の 1902 年に既に『科学と仮説』で M.Gouy の論説からブラウン運動に注目している．

おわりに

筆者は，以前，数学記号の歴史を調べていたことがあるのだが，その際アクチュアリー記号の歴史についても調査することになり，その過程でアクチュアリー・サイエンスの歴史についてもいろいろ興味深い知見を得ることがあった．そのような期間が２，３年も続くと，現在の多くの数学史書がアクチュアリー・サイエンスに対し，その社会に対する重要性・貢献度に比して，驚くほど無関心であることを不思議に思うようになった．その頃から意識してアクチュアリー・サイエンスに貢献した人たちの逸話を集めるようにしている．亀田豊治朗の名もそのような蒐集作業のなかで知ることになった一人である．

調べ始めて見ると，斎藤氏の「亀田豊治朗博士小伝」や上藤氏の「第 1 回国勢調査と日本の統計学」などにより，亀田の略歴や統計学者としての亀田についてはある程度の知見を得ることが出来たが，数学者としての亀田を正面から捉えた論文はなかなか見つからなかった．そのような折に，フランス人である Laurens・Clémentine と Mazliak・Laurent が，日本でもほぼ無名に近い亀田を，日本の数学が西洋数学を受容して独り立ちするまでの過渡期にあった数学者として捉え，かなり突っ込んだ考察をしていることを知ったときは驚いた．しかも，著者の Mazliak 氏がホワイトノイズ解析の創始者である飛田武幸氏のプリンストン時代の生徒であったと知って更に驚いた．筆者は毎年津田塾で行われる数学史シンポジウムで何度か飛田氏の講演を聴講させていただき，その後の懇親会で日本酒を傾けながらレヴィの話なども聞かせていただいたことがあったからだ．永く生きていると時々面白い出会いがあるものだ．

惜しむらくは，飛田氏は 2017（平成 29）年に亡くなられ，ご存命のときの筆者の興味は無限論と記号論であったため，亀田のことも Mazliak はもちろんのこと P.Levi の初期の業績や飛田氏ご自身のお仕事についても詳しくお聞きすることが出来なかったことである．ただ幸いなことに，Levi については，生前，飛田氏が多くの論文を遺されており，Mazliak との関係もそこから知ることが出来た．

本論で亀田がドイツ語で西洋数学を学んだ理由を明治１４年の政変にまで遡り，主論文をドイツ語で発表した１０年後に英語で発表し直した理由が第一次世界大戦でのドイツの敗北にあるとの見解は［Mazliak, Laurent］によって知った．Mazliak 氏は元々が確率・統計の専門家であり，第一次世界大戦中のヴォルテラと彼の同僚のフランス人数学者たちとの通信録や第一次大戦からの復興期におけるフランス人数学者のコミュニティーについての著書も上梓されているくらいなのでこの辺りの時代について視点は鋭く，大いに学ばせて頂いた．Laurent 氏は Mazliak 氏の学生で，［Mazliak, Laurent］の前にフランス語による氏の修士論文がある．

本論の基になった原稿は，80 ページほどあったのであるが，紙数の関係上かなりの部分を削除したため，確率論学者としての亀田を論じるには舌足らずな内容になってしまったことは残念であった．参考文献は好学の士のための便宜を考えてそのままにしておいた．機会があれば再論したいと思う．

最後になりましたが，このようなマイナーなテーマの論文を発表する場を与えてくださいました津田塾大学数学・計算機科学研究所佐藤文広氏，津田塾大学数学科中屋敷厚氏に深く感謝致します．

参考文献

(1) 粟津 清亮（1950-1958）：華西俗談 第 1～10 巻，巌松堂出版(1-8)，一鳳社(9,10)
(2) 池田 信行（2018）：偶然の輝き―ブラウン運動を巡る 2000 年，岩波書店
(3) 伊藤 清（2010）：確率論と私，岩波書店
(4) 上垣 渉(1998)：和算から洋算への転換過程に関する新たな考証，イプシロン,Vol.40,pp.87-103
(5) 伊藤 清 著，池田 信行 解説（2004）：確率論の基礎［新版］，岩波書店
(6) 上藤 一郎(2018)： 第 1 回国勢調査と日本の統計学，経済研究,Vol. 69, No. 2, Apr. 2018
(7) 亀田 豊治朗（1932）：確率論及ビ其ノ應用，共立社
(8) 龜田豐治朗 (第 8 版) - 『人事興信録』データベース (nagoya-u.ac.jp)
(9) 茅原健(2007)：工手学校―旧幕臣たちの技術者教育―，中央公論新社
(10) ケインズ　著（1921），佐藤隆三　訳（2010）：確率論，東洋経済新報社
(11) コルモゴロフ　著，坂本實　訳（2010）：確率論の基礎概念，筑摩書房
(12) コルモゴロフ，ユシュケビッチ　編纂，三宅克哉　監訳（2008）：19 世紀の数学　Ⅰ，朝倉書店
(13) 斎藤 斉（1956）：「亀田豊治朗博士小伝」『保険學雑誌』保険學会，395 号.
(14) 佐々木力（2022）：日本数学史　第Ⅲ部，岩波書店
(15) 清水雄也・小林佑太(2020)：Kries の適合的因果論をめぐる誤解：佐藤俊樹『社会科学と因果分析』の場合, 一橋大学全学共通教育センター『人文・自然研究』14 号, 2020
(16) 鈴木 真治（2021）：幕末から明治における和算家・洋学者たちの活動，現代思想 2021vol.49-8,pp.57-67
(17) 鈴木 真治（2023）：近代日本社会成立におけるアクチュアリーの果たした役割について，日本アクチュアリー会初期会員について,アクチュアリー会会報第 76 号，pp.24-73

(18) 高橋 陽一郎 編（2011）：伊藤清の数学，日本評論社
(19) 竹下 清松(1950)：感謝と追憶，日本ｱｸﾁｭｱﾘｰ会会報，第 5 号，p.14
(20) 竹内 啓（2018）：歴史と統計学，日本経済新聞社
(21) 田中 紀子(2018)： Paul Lévy の確率論 -伊藤清・飛田武幸の視点から-,
RIMS Kôkyûroku Bessatsu B71 (2018), 129-143
(22) 立花 隆（2012）：天皇と東大Ｉ，文芸春秋
(23) 恒川 清爾(2008)：科学史入門：明治期における技術者，科学史研究　第 248 号
(24) デュドネ 編（1985）：数学史Ⅲ，岩波書店
(25) 寺崎 昌男(1972)：「講座制」の歴史的研究序説，大学論集　第 1 集，pp.1-10
(26) 東京大学百年史(1986)：東京大学百年史編集委員会【編】，東京大学出版会
(27) 東京帝国大学五十年史（上・下）(1932)
(28) 長岡一夫（1989）：大数の強法則の発展の歴史，科学史研究　II，28，pp.14-24
(29) 中村 赳（1964）：御雇外国人の研究：とくに数の考察，法政大学史学会，法政史学 65-75
(30) 飛田武幸(2014)：レヴィの数学とホワイトノイズ理論 , 第 25 回数学史シンポジウム
(31) ヒルベルト著，一松 信 訳（1969）：ヒルベルト 数学の問題，共立出版
(32) ポアンカレ著(1917)，伊野伊三郎訳(1959)：科学と仮説，岩波書店
(33) ポアンカレ著(1908)，吉田洋一訳(1953)：科学と方法，岩波書店
(34) 簑谷 千凰彦（1982），不遇の統計学者エッジワース，三田学会雑誌 Vol.75,No1(1982.2),p.39-64
(35) ラプラス 著（1814），内井 惣七　訳（1997）：確率の哲学的試論，岩波書店
(36) ラプラス 著（1812），伊藤 清，樋口 順四郎 訳・解説（1986）:ラプラス 確率論 確率の解析的理論（現代数学の系譜 12），共立出版
(37) レヴィ著(1970)，飛田 武幸，岡本 喜一 訳(1973)：一確率論研究者の回想，岩波書店
(38) Bohomann,Georg(1901)：”Lebensversicherungsmathematik” In: Encyklopadie der mathematischen Wissenshaften.Vol. I .Heft2.Artikel Id4b. Leipzig: Teubner, pp.852-917
(39) Coolidge, Julian Lowell(1925)： An introduction to mathematical probability, Oxford
(40) Cramér,Harald(1928)：On the composition of elementary errors.Scand.Actuar.J1,13-74
(41) Czuber, Emanuel(1908)： Wahrscheinlichkeits Rechnung.
(42) H. Fischer(2010)： A History of the Central Limit Theorem. From Classical to Modern Probability, Springer.
(43) Gnedenko, B. V.; Kolmogorov, A. N. (1954) ：Limit Distributions For Sums Of Independent Random Variables
(44) Hobson, Ernest William(1907)： The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourrier’s Series.
(45) Kameda,T. (1915)：“Geometrischer Beweis und Erweiterung eines Satzes von 44 Tschebyscheff”, The Thohoku Mathematical Journal Vol.6.No. 4
(46) Kameda,T.(1915)：“Theorie der erzeugenden Funktion und ihre Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung ” , Proceedings of the Tokyo Mathematico-Physical Society,2nd Series,vol.8,pp. 262-295,   336-359.
(47) Kameda,T. (1916)：“Über zwei Probleme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ”. Tokyo Math. Ges.
(48) Kameda,T. (1917) ： “Ein Verallgemeinerung des Poissonschen Problems in der WahrscheinlichkeitsRechnung,” Proceedings of the Tokyo Mathematico-Physical Society,2nd Series, Vol. 9, pp. 155-158
(49) Kameda, T. (1925)：“Theory of Generating Functions and Its Application to the Theory of Probability,”Journal of the Faculty of Science Imperial University,Section 1 Mathematics, Astronomy, Physics, Chemistry, Vol. 1, pp. 1-62.
(50) Krengel,Ulrich(2011)： On the contributions of Bohlmann to probability theory, Journ@l Electronique d’Histoire des Probabilités et de la Statistique Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics Vol 7, n° 1;
(51) Laplace, Pierre-Simon(1814)： Théorie analytique des Probabilités. 2e édition.
(52) Laurens, Clémentine(2019)： Histoire et enjeux de la recherche en Probabilités au Japon au début du XXe siècle -Kameda Toyojiro, un personage emblématique- .
(53) Laurens, Clémentine & Mazliak, Laurent (2022)：Kameda Toyojiro and the transfer of the Western theory of probability to Japan, International Journal of Approximate Reasoning, Volume 141, Pages 159-170
(54) Lévy, Paul(1925)： Calcul des Probabilités.
(55) Meyer, Antoine(1874)： Calcul des Probabilités. posthume.
(56) Meyer, Antoine(1879)： Deutsch bearbeitet von Emanuel Czuber; Vorlesung uber Wahrscheinlichkeits-Rechnung,
(57) Poincaré, H. (1912)： Calcul des probabilites. Paris.
(58) Seal, H.L. (1949)：The historical development of the use of generating functions in probability theory, Bulletin / Association of Swiss Actuaries 49 , pp.209-228
(59) Ulrich Krengel(2011) : ON THE CONTRIBUTIONS OF GEORG BOHLMANN TO PROBABILITY THEORY
(60) B. V. Gnedenko; A. N. Kolmogorov(1954)：Limit Distributions For Sums Of Independent Random Variables