ガロア・シュヴァリエ書簡に見るガロア理論

杉本遥菜 *

1　序論

1.1　背景

筆者は 4 年次の卒業研究で代数学研究室に所属しており, ガロア理論や体論を中心にゼミを行っている．そうした学びを進める中で, 高度に体系化されたいわば教科書的な理解や日本語による理解だけではなく, エヴァリスト・ガロア（Évariste Galois, 1811-32）による一次文献を読み, ガロアの生のアイディアに触れてみたいと思うようになり, 代表的な著作を読解することになった.

本研究の目標は, 「オーギュスト・シュヴァリエへの手紙 (本研究では「ガロア・シュヴァリエ書簡」と呼称)」の和訳と, ガロアの生涯およびガロア・シュヴァリエ書簡の伝記論文に照らした理解の 2 点である.

1.2　研究史

　ガロア・シュヴァリエ書簡の和訳として最も代表的なものは, 高瀬正仁氏の『アーベル・ガロア』[高瀬 2002, pp.287-293] である．本研究の和訳にあたっても, この訳および註を参考にした. 註に関しては, 楕円関数論の立場からのものが中心である. なお, [高瀬 2002] の他に, 矢ケ部巌著 『数 Ⅲ 方式ガロアの理論 アイデアの変遷を追って』[矢ヶ部 1976] や山下純一著 『ガロアへのレクイエム』[山下 1986] にも訳文が掲載されているようである. また, ガロアの生涯についてや書簡の和訳が掲載されている書籍として, 彌永昌吉氏の『ガロアの時代　ガロアの数学』[彌永 1999], [彌永 2002] も挙げられる.

一方, ガロアの伝記については, 歴史学教授, エコール・ノルマル校長である M. Paul Dupuy 氏による”La vie d’Évariste Galois” [Dupuy 1992] を参照した. この伝記著作では, ガロアの遺族や同級生へのインタビューや公的資料の収集などを通し, ガロアの人物像や彼の生きた時代および境遇についてまとめられている.

*同志社大学 理工学部 数理システム学科 4 年生

2 ガロア・シュヴァリエ書簡について

2.1 歴史的背景

オーギュスト・シュヴァリエ (Auguste Chevalier, 1809-1868) は 1928 年, ガロアは翌 1929 年にエコール・ノルマルに入学し, 2 人はここで出会った. 彼らはたびたび文通をし, 交友はガロアの死まで続いた. 決闘を前にシュヴァリエに送られた書簡は大変雑然としたものであったが, シュヴァリエはこれを正確に解読してまとめ, ガロアの願い通り書簡の『百科全書批評 (la *revue Encyclopédique*, 1832)』掲載に貢献した. 彼らが文通を重ねてきたことが, シュヴァリエの読解の助けになったとも考えられよう.

以下は, ガロアが書簡の『百科全書批評』掲載に言及している部分である.

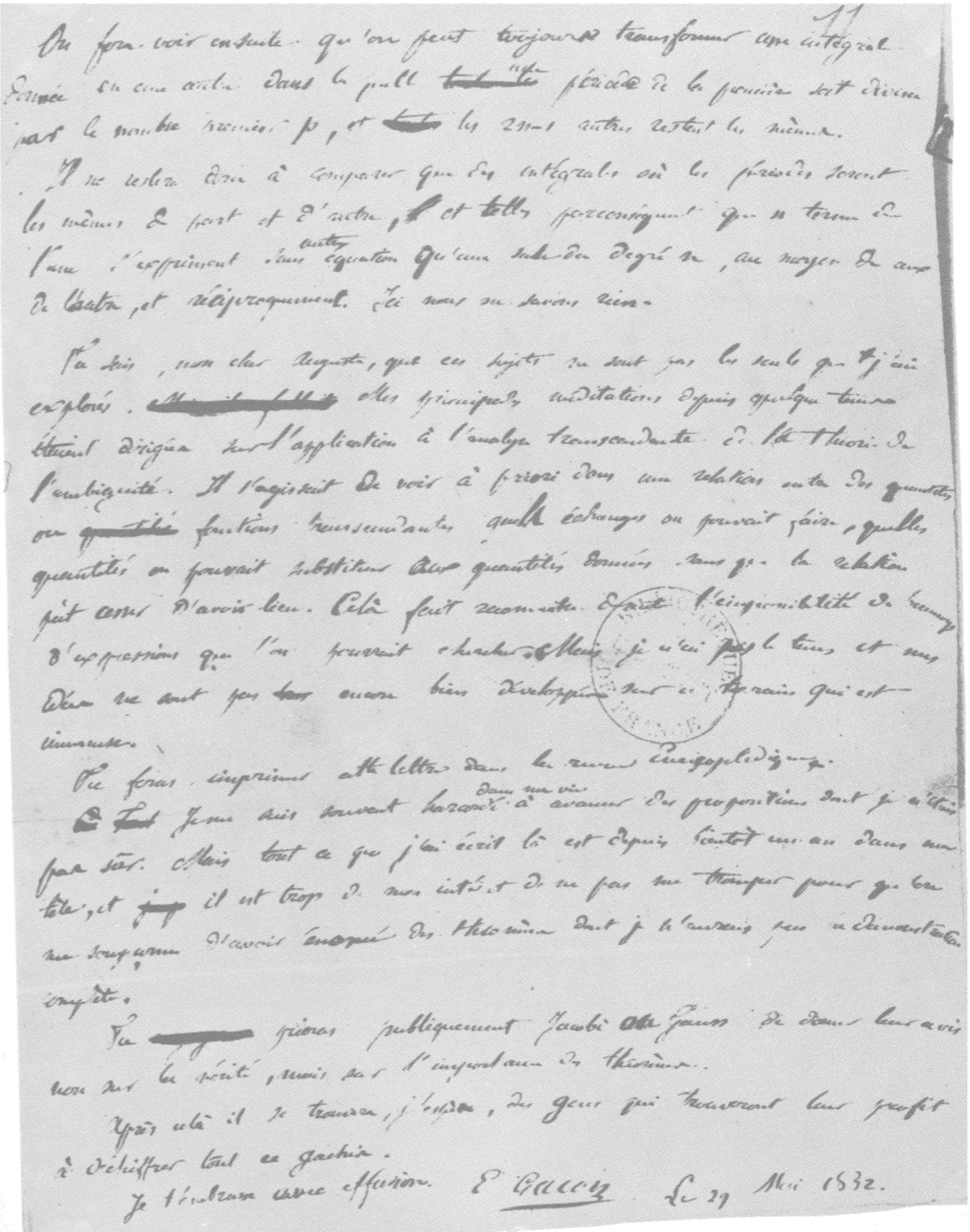
> この手紙を『百科全書批評』に掲載してくれないか. ……ヤコービ, あるいはガウスに, 定理の正しさについてではなくその重要性について意見をくれるように公に頼んでくれないか. (11a)
> (Tu feras imprimer cette lettre dans la *revue Encyclopédique*. ......Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.)

決闘は 1832 年 5 月 30 日の早朝, パリ近郊の街ジャンティィのグラシエール池の近くで行われた. 銃弾は 25 歩の距離から発射され, ガロアは右の腹部に致命傷を負った. 後述の「すべての共和主義者への手紙」[Galois 1962, p.470] には, 「私は卑しくあだっぽい女と, その女に騙された 2 人の犠牲となって死ぬ」という記述がある[1]. アレクサンドル・デュマ (Alexandre Dumas, 1802-1870) は [Dumas] の中で, 決闘でガロアを傷つけたのはペシュー・ダルバンヴィル (Pécheux d'Herbinville) であると主張している. 一方, [高瀬 2002] では, 決闘の相手は L.D とされており, 内容に齟齬が見られる.

この決闘の前夜, ガロアは「オーギュスト・シュヴァリエへの手紙」, 「すべての共和主義者たちへの手紙」, 「N.L と V.D への手紙」の 3 通の書簡をしたためた. [Galois 1962, p.471] には, 最後の手紙の宛先は彼と特に親交が深かった共和主義者の Napoléon Lebon と V. Delaunay であるという記述があるが, [Dupuy 1992] では V.D の D はおそらくデュ・シャトレ (du Châtelet) であるとされている.

---

[1] Je meurs victime d'une infâme coquette, et de deux dupes de cette coquette.[Galois 1962, p.470]


11

On fera voir ensuite qu'on peut toujours transformer une intégrale donnée en une autre dans laquelle une période de la première soit divisée par le nombre premier p, et les 2n-1 autres restent les mêmes.

Il ne restera donc à comparer que des intégrales où les périodes seront les mêmes de part et d'autre, et telles par conséquent que n termes de l'une s'expriment sans autre équation qu'une seule du degré n, au moyen de ceux de l'autre, et réciproquement. Ici nous ne savons rien.

Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir à priori dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense.

Tu feras imprimer cette lettre dans la revue encyclopédique.

Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

Après cela il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.

Je t'embrasse avec effusion. E. Galois Le 29 Mai 1832.

図 1: 『百科全書批評』掲載への言及 (B-A 版巻頭 15 枚目. Folio 11a du manuscrit. Cf. p.185 et 489.)

2.2　2 種の底本

本研究の和訳にあたり, 以下の 2 種の底本を参照した.

一方は 19 世紀フランス数学会 (La société mathématique de France) 版 (以降 SMF 版と表記) である. [Galois 1897] 初版は Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, (1836 年創刊, いわゆるリューヴィル誌) vol. 11(1846) pp. 381-444 に掲載されたもので, 1897 年に Gauthier-Villars et Fils 社により翻刊されている. 本研究では 1897 年の版を参照した. この版では, 先のジョゼフ・リューヴィル (Joseph Liouville, 1809-1882) の序文は削除され, エミール・ピカール (Charles Émile Picard, 1856-1941) のものに替えられている.

もう一方はロベール・ブルニュ(Robert Bourgne) とジャン・ピエール・アズラ (Jean-Pierre Azra) によってまとめられたもの (以降 B-A 版と表記) である. [Galois 1962] 1962 年に刊行され, 1972 年には限定 800 部で再刊された. 巻頭にガロアの手書き原稿のコピーが付属しており, 序文はブルバキの主要人物であるジャン・デュドネ (Jean Alexandre Eugène Dieudonné, 1906-1992) によって書かれている. [高瀬 2002] の訳もこの版に依拠している.

これらの版には以下のような差異が見られた.

まず, B-A 版には SMF 版にない補足情報が記載されている. B-A 版では, ページを表す数字と a, b のアルファベットの組み合わせによって, 手書き原稿との位置的な対応を表している. a は表面, b は裏面と対応しており, 例えば 11a という表記は手書き原稿の 11 ページの表面にその記載があることを意味する [Galois 1962, p.54].

また, B-A 版は, 見開きの右ページには原文, 左ページの対応する場所に注釈という誌面構成になっている. 加えて, B-A 版においては訳文中に天井関数のような括弧の記号 (⌈　⌉) が付記されている. 手書き原稿との比較により, これはガロア自身による挿入部分の明示であることが分かった.

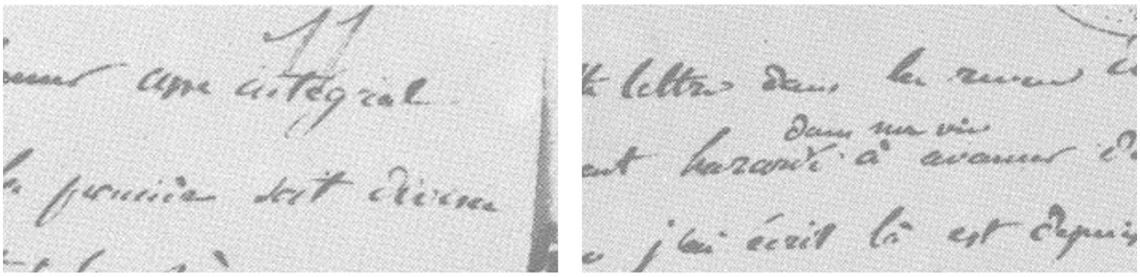


図 2: 手書き原稿での該当箇所 (左：ページ数　右：挿入部分)(いずれも B-A 版巻頭 15 枚目. Folio 11a du manuscrit. Cf. p.185 et 489.)

また, 使用されている数式にも差異があった. 例えば, ルジャンドルの定理として紹介されている式は, SMF 版では

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2}$$

であるが, B-A 版では

$$E'F'' - E''F' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

となっている．なお, 現在, 第一種完全楕円積分と第二種完全楕円積分の間に成り立つ関係式として, 主に前者の形の「ルジャンドルの関係式」が知られているが, ガロアはもともと後者の書き方で書いていたようである [Galois 1962, p.488].

その後に登場する式についても, SMF 版では

$$\sum \int f(y, Y)dy = \int F(x, X)dx + \text{une quant. alg. et log.}$$

であったが, B-A 版では

$$\sum \int (y, Y)dy = \int F(x, X)dx$$

に改められている．B-A 版の注釈にはこの数式の変更に対する言及があったが, 変更の意図はわからなかった.

この他にも, B-A 版において単語が変更・削除・挿入されている箇所がいくつかあった．また, 動詞の形や句読点の位置, 大文字小文字の区別にも違いが見られた．一例としては, 以下の箇所の réduction という語が, SMF 版では équation となっていた．ここは, 変更前の単語では文意が通らず, 変更後の réduction では文意が通るようになっている.

> En toute rigueur, cette réduction n'est pas possible dans les cas plus élevés. (9b)
> SMF 版：最も正確には, より高次の場合にはこの方程式は不可能である.
>
> B-A 版：最も正確には, より高次の場合にはこの方程式の次数を減少させることは不可能である.

以下に変更箇所の一覧を示した．ページ, 行は B-A 版に準拠し, カンマやピリオドの有無, 大文字小文字の違いなど, 軽微なものは省いて集計している.

表 1: 対照表

ページ	行	SMF 版	B-A 版
173	2	unes	une
175	2	en sorte que	en sorte (que なし)
175	2	se diviser	se décomposer
175	6	ils	elles
175	19	arrivera	arrive
175	33	ne peuvent(pas なし)	ne peuvent pas
175	38	le *Bulletin de Férussac*	le bulletin férussac
177	6	$x_{k,l,m\cdots} \mid x_{ak+bl+cm+\cdots+h,a'k+b'l+c'm+\cdots+h',a"k+\cdots}$	$x_{k,l,m\cdots}/x_{ak+bl+cm+\cdots+f.a_1k+b_1l+c_1m+\cdots+g.\cdots}$
177	8	le module p	module p (le なし)
177	9	la racine	la racines
177	12	$p^\nu(p^\nu-1)(p^\nu-p)\cdots(p^\nu-p^{\nu-1})$	$p^n(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1})$
177	16	le *Bulletin de Férussac*	le bulletin férussac
177	23	$x_{k,l},\quad x_{ak+bl,ck+dl}$	$x_{k.l}\quad x_{ak+bl/ck+dl}$
179	33	$\infty, 1, 3, 5, 5, 9$	$\infty\quad 1\quad 3\quad 4\quad 5\quad 9$
181	3	équation	réduction
183	5	$FE'+EF'-FF'=\frac{\pi}{2}$	$E'F''-E''F'=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$
183	30	$\Sigma\int f(y,Y)dy=\int F(x,X)dx+\text{une quant. alg. et log.}$	$\sum\int(y,Y)dy=\int F(x,X)dx$
185	19	de suite (tout なし)	tout de suite
185	29	énoncer	énoncé
185	33	il y aura	il se trouvera

3　ガロア・シュヴァリエ書簡の和訳

3.1　新訳の特色

新訳は B-A 版を底本とし, 左ページの注釈も訳出して記載している. また, 高瀬訳における曖昧な表現を改良したり, 必要に応じて文を分割して訳したりすることによって, より文意がとらえやすい訳文になるようにした. 和訳の全文は, 本稿末尾の付録に掲載した.

高瀬訳と新訳の違いが顕著な部分について, 以下に代表的なものを示す.

例 3.1. Il s'en faut que dans cette généralité les les équations qui lui répondent soient solubles par radicaux. (9a)

高瀬訳：この一般的情勢のもとでは, この群に対応する方程式は, 冪根を用いて解けるという事態からはほど遠い地点に置かれている.

新訳：この一般性において, この群に対応する方程式等がべき根によって可解であるだけではあまりに不十分である.

例 3.2. On fera voir ensuite qu'on peut toujours transformer une intégrale donnée en une autre dans laquelle une période de la première soit divisée par le nombre premier p, et les $2n-1$ autres restent les mêmes. (11a)

高瀬訳：次に, ある積分が与えられたとき, それはつねに, 他の積分, すなわち, そこでは与えられた積分の周期のひとつが素数 p で割られているとともに, 残る $2n-1$ 個の周期は元のままに保たれているという状勢が認められる積分に変換されることが示される.

新訳：つづいて以下のことが理解されるだろう．すなわち, つねに所与の積分量を他の積分量に変換することができ, その他の積分量とは, その中において第一種関数の周期は素数 p によって分割され, 残る $2n-1$ 個の周期はそのまま残されているとする．

3.2 新訳で用いた単語について

新訳で用いた単語のうち, 注意が必要な単語についていくつか述べる．

まず permutation についてだが, これは順列, 入れ替えの意味で, ここでは「順列」と訳した．これは, 方程式の根全体を並び替えて得られる順列のことを指す．

また, substitution は置換, 取り換えの意味で, ここでは「置換」と訳した．これは, ある順列から他の順列への移行を指す．

また, groupe という語はここでは「群」と訳した．ガロアの用いた groupe は, 現在の完全に整備された抽象代数学上での群の概念とは異なるが，基本的な置換群の性質を踏まえた記述を完備しているので，群という名称でこれを呼ぶのは十分妥当であると考えた．

すなわち, ここでの群とは, 合成で閉じた置換の集合, あるいは, あるいくつかの置換が適用されることで定まる文字の配列の集合を意味する [カッツ 2023, p.264]. 特に, 「M 個の群 (8b)」などと言うときには, 今日の言い方では剰余群を指し, 部分群を指すのではない [カッツ 2023, p.265]. また, 「群の置換 (9a)」の全体は今日の方程式のガロア群に対応する [梅田 2001].

3.3 有名な一節 ”Je n’ai pas le temps. ”の解釈をめぐって

ガロア・シュヴァリエ書簡の結びの部分には,

> しかし, 私には時間がなく, 私のアイディアはこの広大な分野ではまだ十分に展開されていない. (11a)
> (Mais je n’ai pas *le* temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense.)

という有名な一節がある．これまで, ガロアの「悲劇の革命家」というイメージから, この部分について「ガロアは自らの死を予期して書いたのではないか」という解釈がなされてきた．しかし, 斜体の冠詞 le に注目することにより, 異なる解釈が可能である．

フランス語で否定を表すときに使われる冠詞は, 定冠詞 le と部分冠詞 de の 2 種類である．部分冠詞 de は漠然と「時間がない」というニュアンスを表す．そのため, もし je n’ai pas *de* temps となっていれば, ガロアが決闘による死を予見していた, という説明も成立する．

しかし, ここで使われているのは定冠詞 le で, これは「特定のことをするための時間がない」という表現である．英語や日本語にはこうした冠詞の違いの概念はないため, 英訳・和訳の段階で微妙なニュアンスが削ぎ落とされた可能性がある．

ところで, この記述の前段階には次のような記述がある．

> 親愛なるオーギュスト, 君は, これらのテーマは私が探究したことだけではないことを知っている. 私の主要な黙考はしばらく前から, 曖昧さの理論の超越的な解析への応用に向けられていた. 超越的な量や関数の間の関係において, どのような交換が可能であったか, どのような量を, その関係が成り立たなくなり得ないように所与の量に置き換えることができたかが先験的にわかるようにすることが必要である. それは, 探すことができたという多くの表現の不可能性をすぐに認識させる. しかし, 私には時間がなく, 私のアイディアはこの広大な分野ではまだ十分に展開されていない. (11a)
>
> (Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps etaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilite de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense.)

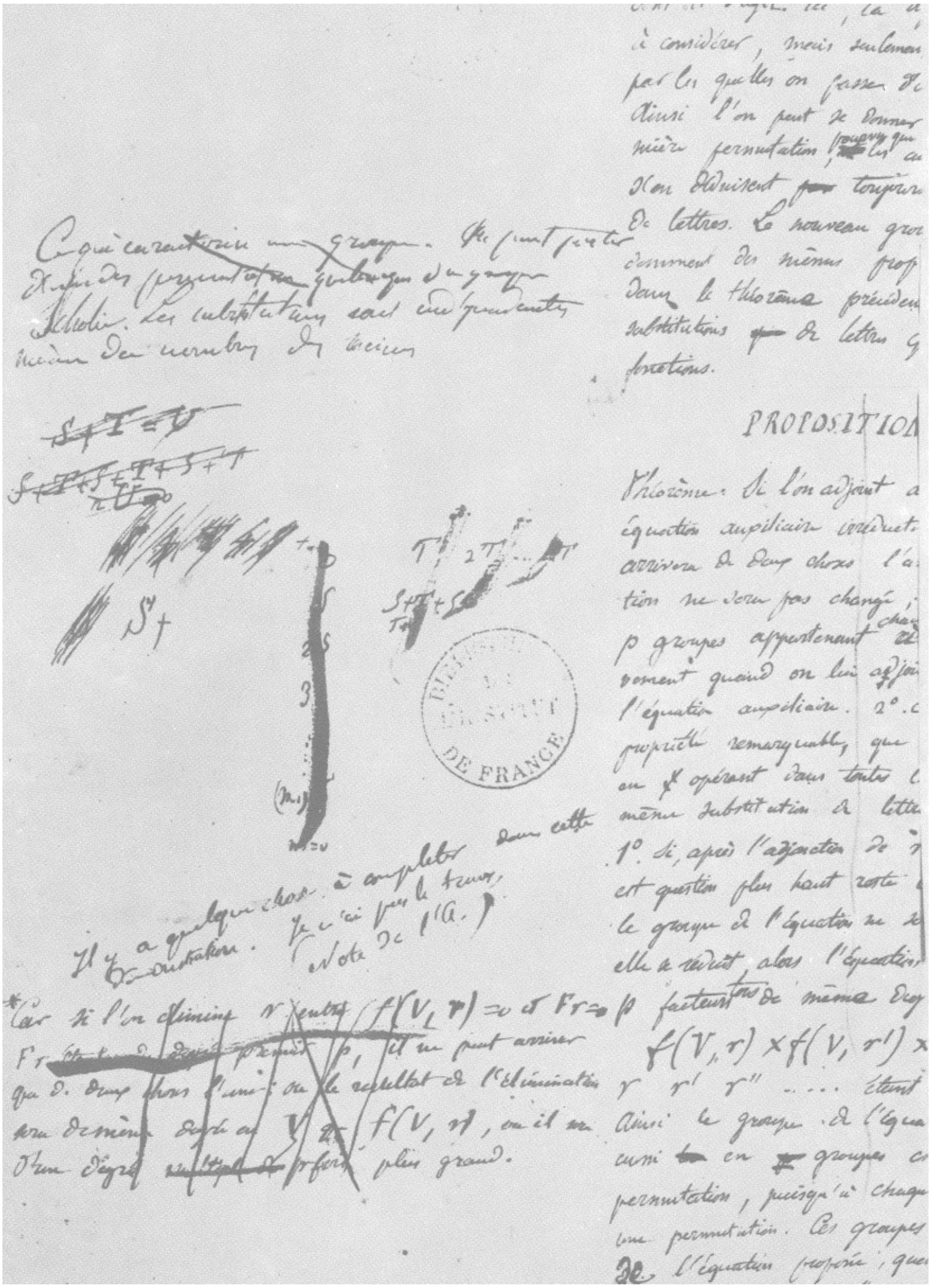
したがって, 前後の文脈から, ガロアの群概念の応用可能な領域があまりに広大な分野に広がるため, 仮に生涯をかけても理論を展開しきれない, という解釈がより適当であると考えられる.

4　結論

ガロアのアイディアは非常に乱雑な形で書き残された. それがシュヴァリエをはじめとする多くの人々の手によって読解され, 整理されたおかげで, 現代の我々は体系的な理論としてガロア理論を学ぶことができる.

このように, 数学的アイディアの出現は突然であり, また乱雑な形であることがほとんどである. そうした未整理のアイディアが後世の人々によって編集されることによってはじめて, 我々は完備された体系で数学を学ぶことができる. 数学史研究においては一次文献の読解に重要な意味があるが, そこでは教科書のように整理された形で数学的アイディアが展開されているわけではないのである.

本研究を進めるにあたり, 熱心にご助言いただいた四日市大学 関孝和数学研究所の上野健爾先生, 関係資料を提供してくださった大阪公立大学の梅田亨先生に深謝の意を表します. また, 四日市大学 関孝和数学研究所の但馬亨先生には終始丁寧にご指導いただきました. 心から感謝いたします.



Ce qui caractérise un groupe. On peut partir d'une des permutations quelconques du groupe

Scholie. Les substitutions sont indépendantes même du nombre des racines

$S+T=U$

Il y a quelque chose à compléter dans cette démonstration. Je n'ai pas le temps. (Note de l'A.)

*Car si l'on élimine r entre $f(V_1, r)=0$ et $Fr=0$ ... il ne peut arriver que de deux choses l'une: ou le résultat de l'élimination sera de même degré en V que $f(V, r)$, ou il sera d'un degré plus grand.

... à considérer, mais seulement ... par lesquelles on passe de ... Ainsi l'on peut se donner ... mière permutation, pourvu qu' ... d'on déduisent toujours ... de lettres. Le nouveau grou... jouiront des mêmes prop... dans le théorème précéden... substitutions de lettres ... fonctions.

PROPOSITION

Théorème. Si l'on adjoint à ... équation auxiliaire irréduct... arrivera de deux choses l'a... tion ne sera pas changé; ... p groupes appartenant chacun ... vement quand on lui adjoi... l'équation auxiliaire. 2°. ... propriété remarquable, que ... en opérant dans toutes l... même substitution de lettr...

1°. Si, après l'adjonction de ... est question plus haut reste ... le groupe de l'équation ne se... elle a réduit, alors l'équation ... p facteurs tous de même degr...

$f(V, r) \times f(V, r') \times$ ...

r r' r'' .... étant ...

Ainsi le groupe de l'équa... aussi en groupes ... permutation, puisqu'à chaque ... une permutation. Ces groupes ... de l'équation proposée; quan...

図 3: Je n'ai pas le temps. の記述 (B-A 版巻頭 19 枚目. Folio 4a du manuscrit. Cf. p.54 et 485.)

参考文献

[Galois 1897] La société mathématique de France, *Œuvres mathématiques d'Evariste Galois*, Gauthier-Villars et Fils, 1897.

[Galois 1962] Robert Bourgne et J.-P. Azra, *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars, 1962.

[Galois 1997] Robert Bourgne et J.-P. Azra, *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*, 2e ed. rev. et augm, Gauthier-Villars, 1997.

[高瀬 2002] 高瀬正仁, 『数学史叢書　アーベル/ガロア　楕円関数論』, 東京, 朝倉書店, 2002.

[Dupuy 1992] M. Paul Dupuy, *La vie d'Évariste Galois*, J. Gabay, 1992, `http://www.galois-group.net/dupuy/trans1/texts/Introduction.txt` (参照 2023-10-07).

[矢ヶ部 1976] 矢ヶ部巌, 『数 III 方式ガロアの理論：アイデアの変遷を追って』, 京都, 現代数学社, 1976.

[山下 1986] 山下純一, 『ガロアへのレクイエム：20 歳で死んだガロアの《数学夢》の宇宙への旅』, 京都, 現代数学社, 1986.

[彌永 1999] 彌永昌吉, 『ガロアの時代　ガロアの数学　第一部：時代篇』, 東京, シュプリンガー・フェアラーク, 1999.

[彌永 2002] 彌永昌吉, 『ガロアの時代　ガロアの数学　第二部：数学篇』, 東京, シュプリンガー・フェアラーク, 2002.

[Infeld 1969] L. インフェルト著, 市井三郎訳, 『ガロアの生涯　神々の愛でし人』, 東京, 日本評論社, 1969.

[Katz 2020] Katz, Victor J. and Parshall, Karen Hunger, *Taming the unknown : a history of algebra from antiquity to the early twentieth century*, Princeton University Press, 2020.

[カッツ 2023] V. カッツ, K. H. パーシャル著, 佐藤勝造, 佐藤文広訳, 『代数学の歴史』, 東京, 共立出版, 2023.

[梅田 2001] 梅田亨, 「特集 1000 年の数学者 ガロア」, 『数学セミナー 2001.4』, 東京, 日本評論社, 2001

[Robert, 1891] Adolphe Robert, *Dictionnaire des parlementaires français*, tom.V. Bourloton, 1891, `https://books.google.co.jp/books/about/Dictionnaire_des_parlementaires_fran%C3%A7ai.html?id=kxiNAAAAMAAJ&redir_esc=y` (Google Books にて参照 2023-10-10).

[Dumas] Alexandre Dumas, *Mes Mémoires*, Société des Amis d'Alexandre Dumas, `https://www.dumaspere.com/pages/bibliotheque/chapitre.php?lid=m3&cid=204` (参照 2024-1-25).

5　付録　ガロア・シュヴァリエ書簡　和訳

補完記号については以下のとおり：

編者の補完：{ }

左ページの*：*[ ]

訳者の補完：[ ]

p.173

Auguste Chevalier への手紙

パリ　1832 年 5 月 29 日

親愛なる友へ

8a

私は, 解析学においていくつかの新しいことを為した.

一方は方程式の理論に関するもので, 他方は積分関数に関するものだ.

方程式の理論の中では, いくつかの場合に方程式がべき根で解けるのかを調べた．そのことが私に, この理論を深め, 方程式がべき根で解けない場合であっても, 方程式の可能なすべての変換を記述する機会を与えた.

すべてにおいて 3 つの論文が挙げられるだろう．*[我々が思い出さなければならないと信じていることなどを始めよう．]

第一論文は書かれており, ポアソンの発言にも関わらず, 私は修正を行ってその論文を保持している.

第二論文 *[第三論文] は方程式の理論のかなり奇妙な応用を含む．これが最も重要なことの要約である [明示する].

1° 最初の論文の定理 (II) と (Ⅲ) によれば, ある方程式に補助方程式の根どもの 1 つを付加することと, それにすべての根を付加することの間には大きな違いが見られる.

2 つの場合で, 方程式の群は, 同じ置換によって一方から他方に渡されるような群の加算によって分割される．しかし, *[同じ] 群が同じ置換を持つ状況は必ず 2 つ目の場合にしか起こらない．*[言い換えれば] 以上のことは固有分解 (décomposition propre) と呼ばれる.

言い換えれば, 群 $\{G\}$ が他の群 H を含むとき,

p.175

群 G は H の順列に同じ置換をそれぞれ施すことで得られる群に分割される．次のように：

$$G = H + HS + HS' + \cdots$$

また, 群 G はすべて同じ置換を持っている [施せる, 可能である] 群に分けることができる．次のように：

$$G = H + TH + T'H + \cdots$$

これらの 2{ 種類 } の分解は通常は一致しない．それらが一致するとき, その分解は固有 (propre) であると言われる.

ある方程式 { の群 } について, どんな分解も固有であり得ないとき [いかなる固有分解も可能でない], この方程式をうまく変形すると, 変形された方程式の群はいつも同じ数の順列をもつ, ということを理解するのは容易である.

逆に, 方程式の *[1 つの] 群について, 固有分解が存在する, すなわち (その群が)

8b

N 個の順列の M 個の群に分割されるようなときは, 与えられた方程式を 2 つの方程式によって解くことができるだろう. 1 つは M 回の順列の群をもち, もう 1 つは N 回の順列の群を持つ.

したがって, この群の上で可能な固有分解が存在する [ある群による固有分解が可能である] ようなすべての { 方程式の } 群について調べ上げるならば, 我々は変形することができる群に到達するが, その群の順列の個数はつねに同じである.

もしその群がそれぞれ素数個の順列をもっているならば, 方程式はべき根で解ける [可解] だろう. そうでない場合には, べき根で解くことはできない.

分解できない群がもちうる順列の最小の数が素数 { でない } 場合については, 3,4,5 である.

2 ° もっとも単純な *[置換] 分解は, ガウス氏の方法でなされる分解である. この分解は明らかなので, 方程式の群の現在の形式においてさえも, このテーマに長い間注意を向けても無駄である [意味がない].

*[ある方程式にその方程式の根が付加されるたびに, 方程式は可約になる.] ガウス氏の方法で単純化 *[réduit] されない方程式に対して, どのような分解が実行可能であるか？

私は, ガウス氏の方法で単純化できない方程式を原始的である (primitif) と名付けた. 実際に分解できない方程式のことは原始的とは呼ばない, なぜならべき根で解くことができるからである.

べき根で解ける原始的方程式の理論に対する補題と同じく, *[posé] 1830 年 6 月, フェリュサック誌 (le bulletin férussac) において数論の虚数についての分析を発表した.

p.177

この論文に次の定理の証明は同封されている *[2^e Mémoire] .

1 ° 原始的方程式がべき根で解けるためには, その方程式が p を素数として p^ν 次でなければならない.

2 ° 同様の方程式のすべての順列は, 以下のような形をしている.

$$x_{k,l,m,\cdots} \mid x_{ak+bl+cm+\cdots+f,a_1k+b_1l+c_1m+\cdots+g,\cdots},$$

*[Dans 2^e membre. f,g は付加]

$k, l, m, \cdots$ は ν の添数で, それぞれ p の値をとりつつ,

9a

すべての根を表す. これらの添数は法 p によって解釈されている. すなわち, 添字のうちの一つに p の倍数を添加したとき, 根は同じになるだろう.

すべての線形の置換を施すことで得られる群はすべて, $p^n(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^{n-1})$ 個の順列を含む.

この一般性において, この群に対応する方程式等がべき根によって可解であるだけではあまりに不十分である.

フェリュサック誌で私が指摘した, 方程式がべき根で解けるための条件は, あまりに限定されている. 例外は極めて少ないが, あるにはあるのだ. * [Je n'ai]

方程式の理論の最新の応用は, 楕円関数のモジュラー方程式に関するものだ.

周期を p^2-1 等分して得られる振幅の正弦を根としてもつ方程式の群は以下であることが知られている.

$$x_{k,l} \quad x_{\frac{ak+bl}{ck+dl}}$$

したがって, 対応するモジュラー方程式は群として

$$x_{\frac{k}{l}} \quad x_{\frac{ak+bl}{ck+dl}}$$

をもつだろう. 群の中で $\frac{k}{l}$ は, $-\infty, 0, 1, 2, \cdots, p-1$ の $p+1$ 個の値をとりうる. したがって, k が無限大になってもよいと認めれば, 簡単に

$$x_k \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

と書くことができ, a, b, c, d にすべての値を与えると, $(p+1)p(p-1)$ 個の順列を得る.

ところで, $ad-bc$ が p についての平方剰余であるとき, この群は 2 つの群に固有分解され, その群の置換は

$$x_k \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

である.

p.179

そのようにして単純化された群は, $(p+1)p\dfrac{p-1}{2}$ 個の順列である.

しかし, $\{p=2$ または $p=3$ でなければ$\}$, それはもはや固有分解し得ないことを理解するのは容易である.

そうすれば, どのような方程式を変形する方法によって,

9b

この群は常に同じ数の順列を持つのだろう.

さて, 次数を下げることができるかどうか知りたい.

はじめに, 次数を p より小さくすることはできない. なぜなら, p 次以下の方程式は, その群の順列の数の因数に p をもちえないからだ.

根 $\{x_k\}$ が k に無限大を含めたすべての値を与えることによって表され *[得られ] , かつその群が

$$x_k \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

を置換としてもつような $p+1$ 次方程式を見てみよう. ただし, $ad-bc$ は平方で, p 次まで下げることができる.

ところで, そのために群をそれぞれ $(p+1)\dfrac{p-1}{2}$ 個の順列の p 個の群に (もちろん improprement に) 分解しなければならない.

0 と ∞ の 2 文字は, これらの群のうちの 1 つと結合するものである. 0 と ∞ の位置 [順番] を変えない置換 *[m 文字の置換 / 順列] は

$$x_k \quad x_{m^2k}$$

の形であるだろう.

さて, もし M が 1 と結合する文字であれば, m^2 と結合する文字は m^2M であるだろう. *[$K(?)$ が 0 でも ∞ でもなく, かつ K が 1 と結合する文字であれば, m^2K と結合する文字は m^2, MK であるだろう.] だから, M が平方のとき, $M^2=1$ となるだろう. しかし, この単純化は $p=5$ に対してしか行われ得ない.

$p=7$ に対しては, $\infty, 1, 2, 4$ がそれぞれ結合する文字としてそれぞれ 0, 3, 6, 5 をもつとき, $(p+1)\frac{p-1}{2}$ 個の順列の群が見つかる.

その群は

$$x_k \quad x_{a\frac{k-b}{k-c}}$$

という形の置換を持つ. b は c と結合する文字であり, a は c とともに *[同時に] 剰余あるいは非剰余となる文字である [a と c の平方剰余/非剰余が一致するという意].

$p=11$ に対しては, 同様の置換が, ∞, 1, 3, 4, 5, 9 はそれぞれ 0, 2, 6, 8, 10, 7 の文字と結合するので, 同じ記号表記を伴って成立するであろう.

p.181

このように, $p=5,7,11$ の場合には, モジュラー方程式は p 次に下がる.

最も正確には, より高次の場合にはこの方程式の次数を減少させることは不可能である.

10a

第三論文は積分に関するものである *[Cf. 112 a] .

同じ一つの楕円関数の項たちの和は常に, ただ一つの項に代数的もしくは対数の量を加えたものに帰着することが知られている. 他の関数でこの性質が起こるようなものは存在しない.

しかし, { すべての代数関数の積分において, } 完全に類似した性質が, 先ほどの性質に置換される.

いま, 以下の性質をもつすべての積分が同時に取り扱われるのだが, その積分とは, その微分量はある変数と以下のある変数の無理関数から成るような関数である. 以下の無理関数とは, べき根そのものであってもなくてもよいし, また, べき根によって表現されてもされなくてもよいような関数を指す.

ある所与の無理関数に関わる最も一般的な積分の明確な周期の個数は, 常に偶数であることがわかる.

その数を $2n$ とせよ. 以下の定理が与えられる. :

それらの項の任意の和は, 代数的あるいは対数的量を加えた n 個の量に還元される.

第 1 種の関数は代数的な部分と対数的な部分を何も持たないような関数である.

n 個の区別される関数が存在する.

第 2 種の関数は, 補完的な部分が純粋に代数的な関数を指す.

n 個の区別される関数が存在する.

他の関数 { の微分量 } が無限大になるのは $\{x = a$ のとき } しかなく, 加えて, それらの補完的な部分は唯一の対数 $\log P(P$ を代数的数とする) に還元される, と仮定することができる.

(x, a) によってこれらの関数を指し示せば, 定理

$$\Pi(x,a) - \Pi(a,x) = \Sigma\phi a\psi x$$

が得られるが, この場合の ϕa と ψx は第 1 種関数と第 2 種関数とする.

そこから, x の同じ回転に関する $\Pi(x, a)$ と ψx の周期を $\Pi(a)$ と ψ と呼ぶのであれば,

$$\Pi(a) = \Sigma\psi \times \phi a$$

が導出される.

p.183

10b

したがって, 第 3 種関数の周期は, 常に第 1 種関数と第 2 種関数によって表される.

それによって同様に, *[有名な] ルジャンドルの定理　$E'F" - E"F' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$　*[伝統的な表現は　$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2}$] に類似した定理を推論することができる.

ヤコビ氏の最も素晴らしい発見である, 第 3 種関数の定積分への還元は, 楕円関数の場合を除いて実行不可能である.

積分関数に整数 *[素数] をかけることは, 加法のように, 以下の n 次方程式によって常に可能である. 以下の n 次方程式とは, 解が, 還元された項を得るために積分に代入する値であるような n 次方程式を指す.

周期の p 等分を与える方程式は, $(p^{2n} - 1)$ 次である *[$(p^{2n} - 1)(p^{2n} \cdots)$] . その群は全部で $(p^{2n} - 1)(p^{2n} - p) \cdots (p^{2n} - p^{2n-1})$ 個の順列をもつ.

n 個の項の和の p 等分を与える方程式は, p^{2n} 次である. それはべき根によって可解である.

変換について *[120 b と a の一節：変換のために　と関連がある]

第一に, アーベルが彼の最後の論文に記録した推論 [ceux] に類似した以下の推論を証明することができる. すなわち, { もし } 積分量の間の同じ関係において, 2 つの関数 $\int\phi(x,X)dx, \int\psi(y,Y)dy$ について, 最後の積分量が $2n$ の周期を持っているならば, y と Y はただ一つの n 次方程式により, x と X の関数として表されると推測することが可能であろう.

したがって, 常に 2 つの積分量の間でのみ変換が起こると仮定することができる. なぜなら, y と Y の任意の有理関数をとると, 明らかに $\sum\int(y,Y)dy = \int F(x,X)dx$ であるからである. *[エヴァリスト・ガロアははじめこのように書いた: $\sum\int f(y,Y)dy = \int F(x,X)dx+$(ある代数的・対数的量)]

どちらの辺の積分量もともに同じ周期をもたない場合には, この方程式に対して明らかな還元が存在するようだ.

したがって, ともに同じ周期をもつ積分量を比較しなければならない.

p.185

{ 二つの } 類似した積分量の無理性の最小次数は, 一方の積分にとってよりももう片方の積分にとっての方がより大きくなりえることはありえない, ということが証明されるだろう.

11a

つづいて以下のことが理解されるだろう. すなわち, つねに所与の積分量を他の積分量に変換することができ, その他の積分量とは, その中において第一種関数の周期は素数 p によって分割され, 残る $2n-1$ 個の周期はそのまま残されているとする.

したがって, 以下のことを比較することが残されるだろう. すなわち, 双方の周期が同一となるような積分量であり, またその結果, 片方の積分量の n 個の項がただ一つの { 他の }n 次の方程式以外では表現されず, また他方の積分量の項 [ceux] によっても表現されず, これは双方の積分を入れ替えても同様である. ここから先はわれわれには何も分かっていない.

親愛なるオーギュスト, 君は, これらのテーマは私が探究したことだけではないことを知っている. 私の主要な黙考はしばらく前から, 曖昧さの理論の超越的な解析への応用に向けられていた. 超越的な量や関数の間の関係において, どのような交換が可能であったか, どのような量を, その関係が成り立たなくなり得ないように所与の量に置き換えることができたかが先験的にわかるようにすることが必要である. それは, 探すことができたという多くの表現の不可能性をすぐに認識させる. しかし, 私には時間がなく, 私のアイディアはこの広大な分野ではまだ十分に展開されていない.

この手紙を『百科全書批評』に掲載してくれないか.

私は { 私の生涯において, } しばしば思い切って, 自信のない定理を提唱してきた. しかし, 私がここで書いたもののすべては, 頭の中では間もなく 1 年が経とうとしているものである. 加えて, 私が完全な証明を与えていない定理を発表したというかどで, 私が人々に疑いをかけられ, 私が誤っているとされないように, 私自身の注意関心を過剰においている.

ヤコービ, あるいはガウスに, 定理の正しさについてではなくその重要性について意見をくれるように公に頼んでくれないか.

このすべての混乱 [雑然とした記述 (高瀬訳)] を解読することに彼らの利益を見出すような人々が, その後に現れるであろうことを望んでいる.

心より愛情を込めて.

E. ガロア

1832 年 5 月 29 日