超幾何級数・小史

大山 陽介[1]

1 初めに

「超幾何級数」と普通に使われているが，多くの数学書には「超幾何」の定義が書かれておらず，Gauss や Kummer，Appell などの超幾何函数が個別に定義されていることが普通である。ここでは超幾何級数とは何かという問いに歴史的な視点から答えることにする。本稿ではほぼ一変数のみを扱う。現代的には，古典的な超幾何級数，q-超幾何級数，楕円超幾何級数を並列して理解するのが自然であろうし，特に Heine の q-超幾何級数（basic hypergeometric series）は古典の範囲であるが，本稿ではほとんど触れない。

いわゆる**超幾何級数**という時には

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n $$

を指すことが多いであろう。ここで

$$ (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} $$

は**昇り階乗積**と呼ばれる。

また，**超幾何方程式**

$$ z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\,\frac{dw}{dz} - ab\,w = 0. $$

も合わせて考察される。

なお，引用文献では欧州系の論文の多くは European Digital Mathematics Library `https://eudml.org` をリンクで使っており，大半の論文は無料で読める。

---

[1]徳島大学・理工学部. e-mail: ohyama@tokushima-u.ac.jp.
本稿は 2023 年 10 月 14 日・第 33 回数学史シンポジウムでの講演をもとにしたものである。本研究は科研費 22K18676 によって部分的に支援されている。

2 hypergeometric とは

数学の文脈で最初に "hypergeometric" という用語を用いたのはおそらく John Wallis（1616–1703）で 1685 年である [58, p.316]。ここで，Wallis は geometric series を超える級数 $1, 2, 6, 24, 120, ...$ を hypergeometrical と呼んでいる。

Wallis の著作で最もよく知られているものは "Arithmetica Infinitorum" [57] (1656) であろう。この本の中で Wallis 積

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \cdots$$

を考察している。さらに，その途中で

$$\int_0^1 (x - x^2)^n \, dx = \frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

が n の数列として

$$\left\{ 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}, \frac{1}{2772}, ... \right\}$$

となることを示している。$n = \dfrac{1}{2}$ の時に円の面積になるが，一般化された二項展開は Newton を待つことになる。ベータ函数の特別な場合でもあり，超幾何函数的なものが Newton 以前から意識されていたと思われる。

超幾何級数の様々な変換公式において二項定理が証明の基礎になっていることが多く，一般化された二項展開と超幾何級数とは切り離せない存在であるとも言えるが，Wallis の時点ではまだ今でいう超幾何級数を考察できるほど解析学が進んでなかったと思われる。

現在でいう ${}_2F_1$ を hypergeometric と呼んだのは Gauss の師である Johann Friedrich Pfaff（1765–1825）である [42]。Pfaff はこの論文で超幾何方程式の解の性質や積分表示などを調べており，Euler と Gauss をつなぐ役割を果たした。

Pfaff は同年にも超幾何級数に対する Pfaff 変換などを示した [43]

$$(1-x)^{-a} {}_2F_1(a, b; c; -\frac{x}{1-x}) = {}_2F_1(a, c-b; c; x).$$

3　Wallis から Riemann まで

それでは用語ではなく，数学的な対象としての超幾何級数の発見について述べていく。超幾何級数以前から知られている二項展開，対数函数，指数函数，逆三角函数なども超幾何級数として表示される：

$$
\begin{aligned}
(1+z)^n &= {}_1F_0(-n,-;-z), \\
\log(1+z) &= z\,{}_2F_1(1,1,2,-z), \\
e^z &= {}_0F_0(-,-,z) \\
\sin^{-1} z &= z\,{}_2F_1\left(1/2,1/2;3/2;z^2\right) \\
\tan^{-1} z &= z\,{}_2F_1\left(1/2,1;3/2;-z^2\right)
\end{aligned}
$$

こうした特殊な級数を除くと，最初に歴史上に表れたのは Bessel 函数の特別な場合ではないかと思われる。微積分が発見されてすぐに微分方程式の求積が研究された。その中で，今で言う Riccati 方程式の一つ $y' = y^2 + x^2$ をどう解くかという問題が生まれた。Riccati 方程式は一般には初等函数では解けない微分方程式であり，18 世紀初頭の時点では初等函数を超えた新しい函数が必要であった。1703 年 10 月 3 日に，Jakob Bernoulli（1655–1705）から Gottfried Wilhelm Leibniz（1646–November 1716）に宛てた手紙 Jac. Bernoulll an Leibniz (Oct. 3, 1703) [39, p.75] の中で，Bernoulli は今の言葉で言えば Bessel 函数 $J_{1/4}$ を用いて Riccati 方程式 $y' = y^2 + x^2$ の解が得られることを示している。

なお，のちに Riccati 微分方程式を研究してその名の元になったのは Jacopo Riccati (1676–1754)。その息子 Vincenzo Riccati（1707–75）も数学者で，双曲線函数を Johann Heinrich Lambert（1728–1777）に先んじて発見した。日本の工学系，特に日本機械学会の論文ではいまだに Riccati を「リカッチ」と書いているが藤原松三郎「常微分方程式論」[22] の最初の方に書かれたミスプリをいまだに継承している。藤原は誤植として同じ本の中で訂正しているが，最初の方しか読んでなかったのであろう。

3.1　Leonhard Euler

超幾何級数にとどまらず解析学において欠かすことのできない存在が Leonhard Euler（1707–1783）である。長らく未完であった Euler 全集 Opera omnia （紙版）は 2022 年に完結し，さらに The Euler Archive http://eulerarchive.maa.org/ でも読むことができる。以下，Euler の論文を表す時には，1910 年，1913 年に Euler の論文を整理した Gustav Eneström（1852–1923）による Eneström Index を使う。

Euler が超幾何級数を研究しようとしたモチベーションは著者にはよくわからないが，楕円積分やガンマ函数，ベータ函数などの研究があってのことだろうと思われる。超幾何積分と微分方程式を見出したのは E366 (1769) [17, p.289] であるが，この時点では現代の表記とまだ一致しない。現代的な形式に整理したのが E710 (1778) [19, p.58, p.60] である。ただし出版年は 1801 年であり，Pfaff の研究が出版されたのは Euler の論文の少し前ではあるが，Euler の方がより現代的な式になっている。

19 世紀以降の文献でも「Euler の超幾何級数」と書いているものも少なからずあるが，現代ではいつしか Euler の貢献が抜けているのは残念なことである。

3.2 Gauss, Kummer, Riemann

さて，Euler の研究が Pfaff に引き継がれて，Hypergeometric series と呼ばれるようになった。その Pfaff の弟子である Carl Friedrich Gauss（1777–1855）が超幾何級数に関して大きな貢献をしたことは言うまでもない。

Gauss は 1812 年の論文 [23, 24] において，超幾何函数の近接関係・連分数展開・接続公式を示した。微分方程式，級数展開，積分表示などは Euler によって得られていたが，Gauss の結果によってより深まったと言える。なお，この頃の論文ではタイトルの中に超幾何級数の最初の何項かを書いてるものが少なからずあり，引用文献ではタイトルのその部分を ... で表しているがお許しいただきたい。

Gauss に頼って学位を取得した一人が Friedrich Bessel（1784–1846）であり，その孫弟子が Ernst Kummer（1810–1893）である。師弟列 Gauss → Bessel （→ Heinrich Scherk）→ Kummer と超幾何方程式系の退化系列 Gauss → Kummer → Bessel とは順序が入れ替わっている。1836 年の Kummer の論文 [36] によって，超幾何方程式の 24 の解や，Euler, Pfaff らによってそれまで知られていた種々の変換公式がまとめられ，それ以前の論文に比べてもはるかに読みやすいものになっている。また，[36] の第二部では後述する合流超幾何函数も扱われている。

次第に超幾何微分方程式の研究が進んでくるが，Gauss や Kummer の次に大きな展開を見せたのが Bernhard Riemann（1826–1866）の 1857 年の論文であろう [46]。この論文では，今でいう Riemann の P-函数やモノドロミが考察されており，超幾何級数の間の関係を個別に調べるという従前の研究を推し進めて，微分方程式の構造を調べるという現代的と言ってよい研究が行われている。

なお，Heinrich Martin Weber（1842–1913）が編集した Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke の初版 (1876) は 526 頁，第二版 (1892) は 558 頁と増量。その後，1902 年に M. Noether と W. Wirtinger が 116 頁の補遺版を編集している。第二版＋補遺版を合本した版は，例えば `https://archive.org/details/bernhardriemann01riemgoog/` で読める。

この後，Hermann Amandus Schwarz（1843–1921）の代数解の研究，超幾何微分方程式を含む一般の確定特異点を持つ方程式を研究した Lazarus Fuchs（1833–1902），H. A. Schwarz の研究を引き継いだ Felix Klein（1849–1925）による正二十面体と 5 次方程式の研究，モジュラー函数との関係など，19 世紀後半の花形となっていくが，19 世紀の解析学史になりかねないので踏み込まないでおく。

4 Confluent hypergeometric function

超幾何級数というときに，最も狭い意味では ${}_2F_1$ を指すかもしれないが，合流型や一般化された超幾何級数も含めて考えるのが普通であろう。本節では，合流型超幾何級数だけでなく，Besel 函数，Weber 函数，Airy 函数などについて述べる。

confluent hypergeometric という用語の初出はおそらく Whittaker-Watson の第二版（1915）である [61][2]。なお，Whittaker-Watson と通常呼ばれるが，“A Course of Modern Analysis” の初版（1902）は Edmund Taylor Whittaker（1873–1956）の単著であり，confluent hypergeometric の章は無い。この初版 XI 章 ‘Hypergeometric Functions’ の演習問題 6 番で合流型超幾何微分方程式を導出している。実は，1903 年に Whittaker

[2] 以前にお茶の水大の真島秀行氏より教わった。筆者も調べてみたが多分間違ってないと思われる。ドイツ語だと ”zusammen” という言葉が使われたりする。

は合流型超幾何微分方程式の Whittaker 形式を導入しており [60]

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right\} W = 0$$

Whittaker-Watson の第二版以降では主にこの Whittaker 方程式やその解である Whittaker 函数 $M_{k,m}, W_{k,m}$ の形で合流型超幾何を扱っている。

Whittaker-Watson は第二版で George Neville Watson（1886–1965）が共著者として加わり，今の形に近づいた。その後，第三版 1920[3], 第四版 1927 と改訂されたが，第三版と第四版はページ数が変わっておらず，マイナーな修正に止まっている。第四版でいったん固定されたようだが，晩年，Whittaker は改訂を考えていたようだ。結局 1956 年に彼が亡くなって改訂が立ち消えになったことは，結果としては良かったのではないかと思っている。

2021 年に Victor H. Moll が編者となって第五版が出版された。紙型が大きく変わりフォントも現代的になったが本文はほぼ第四版と同じである。

4.1 合流型超幾何微分方程式

日本語で「合流型超幾何」と訳したのは永宮健夫（1910–2006）の「微分方程式論」（河出書房, 1941）で，脚注に “Confluent hypergeometric differential equation の譯（差し當りかう譯して置く)” と書かれている。その事情については，戦後に書き直した「応用微分方程式論」（共立出版, 1967）にも以下のような記載がある：

> ... しかし, 昭和 16 年の当時，私が勉強していた，いくつかの国内国外の数学者の著述の中には，Bessel 方程式, Laguerre 方程式, Hermite 方程式のような最もよく物理学に現われてくる微分方程式が, すべて confluent hypergeometric equation（合流型超幾何微分方程式と私が訳した）から導かれることを述べたものは一つもなく， またそれらの解の積分表現や漸近展開を統一的に述べたものもなかった。

永宮「微分方程式論」は昭和 16 年という時代に書かれた本としては世界的に見ても特殊函数のすぐれた教科書である。「特殊函数」をタイトル

[3]この第三版から Mathieu functions の章末の参考文献に唯一の日本人・愛知敬一（1880–1923）の論文 [1] があがっている。

に掲げた著作として，筆者が知る限り最も古い本は永宮の 2 年後になる Magnus-Oberhettinger (1943) である [40]。ただ，超幾何函数を統一的に見ようという試みは古くからあり，例えば1894年に F. Klein [34] が合流操作で， M. Bôcher [12] がラプラシアンの直交座標による分解で様々な特殊函数が得られることを示している。

ちなみに，Maxime Bôcher（1867–1918）は Göttingen の F. Klein の元で学んでおり，[12] にも Klein が序文を寄せている。Bôcher はのちに Transactions of the American Mathematical Society 誌の初代編集長を務めた。どうも，Bôcher が Trans. AMS 第 1 号に書いた論文が “regular singular point” という英語の初出のようである [13]。元々は L. Fuchs が “Singuläre Stelle der Bestimmtheit” と呼んだものが，のちに（おそらくは藤原松三郎 [22] によって）「確定特異点」とドイツ語から訳された用語である。“regular singular point” というのは英語として収まりが悪いように思うのだが，Bôcher がどういう意図だったかよくわからない。‘Bestimmtheit’ を英語に訳しにくかったのだろうとは思う。

ドイツ人に聞くと，今でも教科書にはSinguläre Stelle der Bestimmtheit という用語は使われているが，やや古い表現と感じられているようで，英語で書く時にはもちろん “regular singular point” である。「確定特異点」というのはその意味を良く表した訳語であり，日本人がこの言葉で学ぶことができるのは先人のおかげである。

4.2 Kummer’s hypergeometric function

通常，合流型超幾何函数は Kummer’s hypergeometric function と呼ばれるが，前述のように [36] の第二部や翌年の [37] で導入されたためである。

しかし， Euler の E366 (1769) [19, p.240] にはすでに合流超幾何の積分表示や微分方程式が書かれている。ガンマ函数やベータ函数を発見した Euler にすれば，超幾何積分からの退化で合流型超幾何函数を見出すことは容易であったであろう。次節でも述べるように，Euler は Bessel 函数も発見しており，${}_2F_1, {}_1F_1, {}_0F_1$ の系列は Euler が全て最初に見出している。残念ながら多くの教科書で，合流型超幾何函数や Bessel 函数について Euler にまで言及しているものが少ない。

4.3 Bessel 函数

Bessel 函数（円筒函数）については Watson によって 1922 年に書かれたテキスト [56] の完成度があまりに高い。網羅的に書かれていながらもよく整理されており，特殊函数の教科書として類書に並び立つものがないと言っても過言ではない。これ以降の Bessel 函数に関する種々の著作は，全てが Watson に依存していると思われる。歴史的なことも第 1 章にまとめられており，Euler の先駆的な研究を含めて特に付け加えることがないくらいである。

なお，1944 年に第二版が出ているが，誤植の修正程度でほとんど変わってない。Watson 本人も第二版ではその後の発展を取り入れたかったと述べているが，彼の後半生の興味は Ramanujan の仕事の理解が多くを占めていたと思われる。

先述したように Jakob Bernoulli が特別な場合に見出している。任意の整数については Euler E302 (1762) [18] で取り扱われている。Bessel 函数 J_ν に関しては，初期の研究の多くでは ν が整数値の場合が扱われている。

天文学者であった Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) 本人の研究は 1816-17 である [11]。Bessel は楕円運動をする天体の離心近点離角をフーリエ級数に展開した時のフーリエ係数を離心率の函数として表そうとして，その定積分から Bessel 函数を見出している。フーリエ級数と対応するために自然に ν が整数値の場合だけになる。

Bessel 函数については，記号や ν を連続にするなどはのちの Eugen von Lommel（1837–1899）によるところも大きい。

4.4 Airy 函数

Airy 函数を発見したのは，こちらもグリニッジ天文台の George Biddell Airy (1801–1892) である [2]。1838 年に Airy は余剰虹と呼ばれる，虹の赤い方に見られる筋のような現象が干渉縞としてどのように得られるかを考察して，Airy 積分

$$U(m) = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2}(w^3 - mw)\, dw$$

を見出した。その 10 年後の 1848 年に Airy 積分 $U(m)$ を m に関してマクローリン展開することを Augustus de Morgan（1806–1871）に教えてもらって，$|m| \leq 4$ までの数値計算を行った [3]。

こうした数値計算は，19 世紀前半の時代は膨大な時間を要したと思われる。Gauss はこうした計算を嬉々として自分で行なったようだが，Airy は計算助手に計算させたようだ。ある程度，計算助手に自由に研究をさせた天文学者もいる一方で，Airy は自分の必要な計算を助手にやらせた。批判もあったようだが，Airy の尽力で地球の緯度・経度などの計算を精密に行なったことで，1884 年に開かれた世界子午線会議において世界の本初子午線は，パリと争ったグリニッジ天文台を通ることになった。

続いて Airy「方程式」を発見したのが Sir George Gabriel Stokes (1819–1903) である [49]。実は Airy は Airy 積分を導出したが微分方程式は導出していない。部分積分によって $U(m)$ は

$$\frac{dU^2}{d^2m} + \frac{m}{12}\pi^2 U = 0$$

がわかり，Airy 方程式と係数の定数倍を除いて同じものである。Stokes はこの Airy 方程式の無限遠での漸近展開が発散級数になること，さらに複素領域における不連続性，すなわち今でいう Stokes 現象を発見した。

4.41[4] Stokes 現象

Stokes 現象を発見した直後と思われる 1857 年 3 月 19 日の妻宛の手紙 [50] には

> When the cat's away the mice may play. You are the cat and I am the poor little mouse. I have been doing what I guess you won't let me do when we are married, sitting up till 3 o'clock in the morning fighting hard against a mathematical difficulty. Some years ago I attacked an integral of Airy's, and after a severe trial reduced it to a readily calculable form. But there was one difficulty about it which, though I tried till I almost made myself ill, I could not get over, and at last I had to give it up and profess myself unable to master it". I took it up again a few days ago, and after a two or three days' fight,

[4] **4.41** のような段落の Decimal System は Whittaker-Watson の三版が最初らしい。版を重ねた時に小節を追加するには十進表記は便利である。

the last of which I sat up till 3 , I at last mastered it. I don't say you won't let me work at such things, but you will keep me to more regular hours. A little out of the way now and then does not signify, but there should not be too much of it. It is not the mere sitting up but the hard thinking combined with it.......

Pembroke College, Camiridige,
March 28, 1857.

と書かれており，Stokes の興奮が伝わってくる。

ちなみに G. G. Stokes の妻 Mary Susanna Stokes は 4 カップ風速計の発明者でもある天文学者 Thomas Romney Robinson の娘である。

4.5 Weber 函数

Weber 函数（放物柱函数）は 物理学者 Heinrich Friedrich Weber (1843–1912) によって，ラプラシアンの放物線座標による分解として得られた [59]。Hermite 多項式を特殊な場合として含むため，Hermite-Weber 函数とも言われる。方程式の書き方は色々あるが，現代的な一つの標準形は

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \left(\frac{1}{4}z^2 + a\right)y = 0$$

である。この論文が出版されたのは Math. Ann. 誌の記念すべき第 1 巻第 1 ページである。Airy 函数と同じく，特異点が無限遠にしかない（無限遠の近くでは合流超幾何函数として表示される）ためか，Euler も発見できなかったようだ。

この Heinrich Friedrich Weber は先述の Riemann 全集の編者であり，“Lehrbuch der Algebra” 3 巻本の著書でもある数学者 Heinrich Martin Weber とは別人である。Albert Einstein の大学生時代の師であり，Einstein が「教えてる内容が古臭い」と滅多に口にしない批判を行った人物の一人が H. F. Weber である。Einstein は「良いことしか書かないので彼の推薦書には意味がない」とまで言われていた。

5　一般超幾何函数

一般超幾何函数は歴史的にも順を追って発見されたので，誰が最初かを述べるのは難しい。おそらく最初に ${}_3F_2$ を扱ったのは Thomas Clausen（1801–1885）であろう [15]。1828 年に彼は特別な場合に ${}_2F_1$ の二乗が ${}_3F_2$ になることを示した

$$ {}_2F_1(a,b;a+b+1/2;x)^2 = {}_3F_2(2a,a+b,2b;a+b+1/2,2a+2b;x). $$

現代では **Clausen の公式**と呼ばれる。ただ，この後に ${}_3F_2$ の研究が続くのには 1870 年に Johannes Thomae（1840–1921）が ${}_3F_2$ の接続公式を示すまで待たなければいけない [52]。証明は 3 階の場合に書かれているが，n 階の場合の接続公式も論文の中で示されており，Thomae は高階の場合を ‘höhern hypergeometrischen Reihen’ と呼んでいる [52, p.433]。

Thomae は Clausen と異なり一般的な場合を扱っており，一般超幾何級数を最初に扱った論文と考えていいだろう。ほぼ同時期に，Thomae は q-超幾何方程式の接続公式も導いている [51, 53]。[51] では 2 階の Heine の場合，[53] では q-超幾何の一般の場合である。

この Carl Johannes Thomae (1840-1921) は “popcorn 函数” などと呼ばれる，有理数で不連続だが Riemann 積分可能な函数のを構成した [54] ことでも知られる：

$$ T(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/n & x = m/n \in \mathbb{Q} \quad \text{(coprime)}, \\ 1 & x = 0. \end{cases} $$

また，Frank Hilton Jackson（1870,–1960）の q-積分も先駆けて [51, p.265] で導入している。

Thomae が接続公式を求めても，一般超幾何級数の研究が進んだわけではない。ほぼ同時期の 1870 年に Leo Pochhammer（1841–1920） は後述するように今でいう Jordan-Pochhammer 方程式を発見している [44]。また，1880 年になると Paul Appell（1855-1930）が二変数超幾何函数を発見する [4] など，超幾何級数の一般化の研究はいろんな方向に進み始めている。

高次まで込めて最初に今の意味での “Generalised hypergeometric” という英語を用いたのは Andrew Russell Forsyth（1858–1942）で 1883 年

である[5]。Forsyth は第 53 回 British Association for the Advancement of Science において 'On a generalised hypergeometric series' という報告を行った [20]：

> The object of the communication was to deduce for the series
>
> $$1+\frac{\alpha\beta\theta}{\gamma\epsilon}x+\frac{\alpha\cdot\alpha+1\cdot\beta\cdot\beta+1\cdot\theta\cdot\theta+1}{1.2\cdot\gamma\cdot\gamma+1\cdot\epsilon\cdot\epsilon+1}x^2+\dots$$
>
> the relations corresponding to those which hold for Gauss's series as they occur in the memoirs of Gauss ('Ges. Werke,' bd. iii.) and Kummer ('Crelle,' t. xv.)

この報告は以上で全てだが，同年に Quart. J. Math. に詳細な結果を発表している [21]。ただし，こちらの論文では一般の n-階の場合まで扱っており，'higher hypergeometric series' と呼んでいる。Forsyth [21] は，一般超幾何函数が満たす微分方程式や近接関係式なども考察しており，今日でいう一般超幾何函数 ${}_nF_{n-1}$ を最初に詳しく扱った論文の一つと言っても良いであろう。Forsyth は合流について特に扱ってないようだが，高階 Bessel 函数は扱っている。

同年に Édouard Goursat（1858–1936）も "fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur" について論文を著している [26]. 英仏で独立して一般超幾何微分方程式が同時期に発見されたことになる。Goursat は合流についても論文の第一部の最後でコメントしている。

少し遅れて，ドイツでは 1888 年に L. Pochhammer が 'allgemeineren hypergeometrischen Reihe' と呼んでいる [45]。allgemeineren は generalized と近い意味であり，Pochhammer も一般超幾何方程式のパイオニアの一人と言って良いだろう。特に Pochhammer は F 記号

$$F(\alpha,\beta,\gamma;\rho,\sigma;x)$$

を導入した。これは，もともと Gauss が $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ と使っていたものを一般化したのであろう。

現代のドイツでは一般超幾何函数は 'Verallgemeinerten hypergeometrische Funktion' と呼ばれるようである。なお，Pochhammer 自身も 'allgemeineren

[5] 講演の時に Forsyth の論文を見ておらず間違ったことを言ってしまったので，ここで修正する。

hypergeometrischen Reihe' という用語を，今でいう ${}_nF_{n-1}$ に限って使っていたわけではなく，1870 年には Jordan-Pochhammer 函数

$$\int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

の意味で使っている [44]。

結局，初期においては超幾何級数 ${}_2F_1$ を一般化したような種々の函数に対して「一般化」という言葉を用いたが，その後の淘汰の中で ${}_pF_q$ のみが各国の言葉で一般超幾何級数と呼ばれるようになった。

5.1 そのほかの一般超幾何函数

Forsyth の研究は，その後の論文で英国でもあまり引用されなかった。その後 “Generalized hypergeometric function” という用語を用いたのは Whittaker (1903) である [60]。Whittaker は Kummer の合流超幾何方程式の 1 階の項を消した表示 Whittaker equation で使ってしまった

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{z}-\frac{4\mu^2-1}{4z^2}\right)w=0.$$

発表されたのは，米国の Bull. A.M.S である。

続く 1905 年に， F. H. Jackson が q-超幾何函数のことを Generalized hypergeometric と呼んでいる [32]。これも発表されたのは米国の Amer. J. Math. である。以上二つは，Jordan-Pochhammer の時と同様に，超幾何函数を何らかの意味で一般化した級数のことを ‘generalized’ と言ってるだけなので今とは意味が違うのは当然ではある。

英国の研究で今の意味で用いられたものは 1906 年の Ernest Barnes（1874–1953）を待つことになる [9] が，ここでは ‘generalised hypergeometric’ となっている。発表されたのは，英国の雑誌 Phil. Trans. Royal Soc. である。[6]。Barnes [9] は Pochhammer の F-記号に添字をつけた ${}_pF_q$ を導入した。ここでは，一般型合流超幾何方程式の接続公式を求めているが，この時代はまだ Stokes 現象に関する理解が十分ではないと思われ，一

[6] どうでも良い注釈。‘generalized’ は米語に多く，‘generalised’ は英語に多い。上の 3 つの論文もイギリス人が著者だが，発表された雑誌は英米の別になっている。

般型合流超幾何方程式の Stokes 係数については，その後の Cornelis Simon Meijer（1904–1974）の G-函数の登場 [41] で理解しやすくなったと思う。

なお，Ernest Barnes は 1909 年にロンドン司教から助祭に任命されており，彼の 29 本の数学の論文（正確には短い Proceeding をもう 2 本書いているが，同タイトルの長い論文がある）は 1910 年までに出版されている。1924 年 9 月 29 日にはバーミンガムの司教になっており 1953 年 4 月まで 30 年近く務めた。

Barnes 以降しばらくは，generalized/generalised は併用されていった。影響力が大きかったと思われる，1922 年の Watson の Bessel 函数のテキスト [56] では generalised である。しかしながら，この後 1920 年になると generalized が優勢になり，Wilfrid Norman Bailey（1893–1961）による超幾何級数のテキスト [8] が出版された頃には generalized hypergeometric が主流になったようだ。

Generalized Hypergeometric Functions のテキストとして今も出版されているのが，Lucy Joan Slater (1922 - 2008) の 1966 年の教科書である [47]。なお，Slater 自身の超幾何に関する研究は 1950 年代の 10 年間に集中しており，この本を出版して以降，彼女は情報関係などに移った。

晩年は Dalton Genealogical Society (DGS) に所属して，Cambridge の墓地の系図などを調べた。彼女の写真をたまたま DGS のサイトで見つけて，連絡をとって講演などでは彼女の写真を使わせていただくことになった。DGS のサイトには Lucy Slater の写真があるので探して欲しい。

5.2 いわゆる Pochhammer symbol（昇り階乗積）

超幾何級数を表すのに便利な記号

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

は多くの文献で **Pochhammer の記号**と呼ばれる。[45] では

$$(q)_m = \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-m+1)}{1.2.3\dots m}, \qquad (q)_0 = 1$$
$$[q]_m = q(q-1)(q-2)\dots(q-m+1), \qquad [q]_0 = 1$$
$$[q]^+_{mt} = q(q+1)(q+2)\dots(q+m-1), \qquad [q]^+_0 = 1$$

という記号を導入し，一般超幾何級数を

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{[\alpha_1]_m^+ [\alpha_2]_n^+ \dots [\alpha_n]_m^+}{[1]_m^+ [\rho_1]_m^+ \dots [\varrho_{n-1}]_m^+} x^m$$

で表している。Pochhammer 自身は，1870 年の [44] でも $(q)_m$ を二項係数の意味でも用いており，上記の記号をその後も使い続けたようだ。また，Pochhammer symbol という用語自体も 1940 年くらいまで使われていないように思われる。そのため，$(a)_n$ を Pochhammer symbol と呼ぶのは歴史的には誤りで，昇り階乗積 (shifted factorial とかに変えて，人名をつけない方がいいという提案は，昔から Richard Askey 周辺や Donald Knuth らによって行われていた [35]。

なお，Barnes は彼の論文の中では常にガンマ函数の比で表しており，上記のような記号は用いてない。それでは，$(a)_n$ を今の階乗積の意味で使ったのは誰か?という疑問が生じる[7]。Watson のベッセル函数の本 [56, p.100] には，先述のように F-記法が Pochhammer，p, q の下添え字が Barnes によると書かれているが，記号 $(a)_n$ が誰によるかわからない。丁寧に文献を引用する Watson が何も言わないのはおかしいのだが，[56] の前年に書かれた [55] には

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$$

を用いてるので，少なくとも英国の文献では Watson が 1921 年に用いた論文が初出のようである。

なお，Appell [4] は二変数超幾何級数を表すのに

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+j-1)$$

という記号を用いており，その後も多変数超幾何の論文では定着した。Appell の方は初出が 1880 年とはっきりしているのに，(λ, k) を「Appell の記号」と呼ぶ人がいないのはかわいそうかもしれない。

Paul Appell の息子 Pierre Appell（1887–1957）は Paul Painlevé（1863–1933）の姪と結婚した。Pierre は海軍士官から政治家になったが，海軍時代は潜水艦 Monge の副艦長だった。また，Paul Appell の奥さんは Joseph Bertrand（1822–1900）の姪であり，Appell の女婿が測度論や発散級数で知られる Émile Borel（1871–1956）である。

[7]講演後に渋川元樹氏（神戸大学）から質問された。渋川氏からは一松信「特殊関数入門」（森北出版, 1999）p.41 には「バルネスの記号」と書かれているとご教授いただいたが，これは一松信氏の間違いであろう。

6　その他の超幾何級数

先述のように1880年にはAppell [4] が二変数超幾何級数を発見している。４種類ある Appell の超幾何級数は，二つの一変数長幾何級数の積

$$ {}_2F_1(a,b;c;x){}_2F_1(a',b';c';y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a;n)(a';m)(b;n)(b';m)}{(c;n)(c';m)(1,n)(1,m)} x^n y^m $$

において，$a+a'$, $c+c'$ をまとめたものが F_1:

$$ F_1(a,b,b',c,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a;n+m)(b;n)(b';n)}{(c;n+m)(1,n)(1,m)} x^n y^m $$

同様に $a+a'$ だけをまとめたものが F_2, $c+c'$ をまとめたのが F_3, $a+a'$ と $b+b'$ をまとめたものが F_4 である。

さらに1893年にはGiuseppe Lauricella（1867–1913）が三変数以上に拡張した [38] 。また，1920年にPierre Humbert（1891-1953）はAppell超幾何の合流型を最初に考察した [30]。P. Humbert の父 Marie Georges Humbert（1859–1921) もまた代数幾何などを研究した数学者として知られる。さらに1931年にJakob Horn（1867–1946）が詳細なリストを作った [29] が間違いがあり，Ludwig Borngässer（1907–1994) が1933年に学位論文で修正した [14]。BorngässerはHornの指導のもとで学位をとってすぐ図書館司書となり，ドイツの図書館委員会などの要職を長年勤めたそうである。

多変数超幾何函数については[10, vol. 1] を参照されたい。vol. 1, p.224にHorn-Borngässerのリストがまとめられている。Bateman Manuscript Projectはカリフォルニア工科大学が権利を買い取ったので，現在では自由にダウンロードできる。

7　超幾何級数とは何か

一変数の場合，ThomaeやForsyth, Pochhammer Appell-Lauricellaの超幾何やHorn-Borngässerの合流型はいわば ${}_2F_1$ やその合流型の多変数化である。Joseph Kampé de Fériet (1893–1982) は，超幾何級数とは何かという疑問に立ち返って一般化された二変数超幾何，すなわち，一般

超幾何級数 ${}_pF_q$ の多変数化を考察した [33]。二変数の冪級数

$$F(x,y) = \sum_{m,n} a_{n,n} x^m y^n$$

の係数が

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{P(m,n)}{R(m,n)}, \quad \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{Q(m,n)}{S(m,n)},$$

という関係を満たすとする。ここで，P, Q, R, S は m, n の多項式である。さらに整合性条件

$$\frac{P(m,n+1)}{R(m,n+1)} \frac{Q(m,n)}{S(m,n)} - \frac{P(m,n)}{R(m,n)} \frac{Q(m+1,n)}{S(m+1,n)} = 0$$

を満たすときに超幾何級数になると考えたのである。Kampé de Fériet は一般化された二変数超幾何級数が満たす微分方程式や積分表示を発見した。詳細は [6] の IX 章を参照されたい。また，Appell によって書かれた [5] も簡便である。

Kampé de Fériet はリール大学教授を 1919〜69 の 50 年間務め，流体力学の研究でも知られる。リール大学数学教室のセミナー室の一つは Salle de Kampé de Fériet と名付けられている。

同様の考え方は，Eduard Heine（1821–1881, Heine-Borel の被覆定理でも知られる）によって始められた q-超幾何級数 [27, 28] や楕円超幾何級数 [48] でも同様であり，q-超幾何級数の場合は係数の比が三角函数，楕円超幾何の場合は係数の比が楕円函数になり,「超幾何とは何か」という問いに対する答えがより明確になったと思われる。

8　終わりに

多変数の場合は端折りすぎたので，もし続きを書ける機会があればまとめたい。Heine の q-超幾何級数も古典解析の範疇なので触れるべきだったが，それだけでかなり長くなるので省略した。楕円超幾何については，Spiridonov 以前の研究もあるが，数学史として語るのはまだ難しい。

Gelfand の Grassmann 多様体上の超幾何は，超幾何関数の統一的な視点（合流，直交座標系）という意味で古典と合わせてかたるべきだったかもしれないが，筆者の力量の問題もあって書けなかった。

超幾何函数に関して一般的な歴史をさらうのに役立つ文献をいくつか挙げて終わることにする。一つには Askey のレポートがある [7] 。Arch. Hist. Exact Sci. を探れば，色々と違う視点の論文があるだろうが，一例としては Dutka [16] を挙げる。また，Ince は古典解析のまとめとして便利である [31]。

（続）

参考文献

[1] K. Aichi, Note on the Capacity of a nearly Spherical Conductor and especially of an Ellipsoidal Conductor, *Proc. Tokyo Math.-Phys. Soc* (2), **4** (1908), 266–278.

[2] G. B. Airy, On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **6** (1938), 379–402.

[3] G. B. Airy, Supplement to a paper on the intensity of light in the neighbourhood of a caustic, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8** (1958), 595–599.

[4] P. Appell, Sur les séries hypergéométriques de deux variables, et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles, *C. R. Acad. Paris* **90** (1880), 296–298.

[5] P. Appell, *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, les polynômes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperespace*, Mémorial des sciences mathématiques, no. 3, 1925.

[6] P. Appell and J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques; Polynômes d'Hermite*, Paris, 1926.

[7] R. Askey, A Note on the History of Series, MRC Technical Summary Report, 1975.

[8] W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge, 1935.

[9] E. W. Barnes, The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor's series, *Phil. Trans. Royal Soc.* A **206** (1906), 402–412.

[10] H. Bateman, *Bateman Manuscript Project* (1953). Higher Transcendental Functions [volumes I-III] (version Erratum + Published). McGraw-Hill Book Company.

[11] F. W. Bessel, "Analytische Auflösung der Kepler'schen Aufgabe" *Abh. Berliner Akad.* (1816–17), publ. 1819, 49–55: Abhandlungen, I, (1875), 17–20.

[12] M. Bôcher, *Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie*, Leipzig 1894.

[13] M. Bôcher, On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic, *Trans. Amer. Math. Soc.* **1** (1900), 40–52.

[14] L. Borngässer, *Über hypergeometrische funkionen zweier Veränderlichen*, Dissertation, Darmstadt, 1933.

[15] Th. Clausen; Beitrag zur Theorie der Reihen, *J. reine and ange. Math.* **3** (1828), 92–95.

[16] J. Dutka, The early history of the hypergeometric function, *Arch. Hist. Exact Sci.* **31**, 15–34 (1984).

[17] L. Euler, *Institutionum calculi integralis volumen secundum*, (1769).

[18] L. Euler, De motu vibratorio tympanorum, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **10** (1766), 243–260.

[19] L. Euler, Specimen Transformationis Singvlaris Seriervm. *Nova acta Academiae scientiarum imperialis petropolitanae*, **12** (1801) p.58. p.60.

[20] A. R. Forsyth, On a generalized hypergeometric series, *Report of the 53rd of the British Association for the Advancement of Science* (1883), p.408.

[21] A. R. Forsyth, On linear differential equations, in particular that satisfied by the series ⋯, *Quart. J. Math.* **19** (1883), 292–337.

[22] 藤原松三郎, 常微分方程式論, 岩波書店, 1930.

[23] C. F. Gauss, Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam ..., Werke 3, 123–162 (1813).

[24] C. F. Gauss, Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis, Werke 3, 207–229 (1876).

[25] C. F. Gauss, Zur Theorie der unendlichen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, Werke, 10, Teil 1, (1917), 326–359.

[26] É. Goursat, Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, *Ann. Sci. ENS*, **S2-12** (1883), 261–286; 395–430.

[27] E. Heine, Über die Reihe ..., *J. reine and ange. Math.* **32** (1846), 210–212.

[28] E. Heine, Untersuchungen über die Reihe..., *J. reine and ange. Math.* **34** (1847), 285–328.

[29] Horn, J. Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen, *Math. Ann.* **105** (1931), 381–407.

[30] P. Humbert, Sur les fonctions hypercylindriques. *C. R. Acad. Paris* **171** (1920), 490–492

[31] E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, Longmans, 1927.

[32] F. H. Jackson, Some properties of a generalized hypergeometric function, *Amer. J. Math.* **27** (1905), 1–6.

[33] Kampé de Fériet, Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales, *C. R. Acad. Paris* **172** (1921), 1634–1632

[34] F. Klein, *Ueber lineare differentialgleichungen der zweiten ordnung. Vorlesung*, Göttingen, 1894.

[35] D. E. Knuth Two Notes on Notation, Amer. Math. Monthly, **99** (1992), 403–422.

[36] E. E. Kummer, Über die hypergeometrische Reihe ..., *J. reine and ange. Math.* **15** (1836), 39–83, 127–172.

[37] E. E. Kummer, De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis. *J. reine and ange. Math.* **17** (1837), 228–242

[38] G. Lauricella, Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili, *Rend. del Circolo Mat. Palermo*, **7** (S1): 111–158.

[39] Leibnizens Gesammelte Werke, Drilte Folge (Mathematik), 3B, (1855).

[40] W. Magnus, F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, Springer. (1943).

[41] C. S. Meijer, "Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte". *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2), **18** (1936), 10–39.

[42] J. F. Pfaff; Nova disquisitio de integratione aequationes differentio-differentialis, *Disquisitiones Analyticae,* Helmstadt, 135-224, (1797).

[43] J. F. Pfaff; Observationes analyticae ad L. Euler Institutiones calculi integralis, *Nova Acta Acad. Sci Petropolitanae*, **11** (1797), 38–57.

[44] L. Pochhammer, Ueber hypergeometrische Functionen $n$ter Ordnung, *J. Reine Angew. Math.* **71** (1870), 316–352.

[45] L. Pochhammer, Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten. *J. reine and ange. Math.* **102** (1888), 76–159.

[46] B. Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe (.....) darstellbaren Functionen, *Abh. Königlichen Gesell. Wissen. Göttingen* **7** (1857), 3–22.

Riemann's Gesammelte mathematische Werke, 2ed (1892), 67–83.

[47] L. G. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge, 1966.

[48] V. P. Spiridonov, Theta hypergeometric series, Malyshev, V. A. (ed.) et al., *Asymptotic combinatorics with application to mathematical physics. NATO Sci. Ser. II, Math. Phys. Chem.* **77** (2002), 307–327.

[49] G. G. Stokes, On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **9** (I) (1847), 166–189.

[50] G. G. Stokes, Early letters to LADY STOKES, *Memoir and Scientific Correspondence*, p. 62. Cambridge, 1907.

[51] J. Thomae, Beitrg̈e zur Theorie der durch die Heinesche Reihe: ... darstellbaren Functionen.. *J. reine and ange. Math.* **70** (1869), 258–281.

[52] J. Thomae, Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen, insbesondere über die Reihe:..., *Math. Ann.* **2** (1870), 427–444.

[53] J. Thomae, Les séries Heinéennes supérieures, ou les séries de la forme. *Annali di Mat.* **4** (1870), 105–138.

[54] J. Thomae, *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale*, Verlag von Louis Nebert, Halle, 1875.

[55] G. N. Watson, The Product of Two Hypergeometric Functions, *Proc. London Math. Soc.* (2) **20** (1921), 189–195.

[56] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge, 1922.

[57] J. Wallis; *Arithmetica Infinitorum*, 1656.

[58] J. Wallis, *A treatise of algebra both historical and practical*, London, 1685.

[59] H. F. Weber, Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + k^2 = 0$, *Math. Ann.* **1**, (1869), 1–36.

[60] E. T. Whittaker, An expression of certain known functions as generalized hypergeometric functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **10** (1903), 125–134.

[61] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis, 2ed.* Cambridge, 1915.