日本で出版されたリー代数という本の著作について

Noriaki Kamiya (神谷徳昭)

University of Aizu（福島県公立大学法人会津大学）

Abstract

1950 年頃から 2020 年位迄を主体に, この 70 年間に日本 (日本人による英語の著作を含め) で出版されたリー代数 (環) とタイトルに名前がつけられている本のリストを列挙して, 調査・研究するのが主な目的です.

Introduction (はじめに)

この小論は非結合的代数系 (non associative algebras) の著作についての話題 (topics) です, 主にリー代数（環）についてです.

話の発端の 1 つ目は 1956 年に松島先生のリー環の本が出版されました.

2 つ目は 1965 年に来日したアメリカ数学会の会長を歴任された N.Jacobson (Yale Univ.）教授は, 日本数学会の招待で日本各地の大学 (東京大学, 広島大学, 京都大学, 九州大学, 北海道大学, 岡山大学, 名古屋大学等) で, リー代数, ジョルダン代数, 非可換代数等の講義 (講演) を 3ヶ月間の滞在中に行った.

3 つ目はジョルダン代数の著作は日本 (語) では出版されていない様です.

これらの事柄をふまえて, 日本のこの分野の数学書出版状況を「リー代数」というタイトルがつけられた訳本を含めた主に数学の分野に限定して, 筆者の独断的見解を交じえながら述べさせていただきます.(以下名前の敬称略).

この章の最後にリー代数 (リー環) の定義と簡単な例を述べておきます.

体 Φ 上のベクトル空間 V で 2 項積 [,] で閉じていて双線形性を持ち, 次の 1) と 2) を満たす代数系をリー代数 (Lie algebra) という.

1) $[x, y] = -[y, x], \ \forall x, y \in V$

2) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \ \forall x, y, z \in V$

実例　行列代数 $Mat(n, \Phi)$ で積を $[x, y] = xy - yx$ と定義した代数.

4 元数代数 $\mathbf{H}$ で虚数部のベクトル部分空間 $Im\ \mathbf{H}$ の外積 $x \times y$ を $[x, y]$ の定義とすると, これらはリー代数です.

この小論ではリー代数（リー環）の定義を以上のようにさせていただきます. 理由はリー環の定義を体 Φ 上のリー代数より一般な可換環上で考察する場合等と区別するためです.

§1 日本におけるリー代数の著作 (本) について

[1956] 松島与三, リー環論, 共立出版
[1962] N.Jacobson, Lie algebras, Interscience Publishers
[1965] 岩堀長慶, Lie 環論と Chevally 群 上, 下. 東大数学教室セミナーノート, vol.12,13
[1965] 岩堀長慶 (訳), リー代数, 現代の数学 I, 第 5 章, 岩波書店
[1968] 杉浦光夫 (訳), ブルバギ数学原論, リー群とリー環 I(1968),II(1973), III(1970), 東京図書
[1971] N.Jacobson, Exceptional Lie algebras, Marcel Dekker
[1978] M.Goto(後藤守邦) and F.D.Grosshans, Semi simple Lie algebras, Marcel Dekker
[1983] 東郷重明, リー代数, 槇書店
[1983] 竹内外史, リー代数と素粒子論, 裳華房
[1987] 佐武一郎, リー環の話, 日本評論社
[1990] 東郷重明, 無限次元リー代数, 槇書店
[1999] 脇本実, 無限次元リー環, 岩波書店
[1999] 大島利雄・小林俊行, リー群とリー環 1 , 2 , 岩波講座現代数学の基礎
[2000] 佐藤肇, リー代数入門, 裳華房
[2001] 脇本実, Infinite dimenssional Lie algebras, Transulation of Mathematical Monographs, AMS
[2002] 佐武一郎, リー環の話, 日本評論社 (新編)
[2002] 谷崎俊之, リー代数と量子群, 共立出版
[2008] 窪田高弘, 物理のためのリー群とリー代数, (SGC ライブラリ 66) サイエンス社
[2010] 九後汰一郎 (訳), 物理におけるリー代数, 吉岡書店
[2012] 示野信一, 演習形式で学ぶリー群・リー環（SGC ライブラリ 88）, サイエンス社
[2013] 熊原啓作 (訳), 数学者ソーファス・リー, リー群とリー環の誕生, 丸善出版
[2018] 井ノ口順一, はじめて学ぶリー環, 現代数学社
[2019] 金谷健一, 3 次元回転: パラメータ計算とリー代数による最適化, 共立出版
[2022] 山下博, リー代数と表現論, 日本評論社（新装版)

外国語の本として N.Jacobson の本だけをここで挙げたのは, 日本人にとり, リー代数の本として多分, この分野 (非結合的代数系, AMS classification 17) の研究者にとりまして必読書として知れ渡っていると考えたからです.

一方, C.Chevally の戦後直ぐの日本滞在も我々日本人に取り, リー群との直接の交流と思われます (佐武氏の「リー環の話」の本のシュバレーとの思い出参照). 彼の著作（リー群) については後述します.

もしかしたら筆者の浅学の由に抜け落ちている出版物が存在したとすれば, このような研究ノートの第一歩としてお許しください.

リー環からリー代数へ: 何故１９８５年頃まではリー環という ”ことば” が普及していたかの理由の一つはリー環がリー群と対比する concept として考えられていたからだと思います. この時期までは, リー群の接空間としてリー環を把握する人々が多かったのではないでしょうか. その後（1985 年以後）, 無限次元リー代数, Kac-Moody algebra, affine 化, super 化等そして数理物理学との関連性でリー群との関係性よりもリー環独自の代数的な性質が他の分野への応用に役に立つ方向へと変遷した為と推察しています.

§2 日本におけるいくつかの講義録関係

この章では, 講演録等においてリー代数というタイトルが在る講究録・所報・報告集等を調べてみます.

[1986] 野海正俊, 上野喜三雄編, リー環と微分方程式, 上智大学数学講究録, no.23.

[2000] 杉浦光夫, 実単純リー環の分類, 第 10 回数学史シンポジウム, 津田塾大, 数学・計算機科学研究所報, vol.20, p158-391.

[2006] 篠田健一郎編, Proc. of the Conf. on Groups and Lie algebras, 上智大学数学講究録, no.46.

又, 数理解析研究所講究録の Repository KURENAI(紅) でリー代数 (Lie algebras 又は superalgebras) というキーワードで探索すると中里博, 野村隆昭, 筆者が発表 (講演) したタイトルのものしか存在しなかった. (もしかしたら mistake している可能性もありますので御容赦下さい.) この章に関しては特に記載漏れ・探究ミスでの不備が多々存在している可能性があるかもしれません, 再度の調査の予定ですので読者の寛容をお願いします.

§3 リー代数サマーセミナーの歩み

広島大学で長く一貫して教育・研究された東郷重明氏の弟子達 (河本直紀, 久保富士夫氏を中心にしたグループ) を主体に創出されたリー代数の研究会とその報告集として「Proc. of Summer Seminar Lie algebras and Related Topics」(リー代数サマーセミナー報告集・リー代数とその周辺) が刊行されています. 研究会は 1985 年より毎年・現在まで開催され, 報告集は 1990 年以後現在まで (コロナ禍の為 2020 年のみ不開催) 出版されています. 歴史の一コマとして, 第 1 回から現在 (2022) までの責任・世話人と会場を以下に列挙します.

回	日程	会場	責任者	講演数
1	85 年 8 月 1,2 日	広島工業大学付属図書館	河本	6
2	86 年 8 月 25,26 日	広島経済大学	坂本	7
3	87 年 8 月 3,4 日	広島大学理学部	河本, 池田	6
4	88 年 7 月 25,26 日	広島大学教育学部	丸尾, 河本	7
5	89 年 6 月 3 日	広島大学理学部	河本, 池田	6
6	90 年 6 月 2 日	広島大学理学部	河本, 池田	6
7	91 年 7 月 21 日	広島大学理学部	池田	6
8	92 年 7 月 20 日	福岡教育大学第二会議室	坂本	9
9	93 年 8 月 4 日	新潟薬科大学	本多	6
10	94 年 6 月 5 日	広島大学旧教育学部	丸尾, 河本, 池田	7
11	95 年 7 月 28 日	山口大学吉田キャンパス大学会館	柏木	7
12	96 年 8 月 5 日	九州工業大学工学部資料館	池田, 久保	7
13	97 年 8 月 19 日	岡山大学大学院自然科学棟	平野	7
14	98 年 8 月 3,4 日	海外技術者研修協会横浜研修センター	浅野	9
15	99 年 8 月 23,24 日	九州産業大学	牟田	6
16	00 年 8 月 2,3 日	広島大学法学部・経済学部	丸尾, 河本	6
17	01 年 8 月 10,11 日	福山大学	三川	5
18	02 年 8 月 10,11 日	九州工業大学工学部共通教育研究棟	池田, 久保, 坂本	5
19	03 年 8 月 9,10 日	九州共立大学工学部深耕館	首藤	5
20	04 年 8 月 20,21 日	広島大学教育学部	丸尾, 河本	5
21	05 年 8 月 26,27 日	広島大学学士会館	久保	5
22	06 年 8 月 25,26 日	西日本工業大学	谷口	5
23	07 年 8 月 31,1 日	海上保安大学校総合実習棟	河本	5
24	08 年 8 月 29,30 日	福岡教育大学多目的室	坂本	5
25	09 年 8 月 21,22 日	九州工業大学総合教育棟	池田	7
26	10 年 8 月 23,24 日	広島大学東千田キャンパス	久保	5
27	11 年 8 月 22,23 日	広島大学霞キャンパス	久保	7
28	12 年 8 月 24,25 日	山口大学吉田キャンパス大学会館	柏木	7
29	13 年 8 月 23,24 日	大阪樟蔭女子大学関屋キャンパス	平野, 松岡	6
30	14 年 8 月 29,30 日	福岡ガーデンパレス	坂本	6
31	15 年 8 月 28,29 日	新潟薬科大学	本多	8
32	16 年 8 月 26,27 日	岩手大学教育学部	吉井	7
33	17 年 8 月 18,19 日	筑波大学	森田	6
34	18 年 8 月 25,26 日	富山大学理学部	山根	7
35	19 年 8 月 28,29 日	学校法人鶴学園広島校舎	久保	7
36	21 年 8 月 28,29 日	岡山理科大学 (Zoom)	柴田	10
37	22 年 8 月 27,28 日	福井大学文京キャンパス	古関	9
38	23 年 8 月 22,23 日	岩手大学教育学部	富江, 吉井	11
39	24 年 8 月	酪農学園大学	菅原	予定

第 6 回 (1990) 以降は Proceedings (報告集) があります.

最近の傾向として, リー代数以外の超代数,Hopf 代数等の研究者 (外国人も含め）達による発表・論文も増えつつあります（もし興味がある読者は, 報告集を含め, 関係者にご連絡されれば, 資料等手に入ると思います).

§4 今後の課題

(♯) リー環・代数という言葉を誰が最初に Lie algebra の訳として使用したのか筆者は知りませんので, その方を見つけるのも興味ある事柄です. 日本において誰が最初にリー代数の講義をされたのでしょうか? (知られている事柄かも知れませんが…).

1947 年の学士院紀要の松島氏の論文で Lie algebra というタイトルがつけられているものがあります; On the Cartan decomposition of a Lie algebra, Proc. Japan Acad. 23(5) 50-52.

(♯) 戦前 (戦中を含めて) の著作 (本・論文) で, リー代数について論究されているものの文献を調べる (安部亮氏の論文が存在しているようです).
研究会シンポジウム (2023, Oct. 15) の折以下のことを教示いただきました;
[1939]　吉田耕作, りー環論 (大阪帝国大学数学講演集 IV).

(♯) リー群の文献 (著作) をリー代数と同様に調査・探求する.

(♯) S.Togo, N.Iwahori, I.Satake 氏の評伝 (この分野の先駆者達).

§5 あとがき (Conclusion)

リー代数の本の書き方として線形代数の次に学習する教材として捉える, 専門書として読者を限定する, 他の分野との応用的な側面として著述する.
著者の考え方により色々な論及 (著述) の表現の仕方が存在すると思います.
学風・気風 (時代の要請), ページ数の制約等も関係すると思います. 例えば Section 1 で述べた佐武, 岩堀, 東郷氏の著作は三者三様のそれぞれの気風（学風）が出ていて興味深いです（筆者はそれぞれの先生方と面識がありましたので). またどのような断面で著作を書くかにより（読者層をどこにするか）, 例えば非結合的代数（4 元数、8 元数などの数の拡張）の実例として, 量子力学の次に学習する科目として,　工学への応用, 大学院の数理物理を含めた専門書として捉える著述の仕方等色々な方法が存在すると考えます.

そしてさらに付け加えると, リー群 (対称空間), 表現論に比して, リー代数独自の構造論の研究者達が, 諸外国に比較して, 日本にそしてこの分野 (nonassociative algebras) の著作が少ないのは, 松島, 後藤, 佐武氏が長く U.S.A. で教鞭をとられたことと関係するのかも, 又はほかにも理由が存在するのかも知れません. 例えば 筆者が Oberwolfach(Germany) で N.Jacobson 氏から直接伺った話ですが岩堀に Jordan algebra の論文を送ったが彼は興味を示してく

れなかった様だ等.　この時代, 日本人の中で Jordan algebra に興味を持たれていたのは佐武氏 (1980 年の著作) を含め数名 (山口清, 浅野洋等) の様です.

リー代数の概念と対応するリー群について, 少しだけ述べますと, リー代数の説明を含むリー群の本は多数存在すると思います. 例えば, 横田一郎, 杉浦光夫, 岩堀長慶, 佐武一郎氏等, 又内容的にリー代数の事柄が記述されている物理学, 表現論又は幾何学の本も多数出版されています. ここでは 1 つだけ C.Chevalley の Princeton Univ.Press から戦後すぐに出版された 1946 年の Lie group の著作は特筆すべきものと考えます（1965 年に Asian text edition 版,2012 年に斉藤正彦訳, ちくま学芸文庫版). 一方, 非結合的代数系の著作としては, S.Okubo(大久保進）氏の [1995] Introduction to Octonion and other non-associative algebras in Physics, Cambridge Univ. Press. のみが出版されています. (彼は Wigner medal と仁科賞受賞).

この研究ノートでは, リー代数というタイトルのみに着目してリー群・表現論については言及していません (勿論連続群・位相群についても). これらについては別の機会に, そして名前が挙げられていない研究者・著作者の方々も多数存在するかも知れません. 読者の御寛容をお願いします.

最後にこのような著作の数学史的記述と考察 (記録) の文献は, まだ日本では先行資料が無いと考えますので, 参考文献 (引用文献) は存在しません (先行研究等, 筆者の知見不足かも知れませんが, 再度の浅学お許しください).

不十分な研究探索・考察結果ですが,　数学史のとらえ方の一例として現在までに出版された著作のタイトルと内容から時代の雰囲気とこの分野の傾向を考察する数学史研究の試論の所説として独断的な部分を含めた論及ですが, 将来への数学史探求の一歩・ある断面として数学研究者の視点でここに記述させていただきました.

この小論の最後に自己宣伝を兼ねて私の論文を含めて, 以下の著作にはこの分野 (Lie algebras, Jordan algebras, nonassociative algebras, etc.) の最近の論文 (Fields 賞の受賞者の Zelmanov, Kac-Moody algebra で著名な Kac, 等が招待講演者) が収録されています;　Springer Publisher, Proc. Math. and Statistics series の本 (2023 年出版, vol.427) において Nonassociative algebras の国際会議（2022 年夏, ポルトガル,　Coimbra University）の報告論文集が最近の研究動向を知る上で役に立つかもしれません.

また少し古いかもしれませんが 1990 年夏, 広島での ICM の satellite の国際会議の Proceeding として World Scientific 社より Nonassociative algebras and related topics, Yamaguti and Kawamoto eds,（1991）が出版されています. Lie algebras を含め, この分野 (非結合的代数系, Math. Review classification 17) に興味のある読者はご一読ください.

§ **Appendix I** (Construction of exceptional simple Lie algebras)

単純例外型リー代数 g の構成に関する root 系を用いない 5-graded Lie algebra $L(A) = g = g_{-2} \oplus g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_1 \oplus g_2$ のベクトル空間 $A = g_{-1}(or\ g_1)$ の上に三項系代数の色々な構造を導入可能なことが知られています．ただし $[g_i, g_k] \subseteq g_{i+k}$ and $|i+k| \leq 2$, $(mod\ 5)$. ここで基礎体 Φ は標数 0 の代数閉体, i, k は $-2 \leq i, k \leq 2$ です．$\mathbf{O}$ は 8 次元の Cayley algebra です．

(i) $A = g_{-1} = \mathbf{O} \otimes \mathbf{O}$ の場合 (tensor product case): $g_0 \cong D_7 \oplus \Phi Id$ and $dim\ g_{-2} = dim\ g_2 = 14$, $dim\ L(A) = 248$, 勿論, $dim\ A = dim\ g_{-1} = 64$.
$A = A_1 \otimes A_2$, $dim\ A_1, dim\ A_2$ なる記号を用いると, それぞれ construct される Lie algebra $L(A) = (g =) g_{-2} \oplus g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_1 \oplus g_2$ は以下の様になります．

$L(A) \cong E_8,\ g_{-2} \oplus g_0 \oplus g_2 \cong D_8,\ g_0 \cong D_7 \oplus \Phi Id,\ Der(g_{-1} \oplus g_1) = g_{-2} \oplus g_0 \oplus g_2$.

$dimA_2 \backslash dimA_1$	1	2	4	8
1	A_1	A_2	C_3	F_4
2	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
4	C_3	A_5	D_6	E_7
8	F_4	E_6	E_7	E_8

E_8 を Extended Dynkin diagram で表すと $L(A)/(g_{-2} \oplus g_0 \oplus g_2) = g_{-1} \oplus g_1$ は 128 次元の対称空間です．

(ii) $A = g_{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & \beta \end{pmatrix}$ の場合: $\alpha, \beta \in \Phi$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H_3(\mathbf{O})$ (exceptional Jordan algebra with 27 dimension). $dim\ g_{-2} = dim\ g_2 = 1$, $dim\ A = 56$.

$L(A) \cong E_8,\ g_{-2} \oplus g_0 \oplus g_2 \cong E_7 \oplus A_1,\ g_0 \cong E_7 \oplus \Phi Id$. 勿論, この場合, $L(A)/(g_{-2} \oplus g_0 \oplus g_2) = g_{-1} \oplus g_1$ は 112 次元の対称空間です．この場合の A には H.Freudenthal による５６次元の metasymmmplectic geometry と呼ばれる幾何学が存在します ($P \times Q$ and $\{P, Q\}$ なる記号の下で定義されます)．　そしてその幾何は Jordan algebra と関連する代数系が現れます（triple system で特徴されます）．

(iii) The case $A = \mathfrak{A}_0 \otimes \mathfrak{J}_0$: Here $\mathfrak{A}_0$ denote $\{x \in \mathbf{O} | trace\ x = 0\}$ and $\mathfrak{J}_0 = \{x \in H_3(\mathbf{O}) | Trace\ x = 0\}$, and with $dim\ A = 7 \times 26$, $dim\ Der\ (A) = 66$, where the base field Φ is an algebraically closed field of characteristic 0. Then we have $L(A) = Der(A) \oplus A \cong E_8$, $Der(A) = Der\mathfrak{A} \oplus Der\mathfrak{J} \cong G_2 \oplus F_4 =< D(X, Y) >_{span}$. For the product of A, $X \circ Y = (a * b) \otimes (x * y)$ and with respect to the Lie product of $L(A)$, $[X, Y] = D(X, Y) + X \circ Y$, the vector space $(A,\ \circ)$ has an algebraic structure of satisfying $D(X \circ Y, Z) +$

$D(Y \circ Z, X) + D(Z \circ X, Y) = 0$, where $X, Y, Z \in A$ (前述, Springer's vol.427, p 65-79 and see the earlier references of therein).

If we set $\mathfrak{J} = H_3(\mathbf{O}) \to H_3(\mathfrak{A})$ $(= B)$, then we have the following table;

	$dimB = 1$	$dimB = 6$	$dimB = 9$	$dimB = 15$	$dimB = 27$
$dim\mathfrak{A} = 1$	0	A_1	A_2	C_3	F_4
$dim\mathfrak{A} = 2$	0	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
$dim\mathfrak{A} = 4$	A_1	C_3	A_5	D_6	E_7
$dim\mathfrak{A} = 8$	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8

Here the case of $dim\ B = 1$ means $B \cong \Phi$ and note that $L(A)/(G_2 \oplus F_4)$ is a reductive homogeneous space with 182 dimension.

For the triality relations of Lie algebras associated with triple systems (or structurable algebras) without using root systems, to see our papers .

つまり, 三項系代数 (ternary algebra) からの root systems を用いないリー代数 (リー超代数)$L(A)$ の構成に関しては, ([Kamiya and Okubo] 共著等）数十篇の論文が存在します. 例えば　筆者の RIMS 講究録（京都大数理研究所）等の文献 (notation and concept 等詳しい事柄について) とそこで引用したものを参照して下さい.

この章の最後に述べますがこれらの結果は例外型リー代数の構成には Jordan and alternative algebras が重要であることを示しています.

(ーー数学界のリー代数に対するデフォルトを打破するためにーー)

§ Appendix II　　(Triple systems and their examples)

手短に, 簡単に我々の研究 (筆者に関連する) を述べることにします.

$< x, y >$ なる内積を持つ vector space V において,

ただし $< x, y > = < y, x > \in \Phi$,

$$\{xyz\} = < x, y > z + < y, z > x - < z, x > y$$

と定義すれば Jordan triple system （ジョルダン三項系）になり,　さらに

$$l(x, y)z := [xyz] = \{xyz\} - \{yxz\}$$

により Lie triple system(the tangent space of a symmetric space) with respect to the ternary product $l(x, y) \in End\ V$ が得られ, そして Lie algebra が構成可能です. つまり $Der\ V = < l(x, y) | x, y \in A >_{span}$ の中に Lie product を導入する方法です. つまり $L(V) = V \oplus Der\ V$ に Lie 代数の構造が存在する.

次に binary product の観点から, $\overline{xy} = \overline{y}\overline{x}$ を満たす involution を持つ代数系が三項系 (triple system) $\{xyz\} = (x\overline{y})z + (z\overline{y})x - (z\overline{x})y$ によって定義され

$$(\spadesuit) \quad \{xy\{uvw\}\} = \{\{xyu\}vw\} - \{u\{yxv\}w\} + \{uv\{xyw\}\}$$

なる基本公式 (南部恒等式と呼ぶ場合もあります) が成り立つとき structurable algebra と呼ばれます. このような三項系 ((-1,1)-Freudenthal-Kantor triple system と呼ばれる) から単純リー代数 (古典型と例外的な $G_2, F_4, E_6, E_7,\ and\ E_8$ を含む) が得られます. 　勿論少し変形すると Lie superalgebras も構成可能.

まとめると次の a),b),c),d),e) のような type による root systems を用いない構成が存在します. a)$A = \mathbf{O} \otimes \mathbf{O}$(64 次元), b)$A = g_{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & \beta \end{pmatrix}$(56 次元), c)$A = \mathfrak{A}_0 \otimes \mathfrak{J}_0$(182 次元) Tits construction, d) bilinear forms $< x, y >$, e) triple systems induced from matrix algebras,

これらの場合それぞれ triple system, or nonassociative algebra の structure が導入され, それらからリー代数またはリー超代数を construct できます. a),b),c),d),e) types の代数系をまとめて A と表します. a),b),d),e) は triple system (三項積) の structure をもち, a),b),c) はある代数 (normal triality algebra) の積で閉じています. これらの場合それぞれより simple Lie algebras or simple Lie superalgebras が construct されます, we denote by $L(A)$. 特に 5-graded Lie algebra$g_{-2} \oplus g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_1 \oplus g_2 = L(A),\ and\ g_{-1} = A$ です.
そして $T(A) = A \oplus A = (g_{-1} \oplus g_1)$has a structure of Lie triple system.

従って symmetric (super)spaces 又は reductive homogeneous spaces が $L(A)/Der(T(A)) = g_{-1} \oplus g_1\ and\ DerT(A) = g_{-2} \oplus g_0 \oplus g_2$ の概念として考察可能です. ただし $DerT(A)$ は代数系 $T(A)$ の derivation です.

実例として (m, n) 次行列 $A = M_{m,n}(\Phi)$ において $\delta = \pm 1$ とおき, x^T は転置行列として次のように三項積を定義する (右辺は行列の積で定義されます);

$$\{xyz\} = xy^Tz + \delta(zy^Tx - zx^Ty), \quad \forall x, y, z \in A$$

この triple product $\{xyz\}$ は $(-1, \delta)$-Freudenthal-Kantor triple systems です.

つまり ($\spadesuit$) and ($\spadesuit\spadesuit$) $K(K(a,b)c,d) - K(a,b)L(c,d) - L(d,c)K(a,b) = 0$, の 2 つの恒等式を満たします, ただし $L(a,b)c = \{abc\}\ and\ K(a,b)c = \{acb\} - \delta\{bca\}$ です.

$\delta = 1$ が structurable algebra $(if\ m = n)$ であり, リー代数が構成され $\delta = -1$ のときが anti-structurable algebra $(if\ m = n)$ であり, リー超代数が構成されます. 勿論 5-graded Lie (super)algebra $L(A)$, であり $A = g_{-1}$ に代数的な構造が導入されています. root systems を用いない方法です.

$m \neq n$ ならば ternary(triple) product は存在しますが binary product は存在しません, そして特に $\delta = -1$ のとき, $M_{2n,2n}(\Phi)$ ならば $osp(2n, 4n)$ type, $M_{m,2n+1}(\Phi)$ ならば $osp(2n+1, 2m)$ type, のリー超代数が構成されます.

$$consept\ of\ algebraic\ structure \Longleftrightarrow concept\ of\ geometric\ structure$$

このような対応が非結合的代数系の立場から考えられます (標数 $p \neq\ 2$ の場合も含めてです). これらの場合, roots system を用いない方法です.

興味を持つ対象により a),b),c),d),e) 等, 非結合的代数系の道具,notation, 手法 (methods), により色々と素朴に予備知識をあまり仮定せずに考察することが可能です. これらの研究については筆者の論文又はそこにおいて引用しました論文を参照してください. (Math. Review classification 17, nonassociative algebras, mainly)

少し話題がそれるかもしれませんが, For Lie algebras and symmetric spaces (or bounded domains), 対称空間又は対称領域に関する著作:

[1980] Satake, Algebraic structures and symmetric domains (the correspondence of Hermite JTS and bounded symmetric domains),

[1969] Loos, Symmetric spaces, I, II (the correspondence of Lie triple systems and symmetric spaces)

[2002] Bertram, Complex and quaternionic structures on symmetric spaces -correspondence with Freudenthal-Kantor triple systems, Sophia Kokyuroku in Mathematics, vol.45, 57-76.

これらも三項系代数と幾何学の対応を特徴ずける初期の著作だと考えます.　また前に述べた Okubo's book（[1995]）は数理物理学と三項系の関連が述べられています.

§ **Appendix III** (Certain papers of N. Kamiya)

京都大学数理研究所講究録に収録されている N.Kamiya の著作リスト:

・Examples of Peirce decomposition of Generalized Jordan triple systems of second order: Balanced classical cases vol.1503 (2006)1-9.

・Some constructions of Lie superalgebras from triple systems and extended Dynkin diagrams, vol.1562 (2007)1-9.

・合成代数とピタゴラスの定理の拡張, vol.1604 (2008)110-113.

・On Lie slgebras and triple systems:B_3-type case, vol.1655 (2009)56-65.

・パスカルの 3 角形と和算 (数学史の研究), vol.1677 (2010)253-258.

・On (α, β, γ) triple systems, vol.1712 (2010)10-20.

・高木貞治先生の著作の緒言について (数学史の研究), vol.1739 (2011)37-41.

・On anti-structurable algebras, vol.1769 (2011)13-22.

・On Construction of Lie Superalgebras from Flexible Lie-admissible Algebras: sl_2 loop algebra and tertahedron algebra, vol.1809 (2012)42-53.

・ピタゴラス数のある一般化について vol.1814 (2012)54-60.

・Triple systems and structurable algebras, vol.1873 (2014)106-113.

・On (α, β, γ)structurable algebras and Dynkin diagrams, –Beyond Lie algebras to triple systems–,vol.1915 (2014)78-88.

・On triality and pre-structurable algebras, vol.1954 (2015) 15-26.

・A generalized automorphism group and triality groups for nonassociative algebras: In memory of Professor Susumu Okubo(1930-2015), vol.2008 (2016) 10-20.

・On triality relations for matrix algebras, 行列における三対原理, vol.2051 (2017) 14-24.

・A construction of Lie algebras and (ε, δ)-Freudenthar Kantor triple systems associated with bilinear forms, vol.2096(2018)1-13.

・計算機科学から視た 2 次代数 $\mathrm{Z}_p[\sqrt{q}]$, vol.2104(2019)24-28.

・カンドルのある構成, A Construction of Quandles associated with Quadratic Algebras, vol.2130(2019)13-20.

・ある視点からの Nathan Jacobson,- Jordan 代数を中心にして-(数学史の研究) RIMS Kôkyûroku Bessatsu B81,(2020) 147-154.

・カンドルのある構成 II, A Construction of Quandles associated with Quadratic Algebras II, vol.2188(2021) 34-44.

・On certain algebraic structures of symmetric spaces, vol.2193(2021) 51-63.

・On triality relations of certain eight dimensional algebras, vol.2229(2022) 52-63.

・On triality relations of normal triality algebras and Lie algebras, vol.2265 (2023), in press.

補足: 数学史シンポジウム, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報収録の N. Kamiya の著作リスト:

・安藤有益の奇偶方数についての考察, vol.39 (2018) 127-136.

・ある視点からの Nathan Jacobson について, vol.41 (2020) 39-48.

・対称空間と三項系, vol.43 (2022)29-49.

・2 次代数に附随したカンドルのある構成とその応用, vol.44 (2023) 15-27.

以上附録 I),II),III) として筆者に関係する事柄 (リー代数と非結合的代数の関連分野) について, 日本ではあまり知られていないと考えられますので, この機会に述べさせていただきました.

Current address;
Noriaki Kamiya,
Japan, Chigasaki City Chigasaki 1-2-47-201
e-mail; shigekamiya@outlook.jp