# Levy-Khinchine の定理

**無限分解可能分布を理解する**

**はじめに**　無限分解可能分布(infinitely divisible distribution)の典型例は

正規分布 $N(\beta,\ \sigma^2)$、ポアソン分布 $Po(\lambda)$

である。すなわち

正規分布はどこまでも細かく小さく分解できる

ポアソン分布はどこまでも細かく小さく分解できる

このことは自然を経験的に観察すると納得できる。すなわち、多くの偶然現象はそれをもたらした要素的自然現象の総体的和に分解され、かつこの分解はかぎりなく繰り返す。これを理論的にスケッチする。(伊藤清『(旧) 確率論』は触れていない。以下 Breiman による)

**事前知識**　確率変数 X に対する

・モーメント母関数　　$M_X(u)=E(e^{uX})$

・特性関数　　$\phi_X(u)=E(e^{iuX})$

の諸性質は既知とする。ただし、ここでは数学的な厳密性から特性関数を用いる（存在性、解析関数としての一様収束など)。すなわち

・確率分布と一対一対応

・法則収束（convergence in law）について連続

・独立確率変数の和 X+Y には　$\phi_{X+Y}(u)=\phi_X(u)\cdot\phi_Y(u)$が対応

の３点である。

＊$\phi_{cX}(u)=\phi_X(cu)$ もここでは（ことにポアソン分布に）暗黙に使われる演算である。

**再生性**　確率変数の分布が（$\theta$ で）parametrize された分布族に属し、独立確率変数の和演算 X+Y のもとでこの分布族が閉じていれば 「再生的」regenerative といわれる。とりわけ、都合のいい例は加法演算が保存されるケース

（♯）　$X\to\theta_X,\quad Y\to\theta_Y$　ならば　$X+Y\to\theta_X+\theta_Y$

の場合で（→は対応する $\theta$)、

・正規分布　　$\phi_X(u)=\exp(i\beta u-\sigma^2u^2/2)$　　$(\theta=(\beta,\ \sigma^2))$

・ポアソン分布　　$\phi_X(u)=\exp[\lambda(e^{iu}-1)]$　　$(\theta=\lambda)$

がその典型例であることは数理統計学では基礎知識である。

**無限分解可能性**　Z がこの分布族に属し $Z\to\theta$ とすれば、任意の n に対し $\theta/n$ を持つ確率分布を分布とする独立確率変数列 $X_i(i=1,\cdots,n)$があって、Z は分布として $Z\sim\Sigma X_i$ と分解される(注：$X_i$ は n に依存する)。もちろん、特性関数としては

$$\phi_Z(u)=\{\phi_X(u)\}^n$$

である。 n は任意であるから文字通りどこまでも「無限分解可能」で、正規分布、ポアソン分布はその例である。問題は、これらを含んで一般に（$\phi_X(u)$）はどんな関数か、言い換えると無限分解可能性の必要十分条件である。

## Levy-Khinchine の定理の証明（概要）

X は n に依存するから、$\phi_X(u)$を$\phi_n(u)$とおくと、

$$n\to\infty のとき \quad \phi_n(u)\to 1 \qquad (uc)$$

となることは容易にわかる（略、$\mathrm{Arg}\,\phi_Z(u)<\pi$ に注意)。実際 $S_n=\Sigma X_i$ とおくと、

$$n \to\infty \quad のとき \quad S_n \to \quad Z \quad (法則) \qquad なら\ X_i \to \quad 0$$

が成り立つ。すなわち、無限に分解されれば分解単位は無限に小さくなる。

さて、Taylor 展開で

$$\log \ \phi(u)=n\log(1-(1-\phi_n(u))$$

$$= n(\phi_n(u)-1)(1+\varepsilon_n)$$

$X_i$ の c.d.f.を $F_n$ とおいて書き換えると

$$\log \ \phi(u)=(1+\varepsilon_n) \ \int ( e^{iux}-1)ndF_n$$

この積分を、さまざまなジャンプ高 $x_i$ のポアソン強度を $\lambda_i$ として

$$\phi(u)=\exp[\ \Sigma\lambda_i\ (\ e^{iuxi}\ -1)]$$

で近似することを考えよう。ただし、無限分解可能分布はジャンプ過程のみならず連続的変動も含むから、この扱いは単純ではなく、細かい実関数論(Real analysis)や関数解析の見方が要求される。

まず

$$\mu_n(B)=E(\text{no. of} \quad X_i\ (\ i=1,\cdots,n) \ \ \varepsilon\, B)$$

を導入すると、一般に二項分布のカウント数 X の E(X)=np だから、$nF_n$ を n p と見なし

$$\log \ \phi(u)=(1+\varepsilon_n) \ \int ( e^{iux}-1) \ \mu_n(dx)$$

と文字通り書き換えられる。ポアソン分布では np=λ（強度）だから、$\mu_n$は「ジャンプ高 x とその強度λ」を表す測度にほかならない。$\mu_n$は n→∞のとき$\mu_n(R_1)$=n→∞だが

$$\limsup_n \quad \int_{[-1,1]} x^2 \ \mu_n(dx) \quad < \ \infty \qquad (有限の最大集積点)$$

が成り立つから（証明略)、$\mu_n$は n→∞にしたがい原点の近傍に集積する。これにより正規分布 N(0, $\sigma^2$)が入る余地があきらかになったが、同時にポアソン分布も入れるためには 0 に退化 degenerate せず、$[-1,1]^c$（外側）にもある程度確率は残らなくてはならない。

これらを明示的に表現するために、h(x)≧0 で

- 連続かつ有界、
- 原点の近傍で $x^2$ 類似にふるまう

なる関数を用意する。よく用いられるのは

$$h(x)=x^2/(1+x^2)$$

で、これにより確率測度（c.d.f.）

$$G_n(x)=\int_{[-\infty,x]}y^2/(1+y^2) \ \ \mu_n(dy)/\alpha_n \qquad (\alpha_n は規格化定数)$$

を定義する。この $G_n$ による表現では

$$\log\ \phi(u) = (1+\varepsilon_n)\ \alpha_n \int (e^{iux}-1)\ [(1+x^2)/x^2]\ G_n(dx)$$

となるが、ここが核心である。$e^{iux}-1$ の Taylor 展開項 iux によって被積分関数は $x\to 0$ のとき 1/x 程度に爆発する。よって、この項を差し引くが、同時に $1+x^2$ が $x\to\pm\infty$ のとき発散するのを抑えるため、実際には $iux/(1+x^2)$ の差し引きを補うと、結局

$$\log\ \phi(u) = (1+\varepsilon_n)\ \alpha_n \int (e^{iux}-1-iux/(1+x^2))\ [(1+x^2)/x^2]\ G_n(dx)$$
$$+i(1+\varepsilon_n)\ \beta_n u,\quad ただし\quad \beta_n = \int \{x/(1+x^2)\}\mu_n(dx)$$

に行き着く。この式の意味として、第一項には文字通りポアソン分布を補う付加項、第二項は後でわかるが正規分布の平均が現れている。もう一点、被積分関数は $x\neq 0$ で定義されることは後にゆずる。

最終的に $n\to\infty$ の極限の存在は未知だが、被積分関数は有界かつ Helly-Bray の定理から収束部分列は存在し(詳細は略)、それに沿って $\alpha_n\to\alpha$, $\varepsilon_n\to 0$, $\beta_n\to\beta$, $G_n\to G$ とすれば、$\alpha>0$ また G が c.d.f.である限り

$$\log\ \phi(u) = i\beta u + \alpha \int (e^{iux}-1-iux/(1+x^2))\ [(1+x^2)/x^2]\ G(dx)$$

となる。この被積分関数

$$Q(x,u) = (e^{iux}-1-iux/(1+x^2))\ [(1+x^2)/x^2]$$

は $x\neq 0$ で定義されるが、$x\to 0$ では極限値 $-u^2/2$ をもつから($e^{iux}$ を 2 次まで Taylor 展開する)、$Q(0,u)= -u^2/2$ と定義すれば $Q(x,u)$ は連続関数となる。ここで G が原点に point mass を置くなら、それを G から分離して別項とすれば、最終的に

＜Levy-Khinchine,1937＞

$$\log\ \phi(u) = i\beta u - \sigma^2 u^2/2 + \int (e^{iux}-1-iux/(1+x^2))\cdot[(1+x^2)/x^2]\ \nu(dx)$$

ただし、$\nu$ は原点 0 に point mass を置かない有限測度である。

**文献** LK の定理は[Breiman][Shiryaev]にある。[松原]は Brown 運動の定義で無限分解可能性を可視的に示し、また経路の連続性、微分不可能性（接線が引けない)、長さ無限大（ただし 2 次変分有限）に頁を割いている。


伊藤清『確率論』(旧版）岩波書店　第 4 章

高橋陽一郎，『伊藤清の数学』，日本評論社，2011

松原　望『入門確率過程』東京図書　2003

L.Breiman　*Probability*　Addison－Wesley, 1968

A.N. Shiryaev　*Probability*　Springer, 1989,　Chap.III