不規則な運動に対する確率的表現についての一考察

— D.Mumford の視点を踏まえて—

田中紀子　松原　望

アブストラクト

すべて「現象」（現実の現象）の世界は変動し、一回とて再現されず一回限りのものである。数学は完全な再現性を持つから、したがって、原理的に数学によって完全に現象を描き切ることはできない。それができるのは「変動性」variability をもっぱら扱う（本来的意味での）確率論およびそれを測る統計学である。この考え方にたって、「現象」正確には現象からの「信号」を分析するアプロ—チが D.Mumford の「パターン理論」Pattern Theory である。

とりわけ、最高度の複雑性を持つ信号の例は自然科学の信号であり、スケールが大きいものから小さいものまでひろがっている。このとき、どんな現象もこれより小さい同様の独立な確率的変動の和からできている、いいかれば、どんな現象もどこまでも無限に分解しうる（無限分解可能 infinitely divisible)という著しい基本的性質が普遍的に観察される。

この概念を見出したのはフランスの Lévy であり、この見地から見れば、Kolmogorov の測度論的確率論は、たしかに確率に形式的に厳密な数学表現を与えはしたが、本質的に確率現象を完全にとらえ切っているかは別問題である。確率論史からみれば、少なくとも、前後に大きな関心の断絶がある。同時に、Mumford もいうように、現象を正しく描くのは数学よりむしろ確率・統計かもしれない、という新しい「夜明け」dawn がこの第三ミレニアム（2000 年代）に来ている。

ここでは、確率のとらえ方と位置づけ、理論の表現のしかたに視点を定め、かねてより重要ではあるが端役とされてきた「無限分解可能分布」が、基軸的な役割をはたしていることを見よう。

I　マンフォードの「パターン理論」

本書は、サブタイトル

実世界の信号の確率的分析 *Stochastic Analysis of Real-world Signals*

からもわかるように、実体世界の不規則な（stochastic）変動の信号を分析することで、背後の隠れた確率構造をより直接的に把握するモデルである。確率論の歴史から見ると、「確率とは何か」について本質的に従前と異なっている。なお、著者 D.Mumford はイギリスの代数幾何学者で、フィールズ賞を受けている。 以下、本書の紹介文によって、説明しよう。

－本来「パターン理論」はスウェーデンの数学者 U.Grenander により始められたすべての形の実世界の信号（all forms of real world signals)に対する異色の分析アプローチである。その中心にはまず広い範囲の確率論モデルが来て、本書はその統計的サンプルになっている。さらに、実信号、そのパターンおよびその変動する様子（real signals, patterns and their variability)を感覚することができる。また、ベイズ統計学による推論にこれらのモデルを当てはめれば、さらに新しい信号の分析も可能になる。ここでは、まず数理的ツール、次にモデルそのもの、さらに **6 段階**の信号の複雑さに応じた分類(six representative classes of signals of increasing complexity)に対し統計量を分析する計算アルゴリズム(computational algorithm for applying statistics)を扱う。－

６段階は複雑さの順で以下の通りである。ここで扱う第６段階は breakdown した。

1. 英語テクストとマルコフ連鎖
2. 音楽と区分的ガウス性
3. 文字認識とシンタクス的分類
4. 画像構造のセグメント化とギッブスモデル
5. 顔と弾力性鋳型
6. 自然科学とマルチスケール型分析

6.8 モデル II 独立な対象(independent objects)から構成される画像

6.8.1 基礎事項 XIV 無限分解可能分布

II Lévy の「無限分解可能分布」

無限分解可能分布は多くの確率論テキストにあるが、「自然科学とマルチスケール型分析」では、重要な役割をはたしている。本来、現象を描写することで考えられたから、自然な成り行きである。

2.1 **定義**

3,4 通りの同値な表し方があるが、notation は統一せず各独自とする。

<Mumford> 確率変数$\mathcal{X}^{(1)}$は、各nに対し、独立確率変数$\mathcal{X}_1^{(1/n)}, \dots, \mathcal{X}_n^{(1/n)}$ が存在して

$$\mathcal{X}^{(1)} \backsim \mathcal{X}_1^{(1/n)} + \cdots + \mathcal{X}_n^{(1/n)} \qquad \text{(同分布)}$$

となるとき、「無限分解可能」という。

＊D.Mumford *Pattern Theory* pp.366

<Breiman> 確率変数Xは、各nに対し、ある独立分布の確率変数$X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ が存在して

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\left(X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}\right) \qquad \text{(同一確率法則)}$$

となるならば、「無限分解可能」といわれる。

*L.Breiman *Probability* pp.191。Lévy -Khinchine の定理の証明あり。

<Kunisawa> 分布関数Fは、各nに対し分布関数F_nが存在して、

$$F = \underbrace{F_n * F_n * \cdots * F_n}_{n\text{個}} \qquad \text{(たたみ込み)}$$

となるとき「無限分解可能」という。

*国沢清典『確率論とその応用』 p.105

<Feller>分布関数 $\{h_i\}, i = 0, 1, \cdots$ は、各nに対し、分布関数 $\{\phi_i\}$ のそれ自体のn重たたみこみとなるとき、いいかえると母関数 $h(s)$が、$h^{1/n}(s) = \phi(s)$が各$\{\phi_i\}$を生成するという意味で、n重根をもつとき、「無限分解可能」といわれる。

＊W.Feller *Introduction to Probability Theory and its Applications I* pp.271

<Ito(1)> 分布Φは、各nに対し、Φ_nが存在して

$$\Phi = \Phi_n * \Phi_n * \cdots * \Phi_n \ \left(n\text{箇}\right) \qquad \text{(たたみ込み)}$$

となるとき「無限分解可能」という。

*伊藤清『確率論』（旧版） pp.135

<Ito(2)> m を定数とし、測度nは$[1,\infty]$で有限、$[0,1]$でu^2の積分は有限とする。このとき、

$$\varphi(z) = e^{\psi(z)},\quad \psi(z) = imz - \frac{v}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2}\right)dn(u)$$

は「無限分解可能分布」の特性関数である。（Lévy -Khinchine の定理）

＊同上

このほか、A.Shiryaev *Probability* pp.341 は詳しく、全般に Lévy への言及も多い。なお佐藤健一『加法過程』があるが未入手である。また鶴見茂『確率論』にも簡単な言及がある。

2.2 構成的ヒューリスティック

無限分解可能性は、正規分布およびポアソン分布が固有に持っている性質から自然に導かれる。

まず、正規分布に対し、独立確率変数の和の分布を convolution で表現すると、

$$N(\mu_1,\sigma_1^2) * N(\mu_2,\sigma_2^2) = N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)\quad \text{（再現性）}$$

は容易に導けるが、モーメント母関数が

$$h(s\,|\,\mu,\sigma^2) = exp(\mu s + \sigma^2 s^2/2)$$

であるから、convolution の関係は、そのままhの関係

$$h(s\,|\,\mu_1,\sigma_1^2)\cdot h(s\,|\,\mu_2,\sigma_2^2) = h(s\,|\,\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

でより可視的になる。また$s \to is$とすると、hはフーリエ変換φつまり分布の特性関数で、

$$\varphi(s\,|\,\mu_1,\sigma_1^2)\cdot\varphi(s\,|\,\mu_2,\sigma_2^2) = \varphi(s\,|\,\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

でもよい。いずれにおいても、左辺＝＞右辺の加法的結合、圧縮の向きだが、逆に右辺＝＞左辺で見れば「分解」division の関係式になる。加法か分解かはただ見る向きの違いである。

ポアソン分布なら、モーメント母関数は

$$h(s\,|\,\lambda) = exp\big(\lambda(e^t - 1)\big)$$

であって、全く同様の議論が成立すること、つまり加法から分解が従うことは明らかである。以上見るように、議論は分布形に強く依存するから、この 2 分布に限るかという課題は意味がある。ポアソン分布に多少の一般化を加えた後は、答はイエスで（Levy-Khinchine）、相当に強い結果である。

ブラウン運動では、この分解が「独立増分」として時間軸上でより劇的に実現している（後述）。また、ブラウン運動の径路をはじめとして、不規則図形の粗さ、細かさ（いわゆるフラクタル次元）を研究したマンデルブロー（B. Mandelbrot）が Lévy の弟子であったことにも十分な理由があろう。

2.3 確率論上の歴史的意義

Paul Lévy(1886-1971)の業績については

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Levy_Paul/

が学問的に詳しいが、10 冊の本がかかれ、そのうち確率論では

① *Leçons d'analyse fonctionnelle* (1922)

② *Calcul des probabilités* (1925)

③*Théorie de l'addition des variables aléatoires* (1937; 1954),

④*Processus stochastiques et mouvement brownien* (1948).

が挙げられる。

伊藤清『確率論』（旧版、1953 初版）は、③④を元に第３章「加法過程」（Lévy）第４章「Wiener 過程」を展開する。もとより①～④は関数解析の発想にあるので、『確率論』も Lévy の確率論の流れである（著者自身の構想）。ただ、第 1,2 章には、Kolmogorov 流（もとは Lebesgue 流）の公理的確率論が定礎されている点が『確率論』のユニークな特徴である。

なぜなら、Lebesgue の測度論は 1902 年、Kolmogorov の公理的確率論は 1933 年(ドイツ語版)であったが、Lévy はほとんど関心を示していないからである。（孤高の人で他人の論は読まなかった）。他方 Kolmogorov は現象中心の古典確率論は全く無視で、関心が交わるところはなかった。

また、日本においては、当時（戦前戦中）からいずれにしても「確率」に対する数学者の態度には最初から腰が引けているところがあり、Kolmogorov の公理的確率論さえも半信半疑の物珍しさの感覚を以って迎えられたという（松下嘉米男*）。伊藤の『確率論』はその点でも画期的である。

＊元統計数理研究所第一研究部長、東京帝国大学理学部数学科卒

III 数学史と教育数学－Lévy の業績

Lévy の確率論は、20 世紀にあってもなお実体中心のフランス古典確率論の伝統に忠実であからる。明示的でない場合も入れれば、パスカル、フェルマー、ベルヌーイ、オイラー、ラグランジュ、ラプラスの線から外れていない。多少、集合論的アプローチにふれるとしても同時代のボレルが挙げられている。Kolmogorov が一切これらを排除したのは、無視したというよりは、公理的にまとめればさしあたり触れなくてよいという気持ちだったのであろう。 ただし、そうはいっても、公理論のままこれからも発展できるかはまた別問題であり、そこに個々の古典の問題に立ち戻るモチーフがある。無限分解可能もその一例である。

ただ立ち戻ることは大変な課題である。まず、数学自体が古典に立ち戻る（筆者は「教育数学」という）こと、実体中心なら、「不規則的な」stochasitc 現象が主要問題として立ち現れることになるだろう。中国哲学のことばでいえば、「論語」的な規則の世界から、「荘子」の世界へ移行していくのである。

＜ブラウン運動の path のシミュレーション＞ 単純ランダムウォークの和の極限として実現できる。

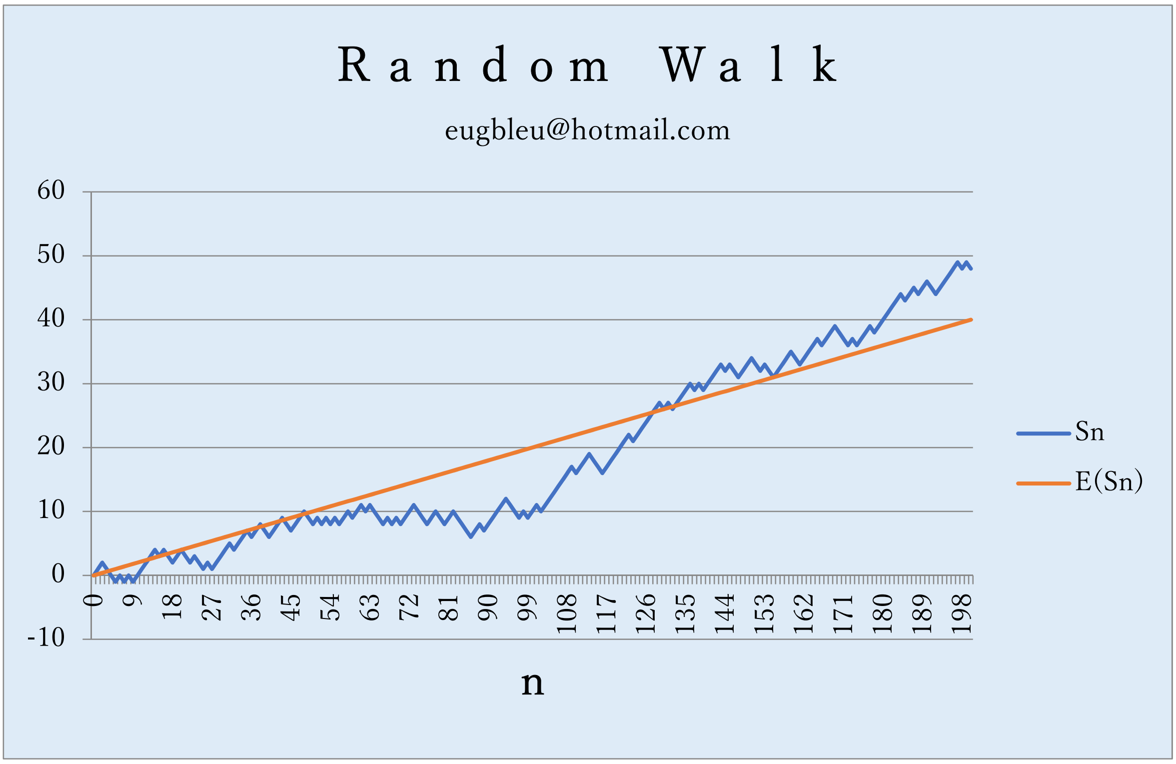
n が十分大きくないのでｷﾞｻﾞｷﾞｻﾞが可視的だが大きくなるにつれ極限的に細かくなり、当時より懸案であった課題も現在では証明が与えられている。すなわち

① ブラウン運動の path は確率 1 で連続

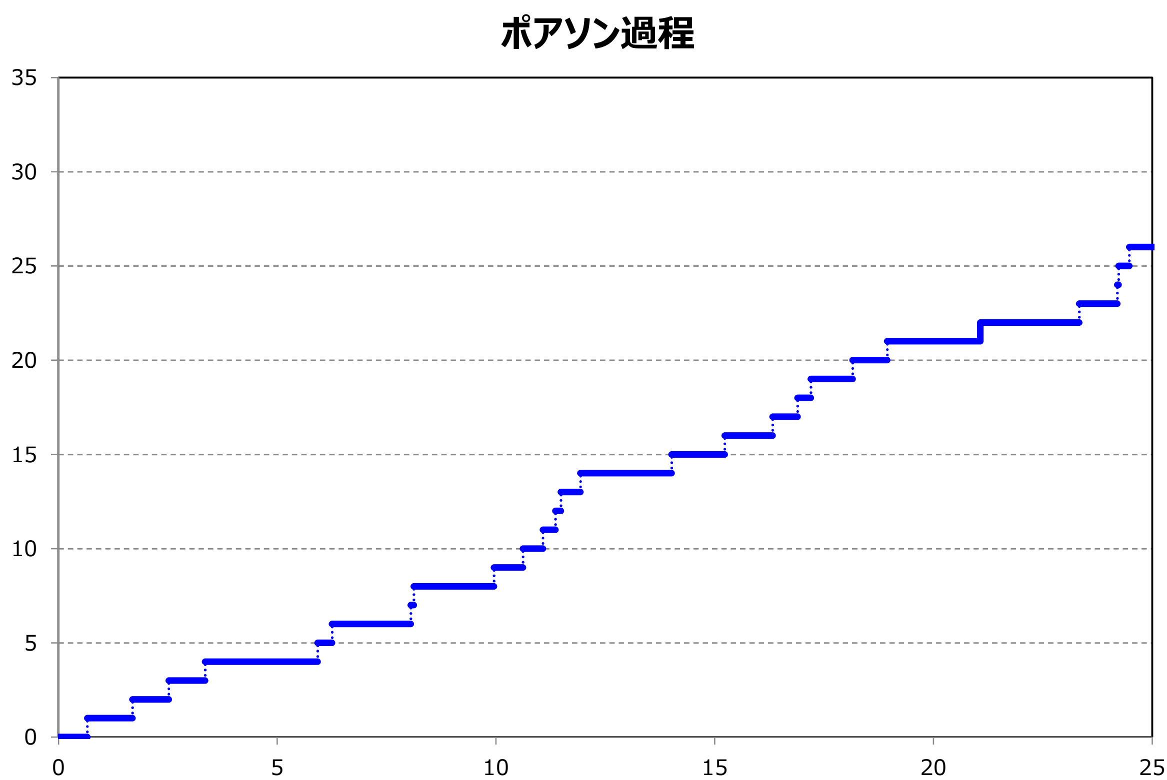
② ブラウン運動の path は確率 1 で至る所微分不可能 nowhere differentiable

③ ブラウン運動の path は確率 1 で有限の時間区間で一次変分無限大、二次変分有界

Breiman *Probability* chap.12



<ポアソン過程を見る>　　ポアソン分布が働いている典型例として「ポアソン過程」は次図のごとくである。ジャンプ＝１（単位）のみで、k≥2 の確率は o(Δt)である。またその大きさ幅（u）＝1 としてあるが、実際の現象では－∞＜u<∞　となっている。



不規則な運動に対する確率論的表現についての一考察

―D.Mumford の視点を踏まえて―

田中紀子　松原望

1　Brown 運動　―Paul Levy の視点

Paul Lévy は，10 代の頃から接線を持たない曲線があるとか，またそのような曲線を構成している屈曲路は奇妙なもので，曲線の弧が無限に伸びていなくても必然的に無限の長さを持つようになってしまうという事実に興味を持っていた．Paul Lévy 自身，Saint-Louis にいた 18 歳前後が，開花の時期だったと述べている．

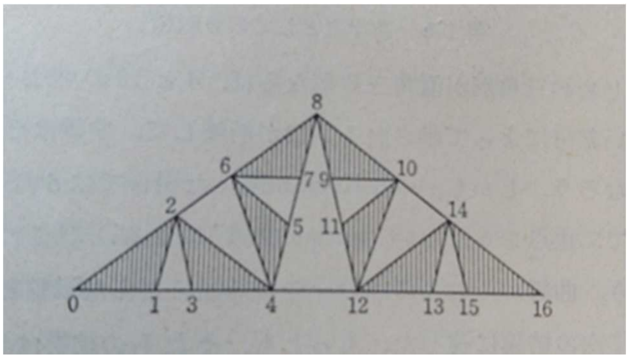


図１「一確率論研究者の回想」中の挿絵

『私は紙の上に太いペンで描かれている一つの曲線 C_0 を考えてみた．実際には幅ℓを持つ帯 S_0 が描かれるわけで，C_0 はその中心の曲線である．つぎに，その 10 倍細いペンで S_0 の内部に幅 1/10 の帯 S_1 を入れて，正弦曲線が二つの直線の間を振動するのと同じように，交互に S_0 の縁に接してその中心線 C_1 が C_0 を 45°の角で切るようにする．さらに 10 倍細いペンで同様に S_1 の内部に帯 S_2 を入れ，このようにして限りなく続けていく．これらの線は次第に細く，次第にねじれて，極限では接線を持たない，長さ無限大の連続曲線を定義する．』(飛田，山本，[10])

右上図は，0 から 1 まで変化するパラメータ t に関する軌跡で，t の 0,1/16,2/16,…15/16,1 なる値に対応する点を 0 から 16 までの整数で示してある．直線(0-16)を C_0 で表し，折線(0-8-16)を C_1，(0-4-8-12-16)を C_2,(0-2-4-6-8-10-12-14-16)を C_3，そしてすべての点を結ぶ折れ線を C_4 とする．どこまでもこのように続けて，次第に曲の多い曲線 C_n の無限列を定義することができる．

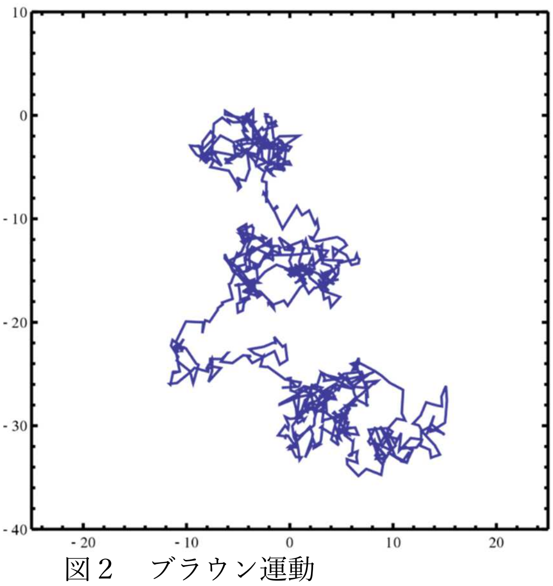


図２　ブラウン運動

C_n と C_{n+1} の間に囲まれる領域を S_n で表す．それらの面積は，はじめの三角形に相似で次第に小さくなっていく２n 個の三角形からなる図形である．n を無限大にした極限を考えると S_n も C_n も，連続な長さ無限大の，接線を持たない曲線 C になる．

今日 von Koch の曲線と呼ばれるこのような曲線についての思索が、のちの Brown 運動に関する研究の源となったのではないか.(フラクタルの創始者マンデルブロが Lévy の学生であったことも頷ける.)

ブラウン運動の確率的表現のよさについて，ポール・レヴィは 1955 年の第 3 回バークレー・シンポジウムで“A special problems of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions”と題して講演した(ポール・レヴィ，[9]).ここでレヴィはガウス過程の標準表現を提唱し

ている．ガウス型Φ(t)， t>0 が与えられ，平均値は 0 としたときに，このΦ(t)からブラウン運動を構成して

$\Phi(t)=\int_0^t F(t,u)\,\xi_u\sqrt{du}$

と表現した．Φ(t)は t の動きに従って変化する偶然量であり， それは相互に複雑に関連しあって変化するため簡単にその行動を規定することはできない．共分散関数を計算したとしても多次元の同時分布をみることになるだけで，t の動きに応じた変化の様子は簡単には分からない．しかし

$\Phi(t)=\int_0^t F(t,u)\,\xi_u\sqrt{du}$ のように表現すると，ブラウン運動が時間の変化に応じて逐次独立な偶然量を加えていき，しかもガウス分布に従う．その変化量はランダムでない係数$F(t,u)$のウエイトがかかって時間進行に応じたΦ(t)の変化の様子が明らかになる．

『もっとも天分に恵まれていたのはアメリカの N.Wiener とフランスの P. Lévy であり， 彼ら 2 人は勃興しつつあった確率過程論という新分野の先導者として認知されている． しかし， ともに難解な文体で数学を書くことで悪名高かった． 実際， 彼らの論文の核心は看破不可能に近く， 少なくとも P.Lévy は伊藤という解釈者を得たという幸運により，今日の名声を享受できたと私は考えている』

（ダン・ストゥルック,[11]）

２　伊藤清の視点

『統計力学から次第に確率論に近づいていったのですが，その頃の日本には，確率論を専門に研究している数学者は誰もいなかったばかりか，私自身も「確率論が厳密な意味で数学と言えるかどうか」という疑問を持っていたのです．』『確率論の内容に改めて直観的な興味を覚えたのは，フランスの数学者，ポー ル・レヴィ(Paul Lévy)が 1937 年に発表した「独立確率変数の和の理論」(Théorie dé l'addition des variables aléatoires)を読んだときです．これは微分積分学の関数に対応する確率論的概念としての確率過程の研究において大きな第一歩を踏み出したもので，私はここに新しい確率論の本質を見いだし，そこに見える一筋の光の中を歩いて行こうと思ったのです．1938 年の秋のことでした．私は，レヴィの理論における確率過程の見本関数の中に，数学理論の名にふさわしい美しい構造を見いだしただけでなく，ウィーナー過程，ポアソン過程，独立増分過程などの確率過程をここで学びました．そして特に，この本の核をなす独立増分過程の分解定理に興味を持ちました．しかし，多くの開拓者の仕事がそうであるように，レヴィの記述は直観的な把握にもとづく部分が多く，その議論の展開を追うことが困難でした．』　　　　　　　　　（伊藤清，第十四回京都賞記念講演会挨拶文,[5]）

『数学の他の分野に比して確率論の発展は極めて緩慢であった．それは確率を数学的に明確に表現する方法がつかまえられなかったからである．しかるに集合論、抽象空間論等の発展の結果、極めて鮮やかな表現方法が得られた．それによれば

“確率とは、ルベーグ測度である.”

この言葉ほど確率の数学的本質を付いたものはない．

いままで明瞭な定義をしないで用いられていた確率変数、事象、等という言葉は、この立場に立って始めて明確な表現を得た．確率変数は可測関数で、事象は可測集合である．』(伊藤清「確率論の基礎」,[3])

『ウィーナーとレヴィだけは全然違う．つまり，確率論という新しい科学，新しい数学の文化があって，それには新しいタイプのおもしろさがあるのだ．そのおもしろさを研究するために，いろいろな他の技術を使うのである．―― そういうふうに言えるようなものを,レヴィのものを読んで感じたわけです．』(伊藤清「つれづれなるままに」(1985年 関西確率論セミナー講演),[4]
『当時の研究の大部分は，統計法則の数学的解明を念頭において独立確率変数列の行動を調べるというものであった．微分積分学でいえば，級数論に相当する部分である．むろんそれよりも難しく，また内容も豊かなものであったが，数学の他の分野に較べると，貧弱に思われ，これに打ち込むという気は起らなかった．確率論の内容に真に興味を覚えたのは，昭和 12 年にでたフランスの数学者ポール・レヴィの独立確率変数の和の理論を読んだ時である．・・・これなら精魂 傾けて深く研究したいと思った．』(「確率論と私」伊藤清から「数学の研究を始めた頃」,[6])
『伊藤教授は学生時代，物理の統計力学の話を聞き，気体分子の運動のようなデタラメな動きが，全体では一つの簡単な数式で見事に表されることに感心した．しかし，そこで使われている数学は，数学的にみると非常に不完全だ．『これを取り扱える数学が何とか出来ないものか』と考えているころに，ソ連のコルモゴルフ，アメリカのウィーナー，フランスのレビらがデタラメ現象を数学的に厳密に取り扱う方法の考え方を出してきた．『これならいける』と，確率過程研究の道に入っていった．
　その考え方とはこうだ．ある物体の運動を三回測定したら，三つの状態量が出てくる．これは三次元空間の一点として表される．これを連続して測定すると無限個の状態量が出て来るので，無限次元空間の一点で表すことができる．水の中にインクの微粒子を一つ落とした場合を考えると，微粒子は熱運動をする水分子にデタラメに衝突されてジグザグの運動をする．衝突のショックを状態量としてとらえると，無限次元のショック空間に，全体をたし合わせると確率 1 になる濃淡のある雲のようなものができる．これを測度と呼ぶ．この雲から一点を取り出すと，やはり無限次元の実際の運動空間内での一点が決まって来る．だからショック空間の雲に対応して運動空間の雲が決まる．この対応の仕方を表現するのが確率微分方程式なのだ．別の言い方をすると，確率過程とは,無限次元空間での関数解析である.』(伊藤清朝日賞受賞　朝日新聞記事(1978 年 1 月 5 日),[1])

　京都大学数理解析研究所図書室には，伊藤―Henry P.McKean の Diffusion Processes and their Sample Paths のもととなった原稿が 3 種類保存されている．一つは Rockefeller 版，一つは京都版（タイプ版），そしてもう一つは京都版（手書き）である(伊藤，Henry P.McKean，[7])．現在，本として出版されているものに最も近いのは Rockefeller 版であると思われる．
　数理解析研究所図書室の地下書庫には，手書きの原稿が大切に保管されている．その原稿には，Path の図や DIAGRAM がふんだんに描かれている．章によっては鉛筆で，章によっては万年筆（青インクのペン）で書かれた後，赤ペンや鉛筆，ブルーの色鉛筆で加筆・修正が加えられていて，数学が生まれ出るその息吹を感じることのできるものとなっている．
　製本され，Springer から出版されているものには，目次の前に次のように記されている．

DEDICATED TO
P. LÉVY
WHOSE WORK HAS BEEN
OUR SPUR AND ADMIRATION

『日本の大学に長期滞在した外国の数学者は、ある時期までは極めて少なかった．戦後、マッキーンより早い時期に長期間日本に滞在した外国の数学者は、私が知る限りではシュヴァレーだけではないかと思う．マッキーンは 1957 年 9 月から 58 年の 6 月末までの約 10 カ月間、京都に滞在した．そのとき彼は 26 歳で、私の記憶に間違いがなければ、彼が MIT の教授になることが決定した直後だと思う．

彼の 10 カ月間の京都滞在は、伊藤先生との共同の本 Diffusion Processes and their Sample Paths を完成するために当てられた.』　　　　　　　（池田信行「時代を先駆ける数学者　伊藤清」[11]）

3 D.Mumford の視点

レヴィ‐伊藤の結果が示されてから半世紀以上過ぎた 1999 年にイタリアで女性数学者たちが主催した「第３−千年紀へ向けての数学」と題する集会が行われ，D. Mumford は「The Dawning of the Age of Stochasticity(確率時代の夜明け)」の表題で講演した.

その中で次のように主張している.

『確率における研究の基本的対象物は不規則変数であり、それは空間、群、関数といった基本的構成物として扱われるべきもので、それを測度論を用いて定義するのは人為的で不自然である.』

『確率や不規則変数は数学の基礎になり得、それらはより本質的で強力な体系をなすことを提案する.』

『確率の基本理論を展開するには二つのアプローチがある.

一つは、可能な限り、確率の言葉を削り、測度理論へと簡略化することである．そこで確率空間Ωはなくなり、集合 X には、Ω上の確率測度の写像ｘの下での像で得られる p(x)あるいは p(x)dx が与えられる.

もう一つは「不規則変数」の概念を中心に持ってきて、可能な限り不規則変数を操作するものである. これら二つのスタイルを対比させる例がある.』

『実数値不規則変数ｘの’infinite divisibility’(ID)のコンセプトを考えよう．x の確率密度関数を p(x)と表す．すると、もし、どのｎに対しても $p=q_n*\cdots*q_n$（n 個の因数 q_n）となる確率密度関数 $q_n(x)$ があれば、ｘはＩＤである．言い換えると、どのｎに対しても、互いに独立で同じ分布をしている不規則変数 y_i をもちいて、$x\sim y_1+y_2+\cdots y_n$ であるといえる.』

『これは、表記の単純な変化に過ぎないが、この二通りの方法でレヴィ・キンチン理論について述べるときに何が生じるか考えてほしい．最初の方法では、この理論は p(x)のフーリエ変換が次のように表される場合のみ、ｘはＩＤであることを述べている.

$$p(x)=e^{iax-bx^2-c\int\ (e^{ixy}-1-\frac{ixy}{1+y^2})du(y)}$$

（Lévy‐伊藤表現ともいわれている）

二番目の方法では、同じ条件が不規則変数ｘを使って直接以下のように表される.

$X\sim a+bx_{normal}+c\Sigma(x_i-収束係数\ c_i)$

ここで x_{normal} は標準正規分布変数、$\{x_i\}$ は密度μのポワソン過程である.

さて、これらは実に違うものに見える！私にしてみれば、二番目の方法でレビ・キンチン理論を説明するほうがはるかに明確である．その不規則変数を明確にすることにより、その結果の真の確率的意味が

明らかになる.

簡略家の方法では、不規則変数は測度で定義される．その測度は、実数の理論で定義され、その実数の理論は集合論で定義され、その集合論は述語計算のうえで定義される．私は代わりに、不規則変数を論理学と数学の両方の基礎に入れ、確率的視点においてより完璧でより透明度の高い公式に辿り着くはずだといいたい.

私は、これに関して完璧な公式を持っていないが、二つの源の上に描かれたスケッチはとても挑発的に見える．最初のものは、ジェインズによって展開されたベイズの確率統計の基礎である（Jaynes 1996-2000)．二番目のものは連続体仮説を反証するためのクリストファー・フレイリングによる美しい確率的議論である（Freiling 1986).』

『私の全体的結論は、確率的方法は第3-千年紀の最初には、純粋数学及び応用数学を変えると信じているということである．確率と統計学は科学的モデリングだけでなく数学においても使われるべき自然の道具として見られるようになるであろう．知的世界は全体に、論理学を美しい優雅な理想像としてみなすが、統計学を私たちが推論し考える標準的方法とみなすようになるであろう.』

(D. Mumford, 2000,[8])

2006年の国際数学者会議ICMで， 大きな賞が2つ確率論にもたらされた． 1つはウェルナーのフィールズ賞であり，もう一つは伊藤清の第1回ガウス賞である．ウェルナーはパリのエコール・ノルマルでルガールの指導のもと， 確率論を学んだが， ルガールはLévyの流れを汲むヨールの影響を色濃く受けており， これら2つの賞にLévyは関わったこととなる． この後， 確率論の数学における位置づけが大きく変わったといわれている.

参考文献

[1]朝日新聞，伊藤清朝日賞受賞新聞記事，1978年1月5日

[2]飛田武幸，名古屋確率論セミナーノート，2015

[3]伊藤清，「確率論の基礎」，1944

[4]伊藤清，「つれづれなるままに」(1985年 関西確率論セミナー講演)，1985

[5]伊藤清， 確率論と歩いた 60 年， 第 14 回京都賞記念講演抄録， 1998

[6]伊藤清,確率論と私，岩波書店，2010

[7]伊藤清，Henry P.McKean, Diffusion Processes and their Sample Paths, 手書草稿，1958

[8]D. Mumford,「The Dawning of the Age of Stochasticity」, 2000

[9]ポールレヴィ，A special problems of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions, 第3回バークレー・シンポジウム, 1955

[10]ポールレヴィ，飛田武幸・山本喜一訳，「一確率論研究者の回想」，1973

[11]高橋陽一郎，「伊藤清の数学」，日本評論社，2011

資料

ブラウン運動

https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%96%E3%83%A9%E3%82%A6%E3%83%B3%E9%81%8B%E5%8B%95#/media/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:BrownianMotion.svg