第 32 回数学史シンポジウム：2022(令和 4 年)10 月 15–16：津田塾大学

明治期に日本人が理解した至る所微分不可能な連続関数

河野 敬雄
e-mail: kono.norio.58x@st.kyoto-u.ac.jp

★古市公威像 (東大本郷キャンパス，2022.9.1 筆者撮影)

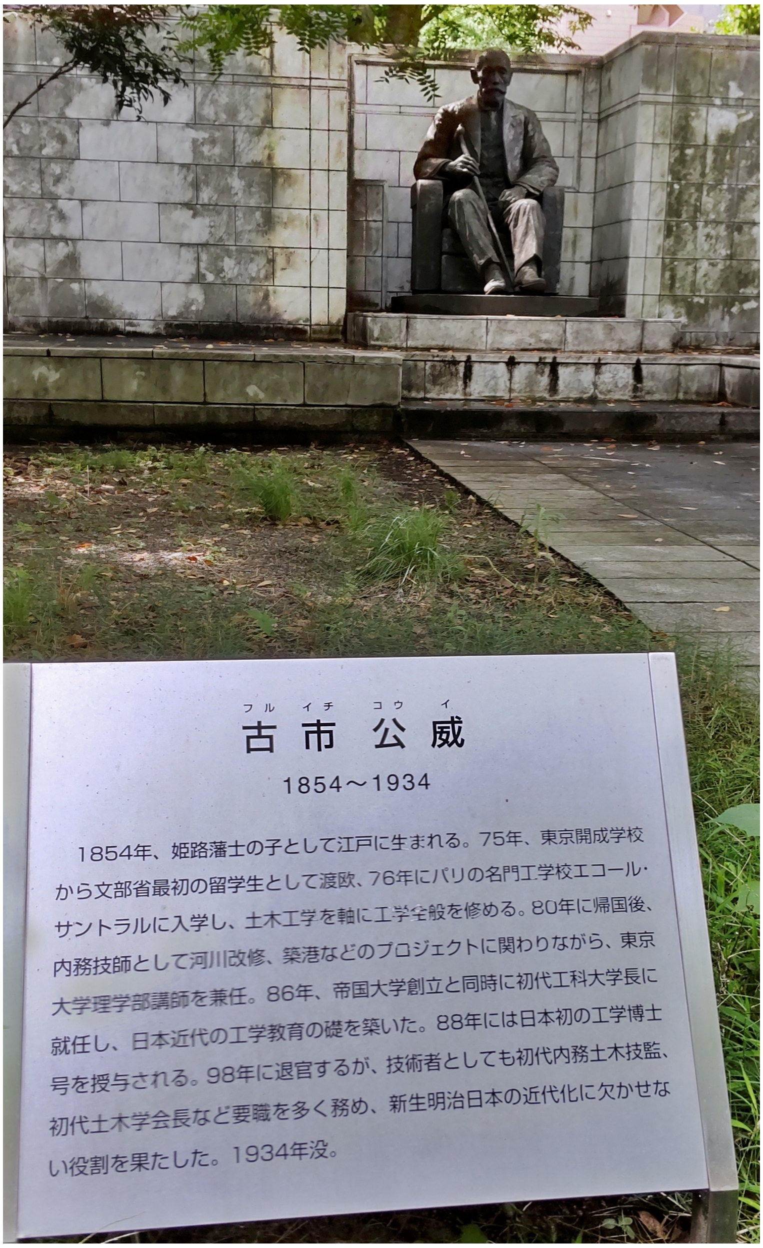

図 1: 古市公威顕彰碑

図 2: 古市公威顕彰碑

1. 微係数，定義と用語

まず最初に微係数に関するいくつかの定義と用語を確認しておく．

定義 1.1. $f(x)$ をある開区間 I で定義された実数値連続関数とする．このとき，各点 $x \in I$ に対して 4 通りの微係数 $\overline{f}^{+d}(x), \underline{f}^{+d}(x), \overline{f}^{-d}(x), \underline{f}^{-d}(x)$ を次のように定義する．

$$\overline{f}^{+d}(x) \equiv \overline{\lim}_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \text{右上微係数} \tag{1.1}$$

$$\underline{f}^{+d}(x) \equiv \underline{\lim}_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \text{右下微係数} \tag{1.2}$$

$$\overline{f}^{-d}(x) \equiv \overline{\lim}_{h\downarrow 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \quad \text{左上微係数} \tag{1.3}$$

$$\underline{f}^{-d}(x) \equiv \underline{\lim}_{h\downarrow 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \quad \text{左下微係数} \tag{1.4}$$

定義 1.2. 関数 $f(x)$ が点 $x \in I$ において「有限の微係数を持つ」とは，上記４種類の微係数が有限値ですべて一致する場合をいう．

定義 1.3. 関数 $f(x)$ が点 $x \in I$ において「無限大を含めて微係数を持つ」とは，上記４種類の微係数が $+\infty$ または $-\infty$ を含めてすべて一致する場合をいう．

注： 1.1. ４つの微係数が一致して $+(-)\infty$ の場合は点 x で関数は増加（減少）の状態にある．この場合，$+\infty(-\infty)$ の微係数を持つという．例えば，$f(x) = x^{1/3}$ は点 $x = 0$ において $+\infty$ の微係数が存在するが有限の微係数は持たない．f が点 x で下向きの尖点の場合，たとえば $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x = 0$ では，左上，下微係数 $= -\infty$，右上，下微係数 $= +\infty$ となり一致しない．

定義 1.4. 連続関数 $f(x)$ がすべての点 $x \in I$ において有限の微係数を持たない場合，関数 $f(x)$ は区間 I 上至る所微分不可能であるという．

定義 1.5. 連続関数 $f(x)$ がすべての点 $x \in I$ において無限大を含めて微係数を持たない場合，関数 $f(x)$ は区間 I 上至る所無限大を含めて微分不可能であるという．

2. 至る所微分不可能な連続関数についての歴史的経緯

17 世紀に開発整備された微積分学は 18 世紀には大きく発展して幾何学，代数学と並ぶ数学の 1 大分科に成長した．19 世紀に入るとコーシー，ガウス等数学をより厳密に基礎づけようと試み始める．然しながらワイエルストラウスによると当時はまだ連続関数はたかだか孤立した点でのみ微係数を持たない可能性があると信じられていた．その常識に一石を投じたのがリーマンであった．

以下よく知られている事実を簡単に紹介しておく [1]．

１．Riemann の例 (1861)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 \pi x)}{n^2} \tag{2.1}$$

Riemann は証明を与えておらず，その後多くの人が証明を試みて失敗し，最終的には Gerver(1970, [4]) によって $f(x)$ は点 $x = b\pi/a$(但し，a, b は互いに素な奇数) において微係数 $-1/2$ を持つ事が証明され，Riemann の予想は否定的に解決された．

２．Weierstrass の例 (1872)．彼は Riemann の結果を疑問視して彼独自の例を提出し，無限大を含めて至る所微分不可能であることを証明した ([8],[15])．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad (0 < a < 1,\ ab > 1 + \frac{3\pi}{2},\ b = \text{odd integer}) \tag{2.2}$$

３．Hardy の結果 (1916, [5])．Hardy は Weierstrass の定理の結果を，条件を緩める代りに結論も弱め，至る所「有限の微係数」を持たないことを証明した．

定理 2.1. ([5],Theorem 131)

$$C(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x),\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin(b^n \pi x) \tag{2.3}$$

[1]cf. 徳永ー鹿野 [14]

は $0<a<1,\ b>1,\ ab\geq 1$ ならば両者とも至る所有限の微係数を持たない．なお,「有限の」を外せないことも示している (Theorem 1.32).

注： 2.1. なお，$0<a<1,\ b>0,\ ab<1$ ならば級数は絶対一様収束し，項別微分も可能で至る所微分可能な関数となるから，Riemann の例とは著しく異なる例であることが分かる．つまり，Weierstrass の例では特別な点においてのみ微分可能であるという場合は存在しない．至る所微分可能であるか，至る所微分不可能であるかの二者択一しか有り得ない例となっている．

注： 2.2. Hardy の結果を概周期関数に一般化した詳しい議論については畑政義氏の論文 (1988, [6]) を参照されたい．

４．高木関数 (1903, [13])．$f(x)=\min\{x,1-x\}, 0\leq x\leq 1$ で定義される周期 1 の周期関数とする．

$$T(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}2^{-n}f(2^n x) \tag{2.4}$$

は至る所有限の微係数を持たない．

注： 2.3. この論文は高木がドイツ留学から帰国した *2* 年後位に発表されているが，論文には結果と証明のみで，先行研究や文献，結果の意義，動機等は一切書かれていない．従って，彼が Weierstrass の例を知っていたのかどうかも不明である．なお，Hardy の論文 ([5], p.301, p.320) には Faber(1907) が高木と同じ関数 f に対して

$$F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}10^{-n}f(2^{n!}x) \tag{2.5}$$

が至る所有限の微係数を持たない例として紹介してあるが原論文で確認することはできなかった．残念ながら Hardy の論文には Takagi(1903,[13]) のことは紹介されていない．

注： 2.4. Takagi 論文をより一般化した議論については ([10]) を参照されたい．

5. 河野 敬雄 (1994, [11]) Nowhere differentiable functions constructed from probabilistic point of view.

ブラウン運動の見本関数に関する局所時間と同じ性質を持つ関数を構成した．

3. 明治期に日本人が理解した至る所微分不可能な連続関数

東京數學會社雑誌第五拾號 (1882, 明治 15 年 8 月) に次のような記事が掲載されている (以後,「記事」と略記する)．

雑録　(一) 微係數ヲ有セサル聯續函數ノ説

左ニ掲クル者ハ社員古市公威君巴里ニ在リシトキ其師ヨリ得タル者ニシテ本年第一月ノ數學會ニ於テ之ヲ演セラレタリ今余カ當日ノ記ヲ略シテ以テ廣ク同好ノ諸君ニ示ス　菊池大麓識

ここで名前の挙げられている古市公威 (1854–1934)[2] とはこの 1 年程前にフランス留学から帰国したばかりの土木技術者古市公威のことで日本土木学会初代会長としてその業績は土木学会の HP で詳しく紹介されている．菊池大麓の記事がでている東京数学会社雑誌 50 号の pdf ファイルも公開されており，ダウンロード出来る．

`http://library.jsce.or.jp/Image_DB/human/furuichi/index.html`

古市公威は帰国前の最後の年にパリ大学理学部で学び，当時の講義ノートが現在東京大学工学·情報理工学図書館に保管されている．その目録によると，彼は数学（解析学，積分学）について M.Bouquet の講義を受講していることがわかる,「其師ヨリ得タル」の「師」は M.Bouquet[3] のことで，講義ノート Leçons d'Analyse mathématique, professées par M.Bouquet, à la faculté des Paris が残されている．

実際に東大の工学・情報理工学図書館で古市の自筆の講義ノートを調べた結果，概ね次のことがわかった．

1) 至る所微分不可能な連続関数の話は Bouquet の講義の 24 あるレッスンの内のレッスン III に書いてあるが，pathological (病理的) な例として紹介してあるのではなく，次のような定理として解説してある．

定理：微係数の存在は連続関数の帰結ではない（ダルブー）[4]

この定理の証明は反例をひとつあげれば十分である．さらにいえば教育上出来るだけ容易に証明できる例が望ましいが．いわゆるワイエルストラウス関数は証明が容易ではない．その点，Bouquet の例は証明が初等的である．

現在でも至る所微分不可能な連続関数の例は pathlogical(病理的) な例であるとしか紹介されない傾向にあるが，当時のフランスの数学の認識は流石だと思われる．つまり，条件を付ければ，たとえば単調非減少な連続関数は連続濃度の点で微係数を持つことが知られているから，この定理は無条件では如何なる点でも微係数の存在は保証されないということを主張しているという意味で数理哲学上極めて重要な定式化である．

ここで，ダルブーとは数学者 G.Darboux のことと思われるが，彼が [1] で与えている同様の例と Bouquet がこの直ぐ後で与えている例とは同じではない．当時パリの数学サークルのなかで至る所微分不可能な連続関数のことが話題になっていたと思われる．

2) この定理の証明は反例をひとつあげればよいのであるが，Bouquet の講義ではより一般的な前提から説明を始めている．つまり，まず最初に単調増加数列 $\{a_p\} \uparrow +\infty$ を与えて

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots$$

が収束することを仮定し，2 次導関数までが有界な連続関数 $f(x)$ に対して

$$\varphi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f(a_p x)}{a_p}$$

が連続関数であることを証明する．さらに必要に応じて a_p と f に仮定を追加して関数 $\varphi(x)$ が至る所微分不可能な連続関数であることを証明する．そしてすべての仮定を満たす例とし

[2]詳しくは [2],[7] を参照されたい．

[3]ジャン・クロード・ブーケ Jean-Claude Bouquet（1819–1885）

[4]Théorem: L'existence des dérivées n'est pas conséquence de la continuité de la fonction(Darbaux).

て $a_n = n^n, f(x) = \cos x$ をあげているのである．

3) これに対して菊池大麓は以下のように至る所微分不可能な関数のクラスを紹介している (カナ混じり文は原文からの引用である).

「今 $f(x)$ ヲ以テ x ニ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ ニ至ルマテ何ノ値ヲ與フルモ常ニ聯續函數ナリトス其微係數 $f'(x)$ モ亦然リトス」（この仮定だけでは不十分であることは明らかであるが，例として $f(x) = \cos x$ をあげており，その限りにおいて証明は正しい．厳密な条件については後述する）．また数列 $a_p \uparrow +\infty$ は次の条件を満たすと仮定する．

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_{p-1}}{a_p} = 0. \tag{3.1}$$

このとき，

$$\varphi(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{f(a_p x)}{a_p} \tag{3.2}$$

は至る所有限の微係数を持たない連続関数である．

「記事」では最初に単調増加数列 $\{a_p\}$ と関数に仮定を置いた上で関数 $\varphi(x)$ が至る所微分不可能な連続関数であることを証明し，最後に $f(x)$ の具体例として $f(x) = \cos x$ を与えている．つまり命題として定式化することから始めている．ただし，彼の証明を仔細に点検すると f に対する最初の設定は明らかに緩すぎる．ただ，$f(x) = \cos x$ に適用する限り間違ってはいない．

以上の考察に基づく限り，古市及び菊池は微積分に関しては当時の誰よりもよく理解していたと思われるのである．特に至る所微分不可能な連続関数という当時の日本人には恐らく想像を絶する数学の話題をいち早く日本に紹介した古市と菊池のセンスは高く評価されてよいのではなかろうか．和算から出発した数学者や日本で洋算を学習した程度の数学者では当時のヨーロッパでいわばホットな話題であったと思われるこのような例の意味を理解することは到底無理ではなかったかと思われるのである．

4. 至る所微分不可能な連続関数一菊池の紹介した定理・証明の修正

数学者菊池大麓が古市の報告を整理した「記事」も現在の視点で詳しく検討すると仮定が不十分で，かつ証明も完璧ではない．本稿では可能な限り古市・菊池の証明の筋に沿って，f に対する必要最小限の仮定を設けた上で現代風に厳密な証明に書き直すことを試みる.「記事」と大きく異なる所はその都度コメントする．

なお,「記事」では連続関数の定義はいわゆる $\epsilon - \delta$ 論法を言葉で説明しているが現代流の理解をしており，この点に関しても当時の日本人数学者とは格段の違いが感じられる．

まず，$f(x)$ についての仮定を整理しておく．

仮定 4.1. $f(x); x \in \Re$ は周期 $T > 0$ を持つ実数値連続関数とする．$\max \mid f(x) \mid = M$.「記事」では有界な連続関数としか述べていないが全く不十分である．

仮定 4.2. $f \in C^1$ 即ち連続な導関数 f' を持つ．

仮定 4.3. f' は Hölder 連続性を満たす．即ち，

$$\exists A_1 > 0 \text{ and } \alpha > 0 \text{ s.t. } \forall x, y \in [0, T] \ ; \ | f'(x) - f'(y) | \leq A_1 \mid x - y \mid^{\alpha} . \tag{4.1}$$

注： 4.1. Bouquet の講義ノートでは *2* 次導関数 f'' の有界性を仮定している．ところが，菊池の論説を見ると

「今 $f(x)$ ヲ以テ x ニ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ ニ至ルマテ何ノ値ヲ與フルモ常ニ聯續函數ナリトス其微係數 $f'(x)$ モ亦然リトス」

とあって $f''(x)$ の有界性を仮定していない．しかし，彼の証明を見ると Bouquet の証明と同じところで $f''(x)$ の有界性を使っている．菊池自身本当に古市の証明をフォローしたのだろうかという疑問は残る．

仮定 4.4.

$$\begin{gathered}\exists A_2 > 0, \exists B_1, B_2,\ B_3 \text{ and } B_4 > 0 \ ; \text{s.t. } \forall x \in [0, T], \\ B_1 < \forall a < B_2 \text{ and } B_3 < \forall b < B_4 ; \left| \frac{f(x+a) - f(x)}{a} - \frac{f(x) - f(x-b)}{b} \right| > A_2 .\end{gathered} \tag{4.2}$$

少々醜い仮定ではあるが，$f(x)$ が必ずしも三角関数でなくともそれに近い関数でありさえすればよいというところがミソである．

仮定 4.5. 単調増大数列 $\{a_p\}_{p=1}^{+\infty}$ は次の条件を満たすと仮定する．

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{a_{p-1}}{a_p} = 0. \tag{4.3}$$

注： 4.2.
$$(4.3) \text{ 式} \iff \lim_{p \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1}}{a_p} = 0. \tag{4.4}$$

が容易に証明できる．

以上の仮定の下に次の定理が成り立つ．

定理 4.1.
$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(a_n x)}{a_n} \tag{4.5}$$

は至る所有限の微係数を持たない連続関数である．

注： 4.3. Darboux ([1],1875, p.107) に挙げてある例，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n+1)! x)}{n!}$$

は一層微係数を持つことは困難だと予想されるが，有限の微係数を持たないかどうかも我々の方法で証明することは出来なかった．

5. 定理 4.1 の証明

「記事」では式 (4.5) の右辺の級数が収束することと関数 $F(x)$ が連続関数であることが定義に従って証明してあるが，数列 $\{a_p\}$ が仮定 4.5 を満たすような増大度の強い数列であることから，式 (4.5) の右辺の級数が絶対一様収束することが容易に分かり，コーシーの定理から関数 $F(x)$ は連続関数であることが直ちに分かる．

関数 F が点 $x \in [0, T]$ に於いて有限の微係数を持たないことの証明：
$h_1 > 0$ として，右微係数を求めるための考察をする．

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h_1)-F(x)}{h_1} &= \sum_{n=1}^{p-1} \frac{f(a_n(x+h_1))-f(a_nx)}{h_1a_n} + \frac{f(a_p(x+h_1))}{h_1a_p} - \frac{f(a_px)}{h_1a_p} \\
&\quad + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{f(a_n(x+h_1))-f(a_nx)}{h_1a_n} \\
&\equiv T_{1,p} + \frac{f(a_px+a_ph_1)-f(a_px)}{h_1a_p} + R_{1,p} \quad \text{と置く．} \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

ここで，$T_{1,p}$ については平均値の定理によって（「記事」ではテーラー展開して第 2 次近似までを利用している．そこで 2 次導関数が有界であるという仮定が必要．）

$$\begin{aligned}
T_{1,p} &= \sum_{n=1}^{n=p-1} f'(a_nx+\theta_{1,n}a_nh_1), \quad (0<\theta_{1,n}<1) \\
&= \sum_{n=1}^{n=p-1} f'(a_nx) + \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(f'(a_nx+\theta_{1,n}a_nh_1)-f'(a_nx)\right) \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

を得る．ここで式 (5.2) の第 II 項は仮定 4.3 を用いて次のように評価できる．

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{n=p-1} |f'(a_nx+\theta_{1,n}a_nh_1)-f'(a_nx)| &\leq \sum_{n=1}^{p-1} A_1(a_nh_1)^\alpha \\
&= A_1(h_1a_p)^\alpha \sum_{n=1}^{p-1} (\frac{a_n}{a_p})^\alpha \equiv T_{1,p}(II) \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

ここで，仮定 4.5 から次の補題が成り立つことが容易に証明できる．

補題 5.1.

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p-1} (\frac{a_n}{a_p})^\alpha = 0.$$

次に $R_{1,p}$ を上から評価する．仮定 4.1 により

$$|R_{1,p}| \leq \frac{2M}{h_1a_p} \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{a_p}{a_n} \qquad (5.4)$$

が得られる．ここで，補題 5.1 と同様にして次の補題が成り立つことが容易に証明できる．

補題 **5.2.**

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{a_p}{a_n} = 0.$$

同様に，$h_2 > 0$ として，左微係数を求めるために $\dfrac{F(x) - F(x - h_2)}{h_2}$ を考察する．前述の式 (5.1) から式 (5.4) の中で用いられている $h_1, \theta_{1,n}, \theta_{1,p}$ を $h_2, \theta_{2,n}, \theta_{2,p}$ に置き換えて得られる評価式を，$T_{2,p}, R_{2,p}$ とする．式 (5.2) を見ると分かるように $\sum_{n=1}^{n=p-1} f'(a_n x)$ は共通だから，

$$|\frac{F(x+h_1) - F(x)}{h_1} - \frac{F(x) - F(x-h_2)}{h_2}| \geq$$

$$|\frac{f(a_p x + a_p h_1) - f(a_p x)}{a_p h_1} - \frac{f(a_p x) - f(a_p x - a_p h_2)}{a_p h_2})| - T_{1,p}(II) - T_{2,p}(II) - |R_{1,p}| - |R_{2,p}| \tag{5.5}$$

ここで関数 f が仮定 4.1 によって周期 T の周期関数であることに注意する．点 $a_p x$ を mod [0,T] で考えて [0,T] 上の点と看做した時の値を $(a_p x)_T$ と記すと，コンパクト集合 [0,T] 上の無限点列 $\{(a_p x)_T\}_{p=1}^{+\infty}$ は集積点 x_0 を持つ ($x = 0$ の時は自明に $x_0 = 0$)．以下，点 x_0 に収束するような部分列のみを考察する．次に，h_1 を a_p に依存して，即ち，仮定 4.4 において，$B_1 < h_{1,p} a_p < B_2$ を満たすように定める．$a_p \uparrow +\infty$ だから，$h_{1,p} \downarrow 0$ である．h_2 についても同様に，$B_3 < h_{2,p} a_p < B_4$ を満たすように定める．$a_p \uparrow +\infty$ だから，$h_{2,p} \downarrow 0$ である，

ここで改めて式 (5.5) において，h_1, h_2 を $h_{1,p}, h_{2,p}$ に置き換えて考察する．無限点列 $h_{1,p} a_p, h_{2,p} a_p$ の決め方からこれらは上と下に有界な数列であり，補題 5.1 と 5.2 から，$T_{1,p}(II)$, $T_{2,p}(II)$, $|R_{1,p}|, |R_{2,p}|$ はいずれも $p \to +\infty$ のとき，0 に収束する．従って，仮定 4.4 より任意の $\epsilon > 0$ に対して p_0 が存在して任意の $p \geq p_0$ に対して

$$|\frac{F(x+h_{1,p}) - F(x)}{h_{1,p}} - \frac{F(x) - F(x-h_{2,p})}{h_{2,p}}| > A_2 - \epsilon > 0$$

が成り立つ．ここでもし，$F(x)$ が点 x で有限の微係数を持つと仮定すると上式の左辺は 0 に収束するはずである．よって，$F(x)$ は点 x で有限の微係数を持たないことが示された．（証明終わり）

注： 5.1. 「記事」では異なる数列 $h_{1,p} \downarrow 0$ と $h_{2,p} \downarrow 0$ に対して右微係数の値が一致しないことを $f(x) = \cos x$ の場合に具体的に計算している．

謝辞：古市公威のパリ大学における講義ノート閲覧と写真撮影を許可して頂き，いろいろお話を聞かせて頂いた東京大学工学・情報理工学図書館工 1 号館図書室 A の担当者の方に衷心より感謝申し上げます．

参考文献

[1] Darboux, G.: 1875. Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série*, tome 4. 57–112.

[2] 土木学会編: 2004. 古市公威とその時代．土木学会.

[3] 古市公威: 1880. Leçons d'analyse mathématique.Professeur par M. Bouquet à la Faculté des Sciences de Paris(パリ大学理学部 Bouquet 氏による「解析学」の講義). 古市公威文庫目録 211,Jo2, UDC517 講義ノート.

[4] Gerver, J.: 1970. The differentiability of the Riemann's function at certain rational multiples of π. *Amer. Jour. Math.* 92. 33–55.

[5] Hardy, G.H.: 1916. Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.*vol.17, 301–325.

[6] Hata, M.: 1988. Singularities of the Weierstrass type functions. *J. D'analyse Mathématique.* Vol. LI, 62–90.

[7] 飯吉 精一: 1982. 古市公威. 近代土木技術の黎明期―日本土木史研究委員会シンポジウム記録集―. 土木学会日本土木史研究委員会. 15–56.

[8] 小柴 洋一: 2001. Weierstrass 論文「至る所微分不可能である連続関数の例」について. 数理解析研究所講究録 1195 巻, 62–66.

[9] 菊池 大麓: 1882. 微係數ヲ有セサル聯續函數ノ説. 東京數學會社雜誌第五拾号, 一–五.

[10] 河野 敬雄: 1987. On generalized Takagi functions. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, vol.49/3-4, 315-324.

[11] ————-: 1994. Nowhere differentiable functions constructed from probabilistic point of view. *Acta Math.Hungr.*,vol.65(3), 285-295.

[12] —————: 2022. 至る所微分不可能な連続関数を初めて理解した日本人は土木技術者だった. 2022 年度数理解析研究所共同研究：数学史の研究.

[13] Takagi, T.: 1903. A simple example of the continuous function without derivative. 誘導函數ヲ有セザル連續函数ノ簡單ナル例. *Proc. Phys. Math. Japan.* vol.1, 176–177.

[14] 徳永 秀也, 鹿野 健: 1992. 微分不可能な連続関数を巡っての小史. 津田塾大学第 3 回数学史シンポジウム, 55–76.

[15] Weierstrass, K.: 1895. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen werth des Letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. *Mathematische Werke II*, Mayer & Müller, Berlin. 71–74.