合成代数に附随したカンドルのある構成とその応用

-A Construction of Quandles associated with Nonassociative Algebras and Its Applications-

by Noriaki Kamiya（神谷徳昭）
University of Aizu, Japan （福島県公立大学法人会津大学）

Abstract This note is a study of quadratic and composition algebras, in particular, it is to give exmaples of quandle (or rack) in knot theory, and to deal with related topics associated with the quandles. That is, the contents are described about quadratic or composition algebras and an announce of triality groups as a generalization of automorphisms on nonassociative algebras. These results are a new concept and we talk about a viewpoint of mathematical history in nonassociative algebras.

§Introduction（はじめに）

数学史的な内容を含め, 非結合的代数 (nonassociative algebras) を研究している筆者が最近考えた quandle の実例を与えて， その応用について論及することが，この小論の目的です．浅学の為にもしかしたらこの方面の knot theory においては，知られた事実かも知れませんが，関連する事柄を含め，歴史的な事にも視点を向けて, 対合 (involution) をもつ $||xy|| = ||x||||y||$ を満たす代数系の立場から新しい idea として述べさせていただきます．我田引水的に言えば数理代数学の黎明としてとらえられると思います（大風呂敷をお許しください).

非結合的代数系については大久保進氏（仁科賞と Wigner medal を受賞）との共同研究 [K-O] の文献が 2 次代数，合成代数の一般化について論及してあり，$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$, $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ 等の内積 $<\ ,\ >$ （又は $\parallel x \parallel$, ノルム）を考える上で役に立つかも知れません，しかし直接，それらの結果を使うわけではないですが，合成代数に興味がある人の為に挙げさせていただきます．特に quandle の応用を研究するのに興味ある人々には，積が standard なものではないので，共役元（一般に involution をもつ積）で考えるこの小論が役に立つと思われます．つまり，この小論では quandles の例と，そこでの簡単な自己同型写像 (その一般化, triality relations について) を考察します．内容は以下の通りです．最後に 2 次代数と合成代数の歴史と予想について筆者の視点で述べさせていただきます.

§1.Preliminary.
§2.Results.
§3.Examples
§4.Generalizations.
§5.Applications.
§6.Conclusions and References.
§7.Appendix (history from a viewpoint of author).

§1. Preliminary（準備と定義）

集合 $\mathbf{M}$ とそこでの bijective なる乗法 $\circ$ が与えられたとき，次の条件 1 ）と 2）を満たす $(\mathbf{M},\circ)$ を quandle（カンドル）と言います．

1) $x\circ x=x, \quad \forall x\in\mathbf{M}$

2) $(x\circ y)\circ z=(x\circ z)\circ(y\circ z)$ for any $x,y,z\in\mathbf{M}$.

2) の条件は rack の条件です．これらは knot theory(topology) の用語です．正確には，$R_xy=y\circ x$ の右乗法 R_x が bijective です．

ここで $x*y=y\circ x$ と new product を定義すると，

3) $x*x=x$

4) $x*(y*z)=(x*y)*(x*z)$

と書き直すことができます．そして 更に $S_xy=x*y$ と表すと．

⊙ $S_xx=x$

⊙ $S_xS_y=S_{S_xy}S_x$

となり，(M,S_x) は s-mainifold とも関連します．この条件をもつ $\{S_x\}$ を s-map, $\mathbf{M}$ を s-set と呼ぶことにします（すなわちこれは generalized symmetric space の代数的概念とも一脈通じます）．勿論，S_x の多様体としての条件等を付け加えての議論です．ここでは詳しい議論には進みません．微分幾何学的な事柄とも関連すると思いますが，別の機会にさせていただきます.（例えば対称空間については O.Loos の本等を 参照して下さい）

一方 homogeneous presystem $\eta(x,y,z)$ の概念で $\eta(x,x,y)=S_xy=x*y$ とすると，$\eta(a,b,\eta(x,y,z))=\eta(\eta(a,b,x),\eta(a,b,y),\eta(a,b,z))$ が自己同型写像の概念となり，homogeneous presystem と S_x の理論とが関係します．これらについて詳しくは [K-S.1], [K-S.2] を参照して下さい（$\eta(x,x,\eta(y,y,z))=S_xS_yz$ に留意して下さい）.

この小論では 1) と 2) は 3) と 4) と同値ですので，3) と 4) を満たす乗法 $*$ をもつ代数系で考察します．つまり，乗法をもつある集合の中で，$\lambda*\lambda=\lambda$ の元 λ を見つけることです．以上の事から 3) と 4) を満たす S_x を s-map，M を s-set と呼ぶことの理由です.

§2. Results（主要な定理）

$1<q<r<p,\ p$ を素数，q,r を自然数，$qr\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ かつ q と r のいずれも平方数でないとする（従って $p\neq 2$ です）.

例えば $p=5,\ q=2,\ r=3,\ p=7,\ q=3,\ r=5, p=11, q=7, r=8$ 等の対 $(p,\ q,\ r)$ を考えます．そして，有限体 $\mathbf{Z}_p=\mathbf{Z}/(p)$ 上の $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ を考察します（以下この条件で考える）.

積は $xy=(m+n\sqrt{q}+l\sqrt{r})(m'+n'\sqrt{q}+l'\sqrt{r})$，共役元は $\overline{x}=m-n\sqrt{q}-l\sqrt{r}$ if $x=m+n\sqrt{q}+l\sqrt{r}$ です（この積を standard product と呼ぶことにします）.

ここで内積（ノルム）を次の様に定義します.

$$\| x \|=\sqrt{<x,x>},\ <x,y>=\frac{1}{2}(x\overline{y}+y\overline{x})\in\mathbf{Z}_p.$$

勿論 $\mathbf{Z}_p$ 上での 2 次代数 (quadratic algebra) です．つまり $1,x,x^2$ が 1 次従属であり，

$$xx-(x+\overline{x})x+\overline{x}x=0$$

を満たします．又合成代数の性質：

$$\| xy \| = \| x \| \| y \| \quad (< xy, xy > = < x, x > < y, y >)$$

が成立します．ここで $\| x \|^2 = < x, x > = x\overline{x} \in \mathbf{Z}_p$ です．ただし $< x, y >$ は非退化とは限りません．

共役を拡張した involution(対合)$\overline{xy} = \overline{y}\ \overline{x}$ なる式を満たします.

以下の議論の為に次のような記号を導入し，用いることにします．

$M_2(p,q,r) := \{ \begin{pmatrix} m & nq+l \\ n+lr & m \end{pmatrix} | m,n,l \in \mathbf{Z}_p \}$, (analogous of matrix representation of the complex number), if $q = -1, r = 0$, then it is a characterization of complex number.

$GL(M_2(p,q,r)) := \{A \in M_2(p,q,r) | \det\ A \neq 0\}$,

$SL(M_2(p,q,r)) := \{A \in M_2(p,q,r) | \det\ A = 1\}$,

$N(p,q,r) := \{x \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] |\ \| x \| = 1\}$.

定理 1（行列式とノルムの関係）　上記の記号のもとで

$\phi : \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] \to M_2(p,q,r)$ (as algebra, ϕ is a homomorphisum)

$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]^{\times} \cong GL(M_2(p,q,r))$ (as group)

$N(p,q,r) \cong SL(M_2(p,q,r))$ (as group)

が成り立つ．

証明　$x = m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r}$ と $A = \begin{pmatrix} m & nq+l \\ n+lr & m \end{pmatrix}$ が $\mathbf{Z}_p$ 上準同型となり，

$$\| x \|^2 = < x, x > = m^2 - n^2 q - l^2 r - 2nl$$

$$\det\ A = m^2 - n^2 q - l^2 r - 2nl$$

が成り立つので，$\| x \| = 1$ と $\det\ A = 1$ の同値性が示せます．勿論 $< x, x > \geq 0$ の為に，標数 p で考え，well-defined は仮定します．$\square$

Remark.　$\exists (n,l) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$, s.t. $nq + l \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, $n + lr \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ が $Ker\ \phi$ の元を生成します（勿論 $m = 0$ です）．

Remark.　簡単なことですが，次が成り立ちます.

$$SL(M_2(p,q,r)) \triangleleft GL(M_2(p,q,r)). \text{（正規部分群）}$$

$$\text{そして}\quad \tilde{Q}(N(p,q,r)) := \{\lambda \in N(p,q,r) | \lambda\lambda = \overline{\lambda},\ \lambda \text{ is invertible}\},$$

と $\tilde{Q}(N(p,q,r))$ を定義します（weak quandle の原型です)．また $N(\tilde{Q})$ を $\lambda \in \tilde{Q}$ の個数とする. 更に

$$x * y = \overline{xy}$$

によって new product $*$ を導入すると，この積 $*$ で $\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ は $\lambda * \lambda = \lambda$ と表せます．

Remark　$(\sqrt{< \lambda, \lambda >})^2 = \| \lambda \|^2 = \lambda\overline{\lambda}$ なので，勿論 $x * \overline{x} = \overline{x}x = < x, x >$ です．
$\tilde{Q}(N(p,q,r)) \ni \lambda$ が invertible $_{iff} <=> \| \lambda \| \neq 0$.

実際

$$\lambda\frac{\overline{\lambda}}{<\lambda,\lambda>}=1 \text{ if } <\lambda,\lambda>\neq 0$$

より λ は invertible です．更に $\lambda^2=\overline{\lambda}$ より $\|\lambda^2\|=\|\lambda\|$ かつ $\|\lambda\|\neq 0$ ならば，
$\|xy\|=\|x\|\|y\|$ が $\forall x,y\in\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ において成り立つので，$\|\lambda\|^2=\|\lambda\|\|\lambda\|$ から
$\|\lambda\|^2=\|\lambda\|$. $\|\lambda\|\neq 0$ のとき，$\forall\, x$ に関して $\|x\|^2\in\mathbf{Z}_p$ だから

$$\|\lambda\|=1.$$

以上より，λ が invertible, かつ $\lambda^2=\overline{\lambda}$ のとき，ノルム 1 の元で，$\tilde{Q}(N(p,q,r))$ を考えることが可能です．ここで，λ が 0 でなくても $\|\lambda\|=0$ となるノルム 0 の元 λ が存在することに留意して下さい（内積 $<\,,\,>$ が非退化とは限りません）．

$$\tilde{Q}(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}])=\{\lambda\in\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]|\lambda*\lambda=\lambda,\ \lambda\text{ is invertible}\}$$

とおき，weak quandle と呼ぶ．これを $\tilde{Q}$ と表す．この $\tilde{Q}$ を用いて，$Q_\lambda=\{\lambda\in\tilde{Q}|1,\lambda,\overline{\lambda}\}$ と置くと次のことが成立する．

定理 2（カンドルの構成）　$\tilde{Q}$ が weak quandle のとき, Q_λ はカンドルであり，この $\tilde{Q}$ は更に次の様に表示できます

$$\tilde{Q}=\cup_{\lambda*\lambda=\lambda}Q_\lambda\ (Q_\lambda\text{の和集合}).$$

詳しい証明は略しますが，$1*\lambda=\overline{\lambda},\ \overline{\lambda}*\overline{\lambda}=\lambda\cdot\lambda=\overline{\lambda}$ 等を用います．

Remark　For the new product $x*y$, note that $<x*y,x*y>=<x,x><y,y>$ (composition law) and $<x*y,z>=<x,y*z>$ (symmetric associative law w.r.t. the bilinear form $<x,y>$), but for the standard product xy, we have $<xy,z>\neq<x,yz>$ and $<xy,xy>=<x,x><y,y>$.

ここでは　体 F 上の代数 A(単位元 1 をもたない場合も仮定する) が 2 次代数 (quadratic algebra) とは $\forall x\in A$ に対して $ax^2+bx+c=0$ となる $a=b=c=0$ 以外の $a,b,c\in F$ が存在するときと定義する.（単位元をもつときは $1,x,x^2$ が 1 次従属です).

Remark　単位元を持たない 2 次代数を変形した代数 $(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}],*)$ の考察であり，そして特に $\tilde{Q}$ の乗法 $*$ は非結合的 (nonassociative) です．つまり $(x*y)*z\neq x*(y*z)$ となり，standard product の記号で表すと，

$$\overline{\overline{(xy)}z}\neq\overline{x\overline{(yz)}}\ \ (i.e.,\ \overline{z}(xy)\neq(yz)\overline{x})$$

を意味するので，非結合的乗法 $*$ を持つ代数系で, $1*x=\overline{x}$　(para unit)（ここで $^-$ は共役です, つまり対合をもつ代数系を考えています）．

以上より共役 (対合) をもつこの様な代数系が weak カンドルの例になると考えます．

{ ノルム 1 かつ巾等元 (idenpotent) がカンドルを生成します }.

§3.Examples（実例について）

最初に簡単な例を $\mathbf{Z}_3[\sqrt{2}]$ 場合は $\lambda=1$ のみが $\lambda*\lambda=\lambda$ を満たします.　$\mathbf{Z}_5[\sqrt{3}]$ の場合は $\{1,2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\}$ がその条件を満たし, $\|\lambda\|=1$ の元は 6 個です.

次に $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ において，特に素数 p が小さい時の weak quandle の例を以下に列挙します．

($\sharp$) $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2},\sqrt{3}]$;　$\lambda * \lambda = \lambda$ の元．
$(m,n,l) : \lambda = m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r}$ とおく．

(1,0,0)
(2,0,1),　(2,0,4).
(2,1,2),　(2,1,4),
(2,2,0),　(2,2,2)
(2,3,0),　(2,3,3)
(2,4,1)　(2,4,3)

これらは 11 個存在します．$\lambda = 2+\sqrt{3}$ のとき $\overline{\lambda} = 2+4\sqrt{3}$ です．記号で表すと $N(\tilde{Q}) = 11$.
xy なる standard product では $\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ を満たします．
$\parallel \lambda \parallel = 1$ の元の個数は 30 個．つまり $a^5 = 1,\ b^6 = 1$ の元の積が $\parallel \lambda \parallel = 1$ を満たします．従って $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ においては，weak quandle $\tilde{Q}$ を具体的に求められます．

$$\begin{array}{ll}
\lambda = 2+\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\lambda = \{1,\lambda,\overline{\lambda}\} \\
\mu = 2+2\sqrt{2}\text{のとき} & Q_\mu = \{1,\mu,\overline{\mu}\} \\
\nu = 2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\nu = \{1,\nu,\overline{\nu}\} \\
\kappa = 2+\sqrt{2}+4\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\kappa = \{1,\kappa,\overline{\kappa}\} \\
\xi = 2+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\xi = \{1,\xi,\overline{\xi}\}.
\end{array}$$

これらの $Q_\lambda, Q_\mu, Q_\nu, Q_\kappa, Q_\xi$ がそれぞれ quandle であり，weak quandle $\tilde{Q}$ は $\tilde{Q} = Q_\lambda \cup Q_\mu \cup Q_\nu \cup Q_\kappa \cup Q_\xi$ （$\tilde{Q}$ は 11 個の要素の集合）です．$Q_\lambda, \cdots, Q_\xi$ 達の共通集合は $\{1\}$ のみです．

$$(2+\sqrt{3}) * (2+2\sqrt{2}) = \overline{1+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{2}+3\sqrt{3} \notin \tilde{Q}\text{です．}$$

$*$ の積で $\tilde{Q}$ は閉じていません．

($\sharp$) $\mathbf{Z}_{11}[\sqrt{7},\sqrt{8}]$;　$\lambda * \lambda = \lambda$ の元．
(m,n,l) :

(1,0,0),　(5,0,5),　(5,0,6)　(5,1,9),
(5,1,10)　(5,2,2),　(5,2,3),　(5,3,6),
(5,3,7),　(5,4,0),　(5,4,10),　(5,5,3),
(5,5,4),　(5,6,7),　(5,6,8),　(5,7,0)
(5,7,1),　(5.8.4),　(5,8,5),　(5,9,8)
(5,9,9),　(5,10,1),　(5,10,2)

これらは 23 個存在します．$N(\tilde{Q}) = 23$ です
$\parallel \lambda \parallel = 1$ の元の個数は 132 個．$a^{11} = 1,\ b^{12} = 1$ の元の積が $\parallel \lambda \parallel = 1$ を満たします．

($\sharp$) $\mathbf{Z}_{17}[\sqrt{5},\sqrt{7}]$;　$\lambda * \lambda = \lambda$ の元．

(m,n,l)):

(1,0,0),	(8,0,3),	(8,0,14),
(8,1,9),	(8,1,15),	(8,2,4),
(8,2,10),	(8,3,5),	(8,3,16),
(8,4,0),	(8,4,11),	(8,5,6),
(8,5,12),	(8,6,1),	(8,6,7),
(8,7,2),	(8,7,13),	(8,8,8),
(8,8,14),	(8,9,3),	(8,9,9),
(8,10,4),	(8,10,15),	(8,11,10),
(8,11,16),	(8,12,5),	(8,12,11),
(8,13,0),	(8,13,6),	(8,14,1),
(8,14,12),	(8,15,7),	(8,15,13),
(8,16,2),	(8,16,8)	

これらは35個存在します．$N(\tilde{Q}) = 35$

$\parallel \lambda \parallel = 1$ の元の個数は306個．$a^{17} = 1,\ b^{18} = 1$ の元の積が $\parallel \lambda \parallel = 1$ を満たします．

Remark $\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{7}, \sqrt{11}]$ について，$\parallel \lambda \parallel = 1$ なる元については $a^{18} = 1,\ b^{19} = 1$ なる元の積が λ の元です．そして $\lambda * \lambda = \lambda$ の個数は39です．$N(\tilde{Q}) = 39$, 別の例として $\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{3}, \sqrt{13}]$ では $\lambda * \lambda = \lambda$ の元は1個．$\parallel \lambda \parallel = 1$ の元は 19×20 個です．

Remark $\mathbf{Z}_7[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$ においては $\parallel \lambda \parallel = 1$ の元は56個ですが，$\lambda * \lambda = \lambda$ の元は1個です．$\lambda = 1$ のみです．

Remark 上記の方法で，$2p+1$ 個の元をもつweak カンドルが構成できると思います．

Remark $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ の p, q, r の選び方により，$\lambda * \lambda = \lambda$ の元は1個の場合も存在．

Remark 2次代数の例の $\mathbf{Z}_3[\sqrt{2}]$, $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}]$ 等における $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体の $\lambda * \lambda = \lambda$ なる元は多くても3個です．カンドルの例としてはあまり興味が持てませんので省略します．

しかし少しだけ述べますと，2次代数 $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}] (p \neq 2, 3)\ 0 < q < p$ については

(a) $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体

$_{iff} \Longleftrightarrow$ ノルム1の元の個数が $p+1$ 個

(b) $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体でない

$_{iff} \Longleftrightarrow$ ノルム1の元の個数が $p-1$ 個

a) のとき，$p+1$ が3の倍数ならば，$\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ の元の $\lambda (\neq 1)$ が存在する．この時，$Aut_* \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}] \cong S_3$ （ただし $x * y$ の積で考察). i.e., $g(x * y) = g(x) * g(y)$ なる自己同型群が3次の対称群を生成します. $\{1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ なるset における automorphism が重要なのです.

$p+1$ が3の倍数でない時 $Aut_* \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}] \cong \mathbf{Z}_2$.

b) のとき，$p-1$ が3の倍数ならば，$\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ の元の $\lambda \neq 1$ が存在する．a) の時と同様に b) の時も自己同型が存在します．つまり $Aut_* \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}] =\cong S_3$ 又は $p-1$ が3の倍数でない時 $\mathbf{Z}_2$ です．

以上の $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ の結果はunpublished paper (in preprint [2017] 筑波大学の増岡彰氏との

共同研究) ですが，解明しました（勿論 p, q に依存して, 平方剰余の概念を用いない方法によってです）．ここに記録の為に記しておきます.

例　$\mathbf{Z}_7[\sqrt{2}]$ は体でなく、$x * y = \overline{xy}$ による積で $1 * x = \overline{x}$ となり単位元が存在しない、内積が $< 1+2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2} >= 0$ となる非結合的な代数系です (不思議な性質を持ちます).

Remark　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ における $\lambda * \lambda = \lambda$ の元の性質と $\| \lambda \|= 1$ なる元の個数についても，予想が可能です．ここでは議論に深入りせず，quandle の例が new product のもとで与えられることだけを述べたいと思います.

Remark.　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ において $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ と $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ の両方が体でない必要十分条件は $\| \lambda \|= 1$ の元の個数が $p(p-1)$ である．どちらかが　体のときは $p(p+1)$ である,（このような予想が成り立つと考えます）.

この章の最後に結果だけですが triality group (三対群)（ 定義は 5 章参照）を考えと $Trig_* \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}] \cong S_4$ or S_4 の部分群となります (p と q に依存します).

§4. Generalizations（一般化について）

前節までに $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ における quandle の例を述べましたが，そこでの idea は，次の様に一般化できると考えます.

(A, xy) を単位元 1 をもつ associative, commutative, involutive ($\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$) algebra とする．ここで $x * y = \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ で new product を定義する．A はベクトル空間としては同じですが，代数構造が異なる xy と $x * y$ の積が存在します．そして $1 * x = \overline{1x} = \overline{x}$ であり，単位元を持たない非結合的代数です．この 1 は para unit と呼ばれるものです.

$$\tilde{Q}(A) := \{x \in A | x * x = x,\ x \text{ is } invertible\}$$

と定義すると，$\tilde{Q}(A)$ は weak quandle の構造を持つ．ただし，$x * y$ は非結合的な乗法 $*$ を持つ代数系です（正確には $x * y \in \tilde{Q}(A)$ とは限りません）．この様な $\tilde{Q}(A)$ を研究するのも，将来への課題です．つまり weak カンドルの実例を与えると考えます（巾等元の構造を調べる)．$N(\tilde{Q}) := the\ number\ of\ \{\lambda | \lambda * \lambda = \lambda\}$ ($\tilde{Q}$ の個数) を調べる.

Let B be a commutative associtative algebra with a binary product xy.

$$\tilde{Q}(B) = \{\lambda \in B |\ \lambda\lambda = \lambda, \lambda \text{ is invertivle}\}$$

$$Q(B) = \{\kappa \in \tilde{Q}(B) | \kappa = \mu\nu,\ {}^{\forall}\mu, \nu \in \tilde{Q}(B)\}\ \ \text{(乗法で閉じている為の条件)}$$

$$S_x y = xy\ \ \forall x, y \in Q(B)$$

と定義する．この時 ${}^{\forall}x, y \in Q(B)$ に対して $S_x x = x,\ S_x S_y = S_{S_x y} S_x$ が成り立つ．S_x が自己同型、つまり $Q(B)$ は s-set，$\{S_x\}$ は s-map．カンドルの例です．ただし $\tilde{Q}(B)$ は一般に閉じていない可能性があります.

別の視座からもう少し述べます．単位元を必ずしも持たない代数系として $x * y$ を乗法とする．ここでは $< x, y >$ の非退化は仮定していません.

⊙ $(x*y)*x = x*(y*x) =< x, x > y$　(called quasi symmmetric composition algebra)

⊙ $\| x * y \| = \| x \| \| y \|$ (called pre composition algebra)

$\odot$ involution $\overline{x*y} = \overline{y}*\overline{x}$ を持ち，$x*\overline{x}, x+\overline{x} \in$ base field,
$x, x*x, 1$(para unit) が 1 次従属なもの，つまり

$$x*x-(x+\overline{x})*x+x*\overline{x}=0$$

なる関係式を満たす（これを para quadratic algebra と呼ぶ）.

この様な 3 種類の非結合的代数系が考えられると思います（乗法の単位元を持たない代数系）ただし $< x, y >$ は非退化とは限りませんし，$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}], \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}], \mathbf{Z}_p[i,j,k], \mathbf{Z}_p[e_1, \cdots, e_7]$（有限体上の 2 次元，3 次元、4 次元，8 次元代数）が，これらの実例です．将来の研究課題です．究極としては Meson と Baryon の特徴ずけに現れる Gell- Mann ((1929-2019), quark 理論のノーベル賞受賞者）の 8 次元代数 (pseudo octonion algebra or symmetric composition algebra, Lie admissible algebra) の $\mathbf{Z}_p$ 上での研究です (数理物理学との関連が期待可能です．有限体上の素粒子模型ーー大袈裟ですが)．これらの代数系で三対関係（三対群、三対原理）を考察したいのです．[K-O] における $\mathbf{Z}_p$ version です．

It emphasizes that concept of a local triality relation (triality derivation) in this paper is a generalization of "principle of triality" due to J. Tits.

§5.Applications（応用）

Let (M, S_x) be a s-set with s-map S_x defined in section one (i.e.,satisfying (3) and (4)).

We shall now define an endomorphism $g \in Epi(M, S_x)$ as follows;

$$gS_x = S_{gx}g.$$

Then it is said to be a s-automorphism on (M, S_x).

Ex. s-map $\{S_x\}$ is a s-automorphism, because $S_xS_y = S_{S_xy}S_x$.

Ex. Let (G, xy) be a group. We set $S_xy = (xy)x^{-1}$, then (G, S_x) is a s-automorphism.

Ex. Let $(G, \eta(x, y, z))$ be a homogeneous presystem. Then by $\eta(a, b)c := \eta(a, b, c), \eta(a, a)$ is a s-automorphism on G, because

$$\eta(a, a, \eta(x, x, z)) = S_a\eta(x, x, z) = S_aS_xz = \eta(\eta(a, a, x), \eta(a, a, x), \eta(a, a, z)) = S_{S_ax}S_az,$$

where

$$\eta(a, a, z) = S_az.$$

Ex.(counter example) Following ([K-S.1]), we recall a quasi group (Q_5, xy) with the following multible table;

	0	1	2	3	4
0	4	3	2	1	0
1	3	1	0	2	4
2	0	2	3	4	1
3	1	0	4	3	2
4	2	4	1	0	3

$01 = 3,\ 10 = 3,\ 23 = 4,\ 32 = 4,\ 04 = 0,\ 40 = 2$, etc., and x^{-1} is an element y satisfying $xy = yx = 1$ for any $x \in Q_5$. Then we can define

$$s_x y = (xy)x^{-1}$$

however, this s_x is not s-map, i.e., (Q_5, s_x) is not the s-set.

In final comments, we describe only the results.

$$Aut_*(Q_\lambda(\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}, \sqrt{3}])) \cong S_3 \text{ (if } \lambda = 2 + \sqrt{3})$$

$$Aut_*(Q_\lambda(\mathbf{Z}_7[\sqrt{3}, \sqrt{5}])) \cong < Id > \ (\lambda * \lambda = \lambda \text{ is only } \lambda = 1).$$

Indeed, general speaking, these mean that

$$g(x * y) = (g(x)) * (g(y))$$

for any element $g \in Aut_*(Q_\lambda(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]))$, where $s_x y = x * y,\ {}^\forall x, y \in Q_\lambda(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}])$.
Remark If $N(Q_\lambda) \neq 1 \Longrightarrow Aut_* Q_\lambda \cong S_3$.

The details will deal with future study and so for the complex number, we will induce a concept of triality group as a generalization of automorphisms of these subjects.

以下は我々が何を考えているかの簡単な動機の実例です.

($\sharp$) 複素数体 $\mathbf{C}$ の場合: （$\lambda * \lambda = \lambda$ の例）**-new product の導入-**

$x * y = \overline{xy}$,(new product) を考える．ここで xy は複素数 $\mathbf{C}$ の standard product, and $\overline{x}$ の共役によって定義される new product $*$ を考えます．$\mathbf{C}$ を $re^{i\theta}$ で表示.

$\theta = \frac{2}{3}\pi$ とするとき，周期 2π で $-\frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ と同一視します、$e^{i\theta}$ の共役元は $e^{-i\theta}$ より，

$$e^{\frac{2}{3}\pi i} = e^{\frac{2}{3}\pi i} * e^{\frac{2}{3}\pi i}(\text{周期 } 2\pi)，\ \text{を用いて}$$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta} * e^{i\theta},\ e^{i\theta}(x * y) = (e^{i\theta}x) * (e^{i\theta}y),\ {}^\forall x, y \in \mathbf{C},\ i = \sqrt{-1}.$$

つまり $e^{i\theta}(= g)$ が $*$ の乗法で自己同型です．記号で書くと，$g(x * y) = (gx) * (gy)$ が成り立ちます．又 $\frac{2}{3}\pi i(x * y) = (\frac{2}{3}\pi ix) * y + x * (\frac{2}{3}\pi iy)$ が成り立ちますので，これは $\frac{2}{3}\pi i$ が $(\mathbf{C}, *)$ の微分を意味します（周期 2π で考えます）．$\frac{2}{3}\pi i$ の共役は $-\frac{2}{3}\pi i$ を用います.

$$e^{i\theta} \longleftrightarrow i\theta\ (\theta = \frac{2}{3}\pi)$$

なる glogal $\longleftrightarrow$ local 対応を示しています．つまり次の対応が成り立ちます.

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}, *) \cong S_3 \text{ (symmetric group of order 3)}$$

$$i.e.,\ g(x * y) = (gx) * (gy),\ g\ is\ an\ automorphism,$$

$$\text{global relation} \longleftrightarrow \text{local relation}$$

$$\mathrm{Der}(\mathbf{C}, *) = \{d \in \mathrm{End}\ \mathbf{C} | d = (\frac{2n}{3})\pi i,\ n : integer\}.$$

$$i.e.,\ d(x * y) = (dx) * y + x * (dy), the\ definition\ of\ derivation.$$

これらの一般化として triality group （自己同型群の拡張概念, 三対群）を考察したいのです．つまりコペルニクス的発想ですが，$x * y$ を先に定義し, 次に $xy = \overline{x * y}$ によって

standard product を考えると，自己同型写像 g が $x*y$ の積で $g(x*y)=g(x)*g(y)$ として成り立つようなことが可能な代数系を探求するのが目標です．そして　$g_j(x*y)=(g_{j+1}x)*(g_{j+2}y)$，$j=0,1,2$ なる triality group (三対群) g_j を決定したいと考えています。local and global triality relations for algebras を考察するのが目標です。実数の場合は K_4(Klein's four group), 複素数の場合は 2 次元の無限群です。実際, 複素数のとき;
$\lambda_j=g_j(1)$ $(j=0,1,2)$ とおくと　$\lambda_j=\lambda_{j+1}\lambda_{j+2}$ より　$||\lambda_j||=1$ and $\lambda_j=e^{i\alpha_j}$, where $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$, $\alpha_j\in\mathbf{R}$ $(real\ number)$ (for the details, c.f. [K-O]).

(♯♯) Tits の三対原理: The Cayley algebra $\mathbf{O}$ has a triality derivation $(d_j,d_{j+1},d_{j+2})\in(D_4,D_4,D_4)$ where D_4 is the simple Lie algebra with dim 28, satisfying $d_j(xy)=(d_{j+1}x)y+x(d_{j+2}y)$, $\forall x,y\in\mathbf{O}$, and $<d_jx,y>+<x,d_jy>=0$, $\forall j=0,1,2$, where $<x,y>$ is the inner product defined by $<x,y>=\frac{1}{2}(x\overline{y}+y\overline{x})$. Furthermore, we have $D:=d_0+d_1+d_2$ is a derivation of $\mathbf{O}$ and $<D>_{span}\cong G_2$, where G_2 is the simple Lie algebra with dim 14.

§6. Conclusions and References（あとがき I と文献）

この小論では予備知識をほとんど仮定しませんので，引用文献は多くは挙げません．ここで述べた $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ 等の 2 次代数は，[K-O] での symmetric composition algebra ($<xy|xy>=<x|x><y|y>$) の variation (ある種の一般化）です．内積 $<\ ,\ >$ が非退化でない場合で考えています．つまり $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}](qr\ \equiv 1\ (mod\ p))$ はそのような例で $1,\sqrt{q},\sqrt{r}$ が $\mathbf{Z}_p$ 上 1 次独立な元なのでこれは 3 次元代数です.

$\mathbf{Z}_p$ 上，$(xy)x=x(yx)=<x,x>y$ を満たす代数系も考えられます．この algebra の性質と同様の，$\parallel xy\parallel=\parallel x\parallel\parallel y\parallel$ (つまり　$<x,x>=\parallel x\parallel^2$ の定義のもとで) なる関係式を満たす代数系と，Cayley algebra の三対原理の一般化の三対関係 (triality of groups and derivations) については，次の文献が役に立つと思います.

[K-O]; N.Kamiya and S.Okubo, Algebras and groups satisfying triality relations, Monograph (Book), Aizu Univ., (2015), Arxiv.1503.00614, Arxiv.1609.05892, （主に標数 0 の体上の代数系での研究）. triality group を研究した最初の論文.

又，次の文献も quandles の応用として役に立つかも知れませんので挙げておきます.

[K-S.1]; N.Kamiya and Y.Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps associated with homogeneous presystems, J. Gen. Lie theory App. **5**, (2011) Art ID,G110116.

[K-S.2]; N.Kamiya and Y.Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps and weak Hopf algebras associated with quandles, Proc.of the meeting for study of Number theory, Hopf algebras and related topics, 2019, p1-23, (Yokohama Publisher) 収録論文.

論文 ([K-S.1]and[K-S.2]) はカンドルとヤング・バクスター方程式に関連したものです．これ以外にも大久保氏と筆者との共同研究による三項系代数 (triple systems) の概念からの Yang-Baxter equations の構成に関するいくつかの論文が存在します．そしてまた弘前大学の物理学の佐藤松夫氏との共同研究で Hermitian generalized Jordan triple system and Field theory 関連の論文が存在します. (数理物理学への応用が芽生えています).

話を戻しますと, 4 元数代数, 8 元数代数を標数 p 上の体で考えるとこの小論で述べた $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ の議論が適用可能ですがそれはまた別の機会に述べさせていただきます.

[K-M]: N.Kamiya and D.Mondoc, A construction of Lie (super) algebras and (ε, δ) Freudenthal-Kantor triple systems defined by bilinear forms, J. Alg. and its applications, doi./10.1142/ S0219498820502230. 最近の上記の論文 [K-M] は三項系代数からリー超代数の構成が可能な数理物理学に応用を持つ, ルート系によらない素粒子論（quark theory）の特徴ずけが期待されると考えます.

数学史的側面の立場から視ますと，非結合的代数系 + 数理物理学 + 計算機科学 = knot theory, mathematical physics, differential geometry, etc., （他分野への応用）. この様な融合的分野が将来いつか芽生える発端になればと思い，歴史の一コマとしてここに記述させていただきましたことを御寛容ください. 又，例・定義のところ等で，内容・意味を伝達する為に工夫する言葉が見つからないために独自の記号等そして英語と日本語がミックスした文章になりましたこと，更に各分野の人達にとり，見やすくしたつもりがかえって筆者の未熟の為，混乱させたかもしれません, 再度不束な文体，お許しください.

§7. Appendix (付録). Definitions of $\mathbf{Z}_p[i,j,k]$ and $\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ （乗積表）と予想

有限体 $\mathbf{Z}_p$ 上の８次元の Cayley algebra (and Hamilton number) の乗積表を与えます.[1]
$\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ の Table;

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	$-e_3$	e_6	$-e_7$	-1	e_1	$-e_2$	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	e_2
e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_7	e_6	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

(体 $\mathbf{Z}_p$ 上の standard product xy で定義）.　そして new product $*$ を考える.

$$x * y = \overline{xy} \text{ (new product)},\ x = e_0 + \sum_{i=1}^{7} e_i,\ \overline{x} = e_0 - \sum_{i=1}^{7} e_i \text{ (standard involution)}$$

$e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$ in $\mathbf{Z}_p[i,j,k]$(*called a quasi quaternion*), $e_0 = 1$ は省略 (in table), $\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ を *a quasi octonion* と呼ぶ. 内積は $< x, y >= (x\bar{y} + y\bar{x})/2$, 積は例えば $e_3e_1 = e_2, e_3 * e_1 = \overline{e_3e_1} = -e_2, e_6e_7 = e_1, e_6 * e_7 = \overline{e_6e_7} = -e_1$ 等. つまり　for the product xy, $< e_0, e_1, e_2, e_3 >_{gen}$ が 4 元数の場合です. But for the new product $x * y$, $(e_1 * e_2) * e_1 = e_2$ and $(e_1 * e_2) * e_3 \neq e_1 * (e_2 * e_3)$ 等非結合的な面白い性質をもちます.

予想

- $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ に関して $qr \equiv 1 (mod\ p)$, q, r は平方数でない.

a) ノルム 1 の元の個数が $p(p+1)$. $\Longleftrightarrow_{iff}$ $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ 又は $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ が体.
b) ノルム 1 の元の個数が $p(p-1)$. $\Longleftrightarrow_{iff}$ $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ かつ $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ の両方が体でない.

[1] 4 元数, 8 元数の定義を Zorn's vector matrix で表記する方法も存在しますがこの乗積表 (table) で定義させていただきます.

a) の時 $p+1$ が 3 の倍数又は b) の時 $p-1$ が 3 の倍数 $\Rightarrow N(\tilde{Q})=2p+1$，これ以外は $N(\tilde{Q})=1$, ただし $N(\tilde{Q})$ は weak quandle の個数.

- $\mathbf{Z}_p[i,j,k]$ のノルム 1 の元の個数は p^3-p そして $N(\tilde{Q})=3p$.
- $\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ のノルム 1 の元の個数は p^7-p^3.

そして　$N(\tilde{Q})=p^6+(1-\delta_{p,3})(-1)^{\frac{p+1}{2}}(p^3+(-1)^{\frac{p+1}{2}})$, where $\delta_{p,3}$ is the Kroneker's delta.

- $N(\tilde{Q})>1 \Rightarrow Aut_*Q_\lambda=S_3$. ($*$ の積のもとでの Q_λ の自己同型群は 3 次の対称群).

筆者には以上の予想が解決されていて既知なのかわかりませんが述べさせていただきます（非結合的代数系の立場での話です）. $\mathbf{Z}_3[e_1,\cdots,e_7]$ における $\lambda*\lambda=\lambda$ の元の一例は $1+e_1+e_2+e_3$ であり, $\mathbf{Z}_5[e_1,\cdots,e_7]$ における $\lambda*\lambda=\lambda$ の元の一例は $2+e_1+e_2$ であり, $\mathbf{Z}_7[e_1,\cdots,e_7]$ における $\lambda*\lambda=\lambda$ の元の例は $3+e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6$, $3+3e_1+2e_2$ 等です. $e_1*e_2=\overline{e_1e_2}=-e_3$ による積 $*$ での考察に留意してください. 4 元数、8 元数のときは手計算の結果なので再考・改良しなければならない点多々存在すると思いますが, 先駆的な研究としての予想としてお許し下さい.

最後に，$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ に関して堀田修功君（神奈川大学理学部情報科学科大学院生（2018 年当時））に計算機科学の方法により，$\lambda*\lambda=\lambda$ の元を求めることの recheck をして頂いたことに感謝の意を表したいと思います.

何故 $\lambda*\lambda=\lambda$ を考えるのかは g が自己同型写像ならば $\lambda=g(1)$ とおくと $g(1)=g(1)*g(1)$ が必要条件だからです. この様な g の考察のためです. 一例として $Aut_*\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}]\cong S_3$ and $Der_*\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}]\cong(0)$ を挙げておきます. 実際, $\lambda*\lambda=\lambda\Rightarrow \lambda=1,2+2\sqrt{2},2-2\sqrt{2}$ です.

Concluding Remark (あとがき II (合成代数の歴史 (私見, 視座）))

2 次代数, 可除代数, 合成代数の歴史的な事柄については, 「数」(下）(1988 年）, 著者；エビングハウス・ケッヒャー etc.（成木訳）;

第 9 章 Cayley 数または交代的可除代数,

第 10 章 合成代数,Hurwitz の定理, ベクトル積代数,

第 11 章 可除代数とトポロジー

が, この方面 (2 次代数, 合成代数についての事柄, 特に数の拡張としての話題) の発展を含め, 簡潔に述べられていますので参照ください. これ以外の著作に関しては, 次の様なものが存在します.

「超複素数」（1973）カントール (浅野・笠原訳）,

「有限次元可除代数」（1996）ジャコブソン,

「合成代数の自己同型群」（1958）ジャコブソン . そして composition algebra に関して,

$$\| xy \|=\| x \|\| y \|, \quad \| x \| \text{ はノルム（内積)}$$

を満たす代数系の歴史的な発端は Hurwitz(1898) による次のような結果;

「$n\geq 1$ を自然数, $z_1,\cdots,z_n$ を実変数 $x_1,\cdots,x_n$ および $y_1,\cdots,y_n$ の実双 1 次形式で,

$$z_1^2+\cdots+z_n^2=(x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2)$$

が成り立つ $\Longrightarrow n=1,2,4,8$ である」

だと考えます. That is, $||xy||=||x||||y||$(composition algebra' origin) の原型です.

実例 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ のとき, $(x_1y_2+x_2y_1)^2+(x_1y_1-x_2y_2)^2=(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$ です. これは $\| x \| = \sqrt{<x,x>}$ と考えると, $<xy,xy>=<x,x><y,y>$ なる合成代数の概念を 8 元数 (Cayley algebra) を含む抽象的に論究した最初の結果だと考えます. しかしこれらはすべて単位元をもつ代数系の話です. 我々(筆者と大久保氏) はこれらを拡張した symmetric composition algebra と呼ばれる,$<x,y>$ is nondegenerate and symmetric bilinear form (内積) をもち

$$(\spadesuit)\ (xy)x=x(yx)=<x,x>y\ (that\ is,\ <x,x><y,y>=<x,x><y,y>\ \text{の変形})$$

を満たす (必ずしも単位元を持たない) 代数系で triality relation(三対原理) を考えています. この代数は Meson and Baryon の特徴ずけに現れる Gell-Mann (ノーベル賞受賞) の 8 次元代数を含みます ([K-O]). この代数は, 基礎体が実数の場合は次が成り立ちます.

Any real symmetric composition algebra is a division algebra(これらは単位元 1 をもたない可除代数の例です). That is, $a(\frac{b}{<a,a>}a)=b$ implies a solution of $ax=b$.

この symmetric composition algebra satisfying $(\spadesuit)$ は 8 次元 pseudo octonion algebra と para Hurwitz algebra(the conjugation algebra of Hurwitz algebras) を含む単位元をもたない非結合的代数系です.

Remark 単位元をもつとき, 可除代数の次元は 1,2,4,8 であることが知られています.

Remark $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ は $(\spadesuit)$ を満たしますが一般に $<x,y>$ が nondegenerate とは限りません. (考察する理由の一つです).

以上のあとがきは 20 世紀の非結合的, 可除代数, 2 次代数の歴史への筆者の視座での 21 世紀を生きる我々が数学史 (a history of nonassociative algebras) を考える第一歩としての足がかりになればと考え, 散見する話ですが new concept and idea を含めここに記させていただきました.

これらの事柄 (history and new results) をまとめると数理代数学と呼ぶべき黎明期の時代が来ていると思います.

Background information; alternative algebra (Cayley number), Jordan algebra, composition algebra, Zorn's vector matrix algebra (metasymplectic geometry with *dim* 58 due to H. Freudenthal), quadratic algebra, triple system (ternary algebra).

Purpose; Lie algebra's construction (without root systems), geometry (symmetric or homogeneous spaces), Yang-Baxter equation, triality relations, mathematical algebra.

Current address;

Noriaki Kamiya
CHIGASAKI CITY, CHIGASAKI 1-2-47-201 JAPAN, 235-0041
e-mail; shigekamiya@outlook.jp