第 31 回数学史シンポジウム

『緝古算経』の 3 次方程式の解法について[1]

田村　誠　(大阪産業大学)

Abstract

王孝通によって唐代に著された『緝古算経』は、3 次方程式を扱う最古のテキストであると知られている。しかしながら、開平方・開立方については『九章算術』で詳しくその方法が述べられているものの、2 次方程式・3 次方程式の解法である開帯従平方術・開帯従立方術について解説されているものは、算経十書中には見えない。ここでは『九章算術』開平方術・開立方術を振り返り、その拡張である開帯従平方・開帯従立方がどのような考え方で得られていたかについて考え、その方法について考察する。

１．中国最古の平方根の近似

最も単純な 2 次方程式とは平方根を求めるものであるが、その中国最古のものは『算数書』に見える。(1)参照。

> 『算数書』方田題
> 方田。田一畝方幾何步。曰、方十五步卅一分步十五。朮曰、方十五步不足十五步、方十六步有餘十六步。曰、盈、不足以爲法。不足子乘盈母、盈子乘不足母、以爲實。復之、如啓廣之朮。

田 1 畝は 240 平方歩。面積 240 平方歩の田の一辺の近似値を $\sqrt{240} \fallingdotseq 15\frac{15}{31}$ のように与えている。このように中国数学では平方根が整数値で求められない場合、端数の近似値を分数で与えることが多い。これは後代の開平方術では、$240-15^2=15$ より $\sqrt{240} \fallingdotseq 15\frac{15}{15\times 2+1}=15\frac{15}{31}$ のように、$S-A^2=r$ のときに $\sqrt{S} \fallingdotseq A+\frac{r}{2A+1}$ などのように与えることが多い。『算数書』では $240-15^2=240-225=15$（不足)、$16^2-240=256-240=16$（盈）であることから、盈不足術で$\frac{15\times 16+16\times 15}{16+15}=\frac{480}{31}=15\frac{15}{31}$ のようにしており、15 と 16 の間を比例配分している。したがってこの算題の術文は、当時まだ開平方術が見られないことの傍証とも言えるものである。

[1] This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 18K00269

2. 開平方術について

2.1 『九章算術』の開平方術

『九章算術』第 4 巻少広章には、開平方を問う算題があり（(2)参照）、
［一二］題で $\sqrt{55225}=235$ 、［一三］題で $\sqrt{25281}=159$、
［一四］題で $\sqrt{71824}=268$ 、［一五］題で $\sqrt{564752\frac{1}{4}}=751\frac{1}{2}$ 、
［一六］題で$\sqrt{3972150625}=63025$ などとしており、『九章算術』の頃には開平方は、困難というようなものではなかったと言える。ただし、今に伝わる『九章算術』は劉徽によって整備されたものが原型であり、部分的に劉徽の著作である可能性には留意する必要がある。実際第 10 巻とも言うべき『海島算経』は劉徽の著作である。ここでは開方術が（後に述べる開立方術も含め)、遅くとも劉徽注が出された 263 年には知られていたとするにとどめておく。

『九章算術』の開方術について、術文に従い、［一二］の$\sqrt{55225}=235$を解いてみると下記のようになる。術文については(2)参照。開立方にも共通するが、開平方術の方法は開平する値を面積と見て、それを取り尽くす図形を考えることにある。

①「置積爲實」
実に面積 55225 を置く。

実	5	5	2	2	5

②「借一算、步之、超一等」
借一算を一、百、万と一つ飛ばしで位を進める。

実	5	5	2	2	5
借算	1	←	・	←	・

③「議所得、以一乘所借一算爲法」
自乗が借算の位の数(5)を超えないように 2 を選び、借算の 1 をかけて法とする。

議	**2**				
実	5	5	2	2	5
法	2				
借算	1				

④「而以除」
法で実(の借算の位)を除いていく(割る)。

商	2				
実	1	5	2	2	5
法	2				
借算	1				

⑤「除已、倍法爲定法」
除き尽くしたら、法を倍して定法とする。

商	2				
実	1	5	2	2	5
定法	4				
借算	1				

⑥「其復除、折法而下」
また除くために、定法の位を下げる。

商	2				
実	1	5	2	2	5
定法		4			
借算	1				

⑦「復置借算、歩之如初」

借算をまた置くのには、初めと同じように位を一つ飛ばしで百の位に進める。

商	2				
実	1	5	2	2	5
定法		4			
借算	・	→	1		

⑧「以復議一乗之、所得副以加定法」

借算の示す位で（152 を $(40+x)x$ が超えないような x を）概算して、それを定法に加える(下の位に添える)。

商	2		3		
実	1	5	2	2	5
定法		4	3		
借算			1		

⑨「以除」

定法で実(の借算の位)を除いていく(割る)。答は商に置く。

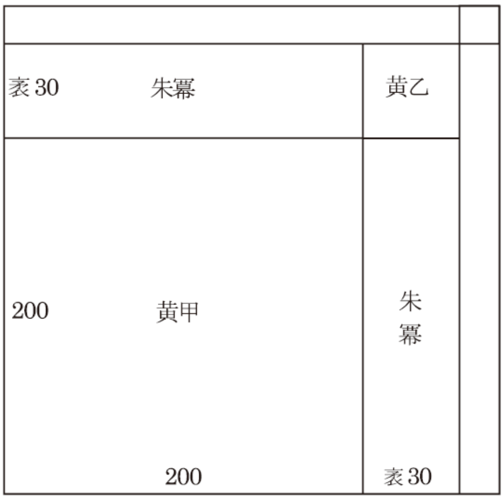
商	2		3		
実		2	3	2	5
定法		4	3		
借算			1		

⑩「以所得副從定法」

⑧で概算したものを定法に足す。⑨までに取り除いた正方形の 2 辺の和となる。

商	2		3		
実		2	3	2	5
定法		4	6		
借算			1		

右図は面積 55225 の正方形を分割したものである。④で、そこから黄甲（1 辺 200 の正方形）を取り除いている。⑤の「定法」は黄甲の 2 辺である 400 であり、後の時代には「方法」や「従法」と呼ばれるようになる。⑧でこれに「議」30 を加えた 430 が⑨で用いる「定法」となる。「議」30 をこの定法に掛けたものは、図の朱冪と黄乙の面積の和であり、⑨ではこれをさらに実から引いている。⑩の「定法」は、朱・黄で示された正方形の 2 辺の和である。このような図自体は残されていないが、図に由来するこの種の用語を用いて劉徽は説明しており、開平方が図形的な取り尽くしで考えられていたことがわかる。



⑪「復除、折下如前」

また除くために、定法の位を下げる。

商	2		3		
実		2	3	2	5
定法		→	4	6	
借算			1		

⑫「復置借算、歩之如初」

借算をまた置くのには、初めと同じように一つ飛ばしで一の位に進める。

商	2		3		
実		2	3	2	5
定法			4	6	
借算			・	→	1

⑬「以復議一乗之、所得副以加定法」

借算の示す位で（2325 を $(460+x)x$ が超えないような x を）概算して、それを定法に加える(下の位に添える)。

商	2		3		5
実		2	3	2	5
定法			4	6	5
借算					1

⑭「以除」

定法で実(の借算の位)を除いていく(割る)。答は商に置く。実がなくなれば、開方は終了。

商	2		3		5
実					
定法			4	6	5
借算					1

以上のように、あらかじめ設定された面積の正方形から、それと 2 辺を共有する正方形となるように図形を切り取っていくというのが基本方針で、切り取る 1 辺を少し大きくする度に 2 つの長方形（朱冪）と正方形（黄乙）の分を実から引いているのである。

2.2 端数の近似について

『九章算術』では、開平方が完了しなかったときの端数の処理として

> 若開之不盡者、爲不可開、當以面命之。

のように述べている。これは $S-A^2=r$ のときに $\sqrt{S}\fallingdotseq A+\frac{r}{2A}$ とするものであり、これは真値よりも大きい近似値である。後の諸本では $\sqrt{S}\fallingdotseq A+\frac{r}{2A+1}$ とする方が主流であるようだが、劉徽は注に著したように前者を良しとしたため、術文もそのようになっているのであろう。後者については、A の値を 1 の位まで求めた後で、もし次商を求めれば、それは 1 よりも小さく、したがって端数の分数は真値よりも小さい近似値になる。

2.3 分数の開平について

術文では、さらに分数を開平方するときについて説明している。

> 若實有分者、通分内子爲定實、乃開之。訖、開其母、報除。若母不可開者、又以母乘定實、乃開之。訖、令如母而一。

これは $a\frac{b}{m}=\frac{am+b}{m}$ の開平方について説明するものである。

① 分母と分子それぞれで開平方したもので割り算をする。

$$\sqrt{\frac{am+b}{m}}=\frac{\sqrt{am+b}}{\sqrt{m}}$$

② ①で分母が開平方できないときは、分子と分母の積を開平方して分母で割る。

$$\sqrt{\frac{am+b}{m}}=\sqrt{\frac{(am+b)m}{m^2}}=\frac{\sqrt{(am+b)m}}{m}$$

2.4 誤差の評価について

平方根が無限小数になる場合について、劉徽は次のように述べている。(2)参照。

[14][劉注]（前略す）不以面命之、加定法如前、求其微數。微數無名者以爲分子、其一退以十爲母。其再退以百爲母。退之彌下、其分彌細、則朱冪雖有所棄之數、不足言之也。

これは、計算を続行して微細な端数を求めるには、位を下げて計算を続け、後で 10^n を分母にすればよいということで、小数表記ではないものの実質的にそれと同等の分数表現を与えている。さらに位を下げれば下げるほど、そこで端数の近似値として与えられる分数は小さく無視できるものになるとも述べている。このように劉徽には、平方根の真値があること、桁数を増せばそれに収束していくことの認識があったと言える。

2.5 開帯従平方（帯従開平方、開平方帯従）について

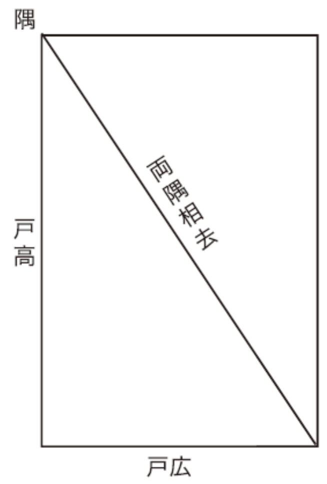
上記の開方術の⑦では、大きい正方形から小さい正方形を除いた部分、すなわちノーモンの面積が実の 15225 であり、定法 400 はノーモンを切り取る線の長さになっており、その半分は小さい正方形の 1 辺である。ここでは、ノーモンの幅 x を求める問題になっており、この先の計算は 2 次方程式 $(400+x)x=15225$ を解いていることになる。

⑦「復置借算、歩之如初」

商	2				
実	1	5	2	2	5
定法		4			
借算			1		

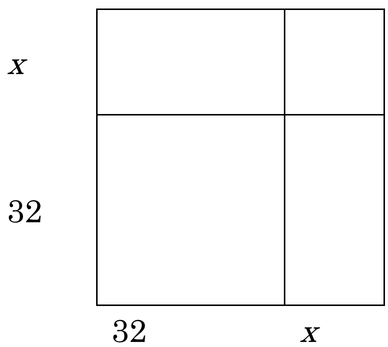
逆に、一般の 2 次方程式 $(2A+x)x=S$ について、これがある大きな正方形を開平方する途中であることに気付いたというのは想像に難くない。このような 2 次方程式は、『九章算術』第 9 巻句股章に 2 題見られる。その 1 つは第［一一］題の劉注[20]である。(3)参照。

第［一一］題は、長方形の対角線（弦）が 100 寸、長辺（股）と短辺（句）の差（句股差）が 68 寸であるときに、2 辺をそれぞれ求めよという問題で、これに対し劉徽は別解として開帯従平方を用いる方法を述べている。

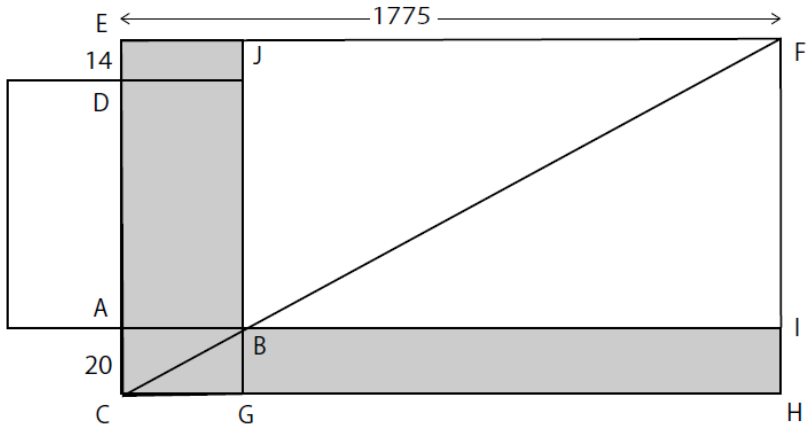


[劉注]【20】其一術、以句股差冪減弦冪、半其餘、差爲従法、開方除之即句也。

「冪」とは面積、すなわち 2 乗を表す。この長方形の面積は図形的考察により$\frac{弦^2-句股差^2}{2}$で求めることができる。一方でこれが $句\times股=句^2+(股-句)\times句$ のようにも表されるので、$句=x$ として $x^2+68x=100^2-68^2=2688$ を解けばよい。その計算は $X^2=2688+\left(\frac{68}{2}\right)^2=3844$ の開平方をして X を求めるとき、「初商」32 をとった後の計算と考えることができる。



もう一つは第［二〇］題である。(4)参照。



この算題では、図の四角形 ECGJ と四角形 ACHI の面積が等しいことから、それぞれ 2 倍して、$AD=x$ として $x(x+34)=2\times20\times1775$ すなわち

$$x(x+34)=71000$$

を解いている。

これら 2 題の解法については、「・・・爲従法、開方除之」と述べるのみで計算の詳細については何も語られない。「定法」に代えて「従法」を置けば、後の計算方法は同様であるからである。

3. 開立方術について
3.1 『九章算術』の開立方術

『九章算術』第 4 巻少広章の［一九］題から［二二］題では開立方の問題を扱っている。(5)参照。［一九］題では $\sqrt[3]{1860867}=123$、［二〇］題では $\sqrt[3]{1953\frac{1}{8}}=12\frac{1}{2}$ 、［二一］題では $\sqrt[3]{63401\frac{447}{512}}=39\frac{7}{8}$ 、［二二］題では $\sqrt[3]{1937541\frac{17}{27}}=124\frac{2}{3}$ を求めるというものである。以下で術文に従い、［一九］題の $\sqrt[3]{1860867}=123$ を解いてみる。

①「置積爲實」
実に体積 1860867 を置く。

実　1 8 6 0 8 6 7

②「借一算、步之、超二等」
借一算を一、千、百万と二つ飛ばしで位を進める。

実　1 8 6 0 8 6 7

借算　1 ← ←　← ←

③「議所得、以再乘所借一算爲法」
3 乗が借算の位の数(1)を超えないように 1 を選び、借算の 1 に 2 回かけて法とする。

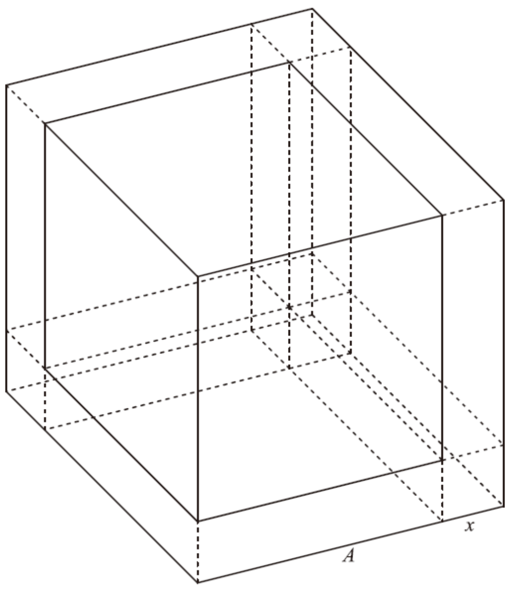
議　1
実　1 8 6 0 8 6 7
法　1

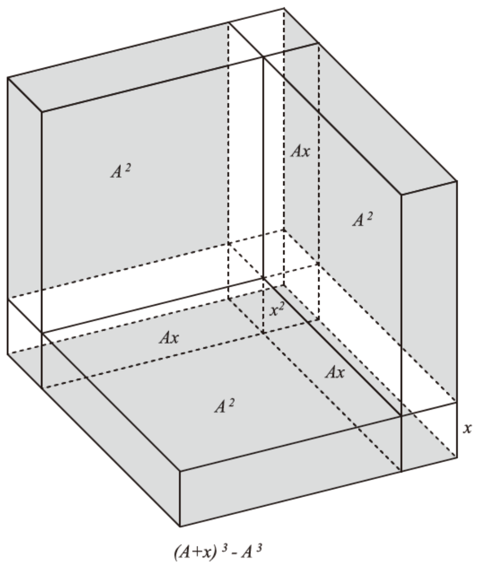
借算　1

④「而除之」
法で実（の借算の位）を除く（実から法×議を引く)。

議　1
実　　8 6 0 8 6 7
法　1

借算　1





④で大きな立方体から、1辺$A=100$ の立方体を除いている。前頁の図左参照。この立方体の辺をxだけ延ばして立方体を大きくするとき、大きくなる部分は前頁の図右のようになる。これを、底面積がA^2でもう1辺が xの直方体が3つ、1辺がAでもう2辺が xの直方体が3つ、1辺が xの立方体が1つ、に分けて考える。

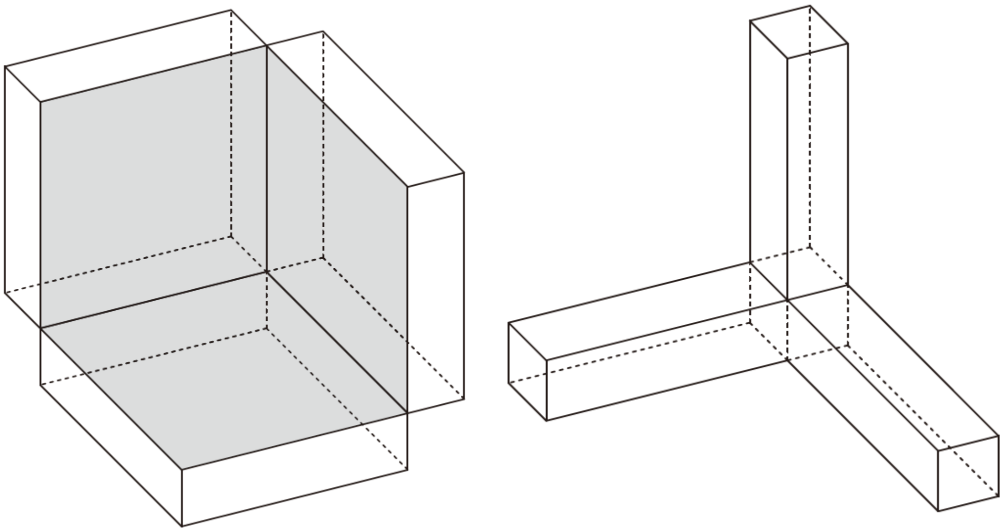
⑤「除已、三之爲定法」
除き尽くしたら、法を3倍して定法とする。

商	1						
実		8	6	0	8	6	7
定法	3						

⑥「復除、折而下」
また除くために、定法の位を下げる。

商	1						
実		8	6	0	8	6	7
定法	→	3					

底面積がA^2でもう1辺が xの直方体は3つ（下図左参照）なので、⑥で法（A^2）を3倍しておく。



⑦「以三乘所得數、置中行」
得られた商を3倍して、中行（廉）に置く。

商	1						
実		8	6	0	8	6	7
定法		3					
廉	3						

⑧「復借一算、置下行」
借算を下行（隅）に置く。

商	1						
実		8	6	0	8	6	7
定法		3					
廉	3						
隅	1						

1辺がAでもう2辺が xの直方体が3つ（下図右参照）なので、⑦で商（A）を3倍して廉としておく。また、次にできる立方体の個数は前と同じく1なので、⑧で隅には借算の1を置いておく。

⑨「歩之、中超一、下超二等」

廉は一つ飛ばし、隅は二つ飛ばしで進める。

商	1						
実		8	6	0	8	6	7
定法		3					
廉		→	3				
隅		→	→	1			

⑩「復置議」

「議」（概算した 2）を置く。

商	1			2			
実		8	6	0	8	6	7
定法		3					
廉			3				
隅				1			

⑪「以一乗中、再乗下、皆副以加定法」

「議」(2)を、中行(3)には 1 度、下行(1)には 2 度かけて、定法に加える。

商	1			2			
実		8	6	0	8	6	7
定法		3	6	4			
廉			6				
隅				4			

⑫「以定除」

定法で実を割る。答は商におく。

商	1			2			
実		1	3	2	8	6	7
定法		3	6	4			
廉			6				
隅				4			

以下、⑬～⑳は⑥～⑫とほぼ同様の繰り返しである。

⑬「除已、倍下・并中、従定法」

除きおわれば、下行(4)を 2 倍して中行(60)に併せ、定法(364)に従える。

商	1			2			
実		1	3	2	8	6	7
定法		4	3	2			

⑭「復除、折下如前」

また除くために、定法の位を下げる。

商	1			2			
実		1	3	2	8	6	7
定法		→	4	3	2		

⑮「以三乗所得数、置中行」

「所得数」(12)を 3 倍して、中行（廉）に置く。

商	1			2			
実		1	3	2	8	6	7
定法			4	3	2		
廉			3	6			

⑯「復借一算、置下行」

借算を下行（隅）に置く。

商	1			2			
実		1	3	2	8	6	7
定法			4	3	2		
廉			3	6			
隅				1			

⑰「歩之、中超一、下超二等」

中行は一つ飛ばし、下行は二つ飛ばしで進める。

商	1			2			
実		1	3	2	8	6	7
定法			4	3	2		
廉				→	3	6	
隅					→	→	1

⑱「復置議」

「議」（概算した 3）を置く。

商	1			2			3
実		1	3	2	8	6	7
定法			4	3	2		
廉					3	6	
隅							1

⑲「以一乘中、再乘下、皆副以加定法」

「議」（3）を、中行(36)には 1 度、下行(1)には 2 度かけ、さらに定法(43200)に加える。

商	1			2			3
実		1	3	2	8	6	7
定法			4	4	2	8	9
廉				1	0	8	
隅							9

⑳「以定除」

実(132867)から定法(44289)を「議」(3)の回数だけ引く。

商	1			2			3
実							
定法			4	4	2	8	9
廉				1	0	8	
隅							9

3.2 端数の近似について

開立方において、計算が完了しなかったときは、『九章算術』では開くことができないとせよ（開之不盡者、亦爲不可開）とだけ書かれている。一方、『張丘建算経』では、分母を定法（3 面の面積）に 1 を加えたものとして分数にしている。しかしながら、この近似値は、次商に対して、隅の部分のみならず廉の部分も考えていないので真値より大きくなる場合もあるが、分母に 1 を加えているために小さくなる場合もあるものである。

3.3 分数の開立方について

> 若積有分者、通分内子爲定實。定實乃開之、訖、開其母以報除。若母不可開者、又以母再乘定實、乃開之。訖、令如母而一。

開立方においても、分数の開立方は開平方と同様に、

$$\sqrt[3]{a\frac{b}{m}} = \sqrt[3]{\frac{am+b}{m}} = \frac{\sqrt[3]{am+b}}{\sqrt[3]{m}} = \frac{\sqrt[3]{(am+b)m^2}}{m}$$

のようにして行えばよいと述べている。

3.4 開帯従立方（帯従開立方、開立方帯従）について

単なる開立方ではない、一般の 3 次方程式にあたる帯従立方は、現存する中では『緝古算経』に初めて見られる。銭宝琮は開帯従立方は祖冲之の『綴術』の中で説かれているのではないかと予想する（(6)参照）が、『綴術』は失われてしまっているので確かめることはできない。しかしながら、『緝古算経』では 20 を超える 3 次方程式が立式され、それによって答が求められているところから、遅くとも唐代には 3 次方程式の解法が専門家には知られていたと考えてよいだろう。残念ながら、どの問でも定型の文として「・・・爲方法。・・・爲廉法、從。開立方除之」とあるだけで、解法や計算については書かれていないのであるが。

開帯従立方術については、銭宝琮がその術文を予想している（(6)）。ここではそれに従って、『緝古算経』第二題に見える 3 次方程式

$$y^3 + 1620y^2 + 850500y = 146802375$$

を解いてみる。この方程式は、辺同士の長さの関係が与えられている四角錐台について、その体積からそれぞれの辺の長さを求めるためのものである。詳しくは(7)参照。銭宝琮が「要旨である」と断りを入れるように、彼の説く方法にも記述の面で不満はあるのであるが、計算アルゴリズムとしては大体合っていると考えてよい。

開帯従平方すなわち 2 次方程式のときは、ある大きな正方形の面積の開平方の途中であると考えることができたのであるが、開帯従立方すなわち 3 次方程式では、適当な立方体で 3 面の面積が 1 次の係数、3 辺の辺長が 2 次の係数に合致するものがあるとは限らない。そこで、いくつかの立体の体積の和で考えたのだと思われる。すなわち個数が 3 次の係数（隅法、多くは 1）である立方体・1 辺の長さが 2 次の係数（廉法）で指定された直方体・1 面の面積が 1 次の係数（方法）で指定された直方体それぞれで、残りの辺長を等しく与えたときの体積を考える。

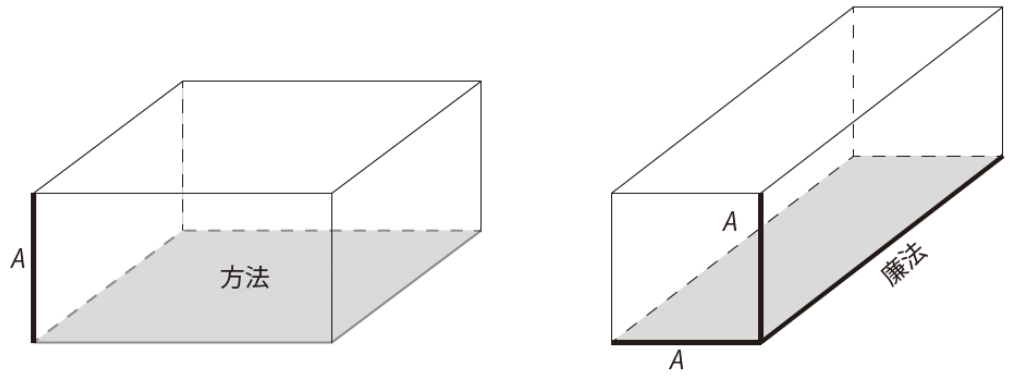
① 初期配置。方法は 1 つずつ、廉法は 1 つ飛ばし、隅法は 2 つ飛ばしで位を進める。

商									
実	1	4	6	8	0	2	3	7	5
方法		・	←	8	5	0	5	0	0
廉法		・	←	・	←	1	6	2	0
隅法			・	←	←	・	←	←	1

② 初商 1 を見積る。初商を廉法に掛けたもの、初商の自乗を隅法に掛けたものを右に置く。

商							1							
実	1	4	6	8	0	2	3	7	5					
方法		8	5	0	5	0	0							
廉法		1	6	2	0					1	6	2	0	初商×廉
隅法			1								1			初商×初商×隅

ここで右隅は 1 辺が初商の立方体の 1 面の面積、右廉は廉法と初商(A)を 2 辺に持つ長方形の面積を表している（下図参照)。この後④で、方法・右廉・右隅を底面とする四角形それぞれに、高さを初商で与えた立体の体積を考えるのである。



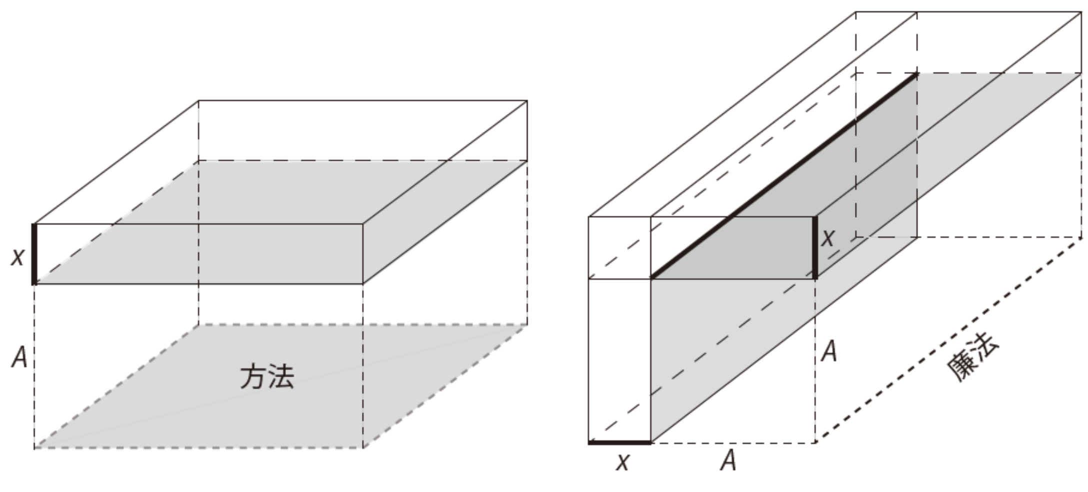
③ 方法に右に置いた 2 つを加える。

商						1								
実	1	4	6	8	0	2	3	7	5					
方法	1	0	2	2	5	0	0							**方＋右二位**
廉法		1	6	2	0					1	6	2	0	
隅法			1								1			

④ 方法に初商を掛けて、実より除く。初商 1 は 100 を表し、元の 3 次方程式の近似解である。$y = 100$ のとき、元の 3 次方程式における (右辺) − (左辺) の値がここで求める実である。

商						1								
実		4	4	5	5	2	3	7	5					**実−方×初商**
方法	1	0	2	2	5	0	0							
廉法		1	6	2	0					1	6	2	0	
隅法			1								1			

④の後、初商(下図では A)で与えた辺長を次商（下図では x) で延長するとき、増える部分の直方体の固定長の辺や面を考える（下図参照)。



方法が底面積の直方体は、底面積が方法のまま変わらない。右廉で考えた直方体では、1辺が廉法の直方体の他に、右廉を面積とする長方形を底面とする直方体を 2 つ考えることになる。右廉はすでに③で一度方法に加えているので、もう一度⑤で加える。右隅で考えた立方体では、開立方術のときと同様に考えて、隅法を個数とする立方体の他、右隅を底面とする直方体を 3 つ、初商を 1 辺とする直方体を 3 つ考える。③で方法に右隅を加えているので、⑤では右隅の 2 倍を加えればよい。また、初商の 3 倍を廉法に加える。

⑤ 方法に右隅の 2 倍と右廉を加え、廉法には初商の 3 倍を加え、右廉・右隅は取り去る。方法は 1 つ、廉法は 2 つ、隅法は 3 つ、位を下げる。

商	1		
実	4 4 5 5 2 3 7 5		
方法	1 2 0 4 5 0 0 ・		方＋右廉＋2 右隅
廉法	1 9 2 0 → ・	1 6 2 0	廉＋3 右隅
隅法	1 → → ・	1	

⑥ 次に次商y_2の 3 次方程式 $y_2^3 + 1920\, y_2^2 + 1204500\, y_2 = \ 44552375$ を解く。次商 3 を見積る。次商を廉法に掛けたもの、次商の自乗を隅法に掛けたものを右に置く。

商	1 3		
実	4 4 5 5 2 3 7 5		
方法	1 2 0 4 5 0 0		
廉法	1 9 2 0	5 7 6 0	次商×廉
隅法	1	9	次商×次商×隅

⑦ 方法に右に置いた 2 つを加える。

商	1 3		
実	4 4 5 5 2 3 7 5		
方法	1 2 6 3 0 0 0		方＋右二位
廉法	1 9 2 0	5 7 6 0	
隅法	1	9	

⑧ 方法に次商を掛けて、実より除く。次商 3 は 30 を表し、⑥の 3 次方程式の近似解である。$y_2 = 30$ のとき、⑥の 3 次方程式における (右辺) − (左辺) の値がここで求める実である。

商	1 3		
実	6 6 6 2 3 7 5		実−方×次商
方法	1 2 6 3 0 0 0		
廉法	1 9 2 0	5 7 6 0	
隅法	1	9	

⑨ 方法に右隅の 2 倍と右廉を加え、廉法には右隅の 3 倍を加え、右廉・右隅は取り去る。方法は 1 つ、廉法は 2 つ、隅法は 3 つ、位を下げる。

商						1	3						
実		6	6	6	2	3	7	5					
方法	1	3	2	2	4	0	0	・					方＋右廉＋2 右隅
廉法			2	0	1	0	→	・	5	7	6	0	廉＋3 次商
隅法					1	→	→	・			9		

⑩ 次に三商y_3の 3 次方程式 $y_2^3 + 2010\, y_2^2 + 1322400\, y_2 = 6662375$ を解く。三商 5 を見積る。次商を廉法に掛けたもの、次商の自乗を隅法に掛けたものを右に置く。

商					1	3	5						
実	6	6	6	2	3	7	5						
方法	1	3	2	2	4	0	0						
廉法				2	0	1	0	1	0	0	5	0	三商×廉
隅法							1				2	5	三商×三商×隅

⑪ 方法に右に置いた 2 つを加える。

商					1	3	5						
実	6	6	6	2	3	7	5						
方法	1	3	3	2	4	7	5						方＋右二位
廉法				2	0	1	0	1	0	0	5	0	
隅法							1				2	5	

⑫ 方法に三商を掛けて、実より除く。実が 0 になるので、三商 5 は⑩の 3 次方程式の解である。よって元の 3 次方程式の解として 135 が求められた。

商					1	3	5						
実													実−方×次商
方法	1	3	3	2	4	7	5						
廉法				2	0	1	0	1	0	0	5	0	
隅法							1				2	5	

3.5 銭宝琮の方法に対する不満

上述の解法は、右廉・右隅が面積を表すという意味で、うまくできているように見える。ただ、実際の算木計算では、0 は空位であり、算木が何も置かれていない。そのため、左右に置かれた数の間で引き算をすることは位を合わせるのにかなり苦労する。銭宝琮は賈憲の増乗開立方術との差別化を図りたかったのかもしれないが、右廉・右隅は廉

法・隅法の上下に置く方が自然である。

4. まとめ

・中国の 2 次方程式・3 次方程式の解法は、図形的考察により面積・体積の取り尽くしで考えられていた。

・中国では遅くとも劉徽のころには、開平方術の一部として 2 次方程式$x(x+a)=S$が解けていた。その定型文は「～爲従法、開方除之」である。

・厳密解を表示する方法はなく、必要に応じた近似解が用いられた。ただし、劉徽には真値があることと、位を下げて計算を続ければその値に収束することの認識はあった。

・開立方も遅くとも劉徽の頃には出来ていた。

・開立方術の拡張である 3 次方程式$x^3+ax^2+bx=V$ についても、王孝通の頃には一般的に解かれるようになっていた。これは開帯従立方でも複数の立体の体積の和を考えればよいことに気付いたためと思われる。定型文は「～爲方法。～爲廉法、從。開立方除之」というものである。

参考文献

(1) 張家山漢簡『算数書』研究会編『漢簡『算数書』－中国最古の数学書－』朋友書店（2006 年 10 月）

(2) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（10）大阪産業大学論集　人文・社会科学編 11 号（2011 年 2 月）

(3) 大川俊隆、田村誠『九章算術』訳注稿（30）大阪産業大学論集　人文・社会科学編 32 号（2018 年 2 月）

(4) 田村誠『九章算術』訳注稿（31）大阪産業大学論集　人文・社会科学編 33 号（2018 年 6 月）

(5) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（11）大阪産業大学論集　人文・社会科学編 12 号（2011 年 6 月）

(6) 銭宝琮「王孝通『緝古算経』第二題・第三題術文疏証」(科学史集刊　第九期、1966 年 4 月)、銭宝琮点校『算経十書』(中華書局、2021 年 1 月) 所収

(7) 大川俊隆、田村誠『緝古算経』訳注稿（1）大阪産業大学論集　人文・社会科学編 44 号（2022 年 2 月公表予定）