

Matrix-tree theorem の起源

高崎金久 (近畿大学理工学部)

1 はじめに

Matrix-tree theorem (ここでは「行列と木の定理」と訳する) はグラフの全域木の個数がある行列の余因子として表せることを主張する. さらに, グラフの辺に重みを付けて, 全域木の重みの総和を行列式として表す一般化もある. この定理は数え上げ問題に対する線形代数的技法の中でも古くから知られているもので, 組合せ論の枠内にとどまらない内容をもつ (拙著 [1, 2] を参照されたい). 本稿ではこの定理の原型が登場する 19 世紀の文献を紹介し, この定理の歴史的経緯や, それに関して流布している誤解などを紹介する. なお, これらの文献や歴史的経緯に関する筆者の知識はおもに Moon の本 [3] と Chaiken の論文 [4] から得たものである.

この定理の原型は 19 世紀半ばの Cayley, Sylvester, Borchardt, Kirchhoff の論文 [5, 6, 7, 8] や Maxwell の著書 [9] の中に見出せる. 細部の検討は後の節で行うが, これらの文献の内容と位置づけについて本稿で説明したいのは以下のようなことである.

- Cayley と Sylvester は多変数の座標変換に伴う問題を考察し, その計算に現れる特別な形の行列式について, 全展開の項の形や項の個数に一定の法則があることに言及している. 今日の視点から見れば, これは行列と木の定理の原型である. Sylvester[6] は 3 次と 4 次の行列式の場合に展開式を提示して (Cayley[5] はこの展開式のことを Sylvester から聞いたと書いている), n 次の場合には項数が $(n+1)^{n-1}$ になると記している.
- Borchardt は Cayley と Sylvester の Bézout 消去法 [10, 11] に由来する行列式を考察し, それが前述の Sylvester の展開式 (論文では言及していない) と同様の展開をもつこと, 特に, その項数が $(n+1)^{n-1}$ であることを示した. Sylvester と違って, Borchardt はこの展開式にかなり詳しい証明を与えた. ただ, 筆者には追跡しきれない部分があり, 本当に証明になっているのか疑わしい.
- Cayley[5], Sylvester[6], Borchardt[7] の各論文はグラフ理論的解釈には言及していない. 後年 Cayley[12] は Borchardt の考察に対して木の数え上げとい

うグラフ理論的解釈を与えた。Cayley のこの研究は今日では広く知られていて、 $n+1$ 個の頂点（ラベルを付けて区別する）をもつ木の総数が $(n+1)^{n-1}$ に等しい、という事実は Cayley の定理と呼ばれることが多い。実際には、Sylvester と Borchardt の論文がその先駆けとなった。

- Kirchhoff と Maxwell は電気回路の状態を記述する方程式（回路方程式）の解の考察から行列と木の定理に相当するものを見出した。電気回路はグラフとみなせるので、グラフ理論との関わりは今日では誰の目も明らかである。しかし、当時はまだグラフ理論という体系立ったものはなく、Kirchhoff の論文 [8] がその先駆けの 1 つだったと言ってもよい。
- Kirchhoff は回路方程式を Cramer の公式によって解き、解の表示の分子と分母の行列式の全展開を回路グラフの言葉で説明した。特に分母の展開の各項は回路グラフの全域木に対応する。そもそも全域木（実際にはその補集合である補木）の概念は、そのような名称が使われているわけではないが、この論文において初めて導入されたものである。それ故に行列と木の定理は Kirchhoff の定理と呼ばれることもある。Kirchhoff が考えた設定は行列と木の定理の通常の定式化とは異なる行列を用いているので、これは誤解を招く呼び名である。
- Maxwell の有名な電磁気学論考（Treatise）[9] の第 3 版（Maxwell の死後に J. J. Thomson を編者として出版された）に Kirchhoff の結果とよく似た内容が第 VI 章付録として付け加わり、Maxwell の公式として知られるようになった。今日行列と木の定理と呼ばれるものはこの Maxwell の公式に相当する。この公式に用いられている行列は Kirchhoff が使った行列ではなく、グラフのラプラシアン（ラプラシアン行列）である。Treatise では第 1 版から回路方程式をこのラプラシアン行列で定式化している。

なお、正確に言えば、Kirchhoff も Maxwell も行列そのものではなくて、その成分にあたる量を用いて回路方程式を書いている。行列の概念・記法・算法は Cayley[13] によって導入されたが、Maxwell の Treatise が出版された頃もそれほど普及していなかった。行列が物理学で積極的に使われるようになったのは 1920 年代の量子力学の登場以降であり、それ以前はテンソル（物理学者にはすでになじみがあった）の一種として扱われていたようである。

上に述べたような意味で、行列と木の定理には Kirchhoff 流と Maxwell 流の 2 種類があることになる（このことは Moon[3] も Chaiken[4] も指摘している）。この 2 種類の定式化の存在は電気回路の取り扱いに Kirchhoff 流と Maxwell 流があることに対応する。それらは一種の双対関係にある。今日の電気回路理論では Kirchhoff 流が主流であるが、行列と木の定理は Maxwell 流にラプラシアン行列を用いて定式化されることが多い。前述の Cayley, Sylvester, Borchardt が考えた行列式もラ

プラシアン行列の余因子に相当する。それを Kirchhoff の定理と呼ぶことには問題がある。

以上は 19 世紀における文献の概観であるが、行列と木の定理の現代的証明にも数学史的に興味深い側面がある。Moon の本 [3] は代表的な 2 種類の証明を紹介している。そのうちの 1 つはグラフの頂点と辺の接続関係を表す行列（接続行列）を使う証明である。接続行列の概念は Poincaré が位置解析 (analysis situs) において単体分割された空間（複体）を扱うために導入した数値データ [14, 15] に由来する。特に 1 次元複体の場合がグラフの接続行列である。Poincaré は一般次元の場合にこれらの数 ($0, \pm 1$ の値をとる) を並べた行列の性質を論じている。Chuard [16] は Poincaré の研究を受け継ぎ、グラフの接続行列の小行列式と全域木・部分木との関係や接続行列を係数行列とする連立 1 次方程式の意味を明らかにした。さらに 2 次元複体の接続行列も考察した。Weyl [17] は Chuard の研究に基づいて Kirchhoff の電気回路の論文 [8] を見直した。これらは 1920 年代にホモロジー群が導入される以前の代数的位相幾何学のエピソードとして興味深い。Weyl の論文以降も代数的位相幾何学に基づく電気回路の研究は続き、1960 年代の日本人研究者による研究もある [18]。

Moon の本が紹介するもう 1 つの証明は 1940 年代の応用数理における Tutte の論文 [19] のアイデアに基づく。これはグラフの辺を除去することによる変化を調べて、辺の個数に関する数学的帰納法に持ち込むもので、有向グラフにも使える。Tutte はその後もさまざまな一般化を考えた。Tutte の論文はその数年前の Brook らとの共著論文 [20] の続編である。どちらの論文も図形の dissection（切り分けて並べ直し、新たな図形を作ること）の問題を電気回路に翻訳して論じている。Tutte はその道具として行列と木の定理を証明して使ったのである。ちなみに、Chaiken の論文 [4] は行列と木の定理のさらなる一般化をめざしたもので、さまざまな離散数学的概念を駆使して証明を行っている。

2 行列と木の定理の数学的内容

2.1 グラフと隣接行列・接続行列

グラフは「点と線」の構造であり、いくつかの頂点とそれらを結ぶいくつかの辺からなる。ちなみに、電気回路理論では頂点を節点、辺を枝と呼ぶことが多い。図 1 に示した例（辺に向きが指定されていない無向グラフである）では、4 つの頂点 v_1, v_2, v_3, v_4 と 5 つの辺 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 がある。一般に、2 つの頂点 v_i, v_j を結ぶ辺を (v_i, v_j) と表す。図 1 では

$$e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3), e_3 = (v_3, v_4), e_4 = (v_4, v_1), e_5 = (v_2, v_4)$$

となる。無向グラフでは (v_i, v_j) と (v_j, v_i) を区別しないが、有向グラフではそれらを区別して（両者が共存することも許す）、 (v_i, v_j) を v_i から v_j に向かって向きづ

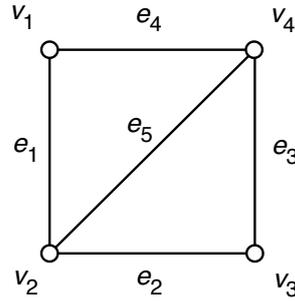


図 1: グラフの例

けられた有向辺 (図形的には矢線) とみなす.

このようなグラフに対して隣接行列と接続行列が定義される. グラフに n 個の頂点 v_1, \dots, v_n と m 個の辺 e_1, \dots, e_m があるとする. 頂点 v_i, v_j が辺で結ばれているとき, v_i と v_j は隣接しているという. また, 頂点 v_i が辺 e_k の一方の端であるとき, v_i と e_k は接続しているという. 隣接行列は隣接関係を表す $n \times n$ 行列 $A = (A_{ij})$ で, その成分は

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j \text{ が隣接しているとき}) \\ 0 & (v_i, v_j \text{ が隣接していないとき}) \end{cases}$$

と定義される. 同様にして接続関係を表す接続行列が $n \times m$ 行列として定まる. ただし, 行列と木の定理の証明に用いられる接続行列 $B = (B_{ik})$ は $0, \pm 1$ を並べた符号付き接続行列であり, 無向グラフの場合にはグラフの各辺に適当に向きを定める (たとえば, 図 2 のように頂点の番号が大きくなる方向に向きを付ける) ことによって定まる. その成分は

$$B_{ik} = \begin{cases} 1 & (e_k \text{ が } v_i \text{ から出る有向辺であるとき}) \\ -1 & (e_k \text{ が } v_i \text{ に入る有向辺であるとき}) \\ 0 & (v_i \text{ が } e_k \text{ に接続していないとき}) \end{cases}$$

と定義される.

2.2 ラプラシアン行列

無向グラフのラプラシアン行列は

$$L_{ij} = \begin{cases} -1 & (i \neq j \text{ で } v_i, v_j \text{ が隣接するとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ で } v_i, v_j \text{ が隣接しないとき}) \\ d_i & (i = j \text{ のとき}) \end{cases}$$

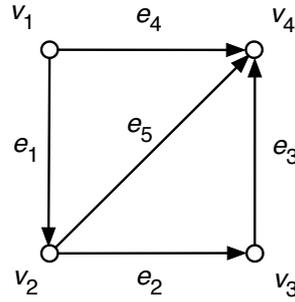


図 2: 図 1 のグラフの辺に向きを付ける

という成分をもつ $n \times n$ 行列 $L = (L_{ij})$ である. ここで d_i は v_i に接続する辺の個数である. 非対角成分は隣接行列の成分の -1 倍に等しい. 図 1 のグラフの場合には

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

となる. この例に見るように, 無向グラフのラプラシアン行列は対称行列である. ラプラシアン行列の重要な特徴は

$$\sum_{j=1}^n L_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^n L_{ij} = 0$$

というゼロサム等式が成り立つことである. 有向グラフに対しては 2 通りのラプラシアン行列が定義され, それぞれにおいてゼロサム等式の一方のみが成立する. これらのゼロサム等式が行列と木の定理の証明の鍵となる. 言い換えれば, ゼロサム等式が成り立つ行列においては, それがグラフに由来するかどうかに関係なく, 行列と木の定理に相当することが成り立つ.

重み付きラプラシアン行列はグラフの各辺 (v_i, v_j) に対して重みと呼ばれる数 $W_{ij} = W_{ji}$ が指定されたときに

$$L_{ij} = \begin{cases} -W_{ij} & (i \neq j \text{ で } v_i, v_j \text{ が隣接するとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ で } v_i, v_j \text{ が隣接しないとき}) \\ \sum_{k \neq i} W_{ik} & (i = j \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義される. $W_{ij} = 1$ の場合にはもとのラプラシアン行列に戻る. 対称性の条件 $W_{ij} = W_{ji}$ を外して, 対角成分の定義を適宜修正すれば, 有向グラフに対応する重み付きラプラシアン行列が得られる.

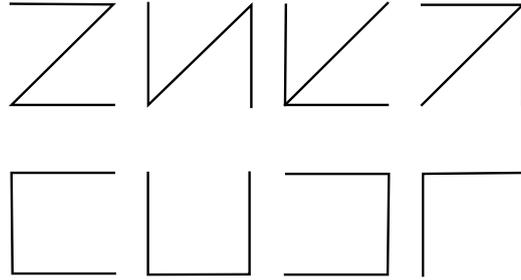


図 3: 図 1 のグラフの全域木

2.3 行列と木の定理

全域木はグラフのすべての頂点を含むが閉路を持たない部分グラフである。たとえば図 1 の場合には、 e_2, e_4, e_5 を辺とする部分グラフ（アルファベットの Z の字の形をしている）が全域木の例であり、これを含めて図 3 に示す 8 通りの全域木がある。

行列と木の定理はラプラシアン行列の余因子の値がグラフに含まれる全域木の個数に等しいことを主張する。 L から第 i 行と第 j 列を除去した $(n-1) \times (n-1)$ 行列を $L^{(i,j)}$ と表そう。

行列と木の定理 L の余因子 $(-1)^{i+j} \det L^{(i,j)}$ は i, j によらず同じ値をとる。その値はグラフの全域木の個数に等しい。

図 1 の場合に余因子を計算してみれば

$$\det L^{(1,1)} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

などとなり、たしかに全域木の個数と一致している。

重み付きラプラシアン（同じ記号 L で表す）の場合には次のような主張になる。

行列と木の定理（重み付き） L の余因子 $(-1)^{i+j} \det L^{(i,j)}$ は i, j によらず同じ値をとる。その値は

$$(-1)^{i+j} \det L^{(i,j)} = \sum_{\text{全域木 } T} \prod_{\text{辺 } (i,j) \in T} W_{ij}$$

となる。ここで右辺の総和はグラフの全域木全体にわたり、総和の各項は全域木の辺の重みをすべて乗じたものである。

図1の場合に当てはめると

$$\begin{aligned} \det L^{(1,1)} &= \begin{vmatrix} W_{12} + W_{23} + W_{24} & -W_{23} & -W_{24} \\ -W_{23} & W_{23} + W_{34} & -W_{34} \\ -W_{24} & -W_{34} & W_{14} + W_{24} + W_{34} \end{vmatrix} \\ &= W_{14}W_{23}W_{24} + W_{12}W_{24}W_{34} + W_{12}W_{23}W_{24} + W_{14}W_{24}W_{34} \\ &\quad + W_{12}W_{14}W_{23} + W_{12}W_{23}W_{34} + W_{14}W_{23}W_{34} + W_{12}W_{14}W_{34} \end{aligned}$$

などとなる (重みの対称性 $W_{ij} = W_{ji}$ に注意されたい). 右辺の各項は図3に示した全域木に対応している.

ちなみに, 図1のグラフに (v_1, v_3) を辺として付け加えると4頂点の完全グラフになる. 一般に, n 個の頂点を持ち, すべての2頂点間を辺で結んだグラフを n 頂点の完全グラフという. n 頂点の完全グラフには n^{n-2} 個の全域木がある. このことはラプラシアン行列

$$L = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

の余因子を計算すればわかる. その意味で, Sylvester, Borchardt, Cayley の論文に登場する $(n+1)^{n-1}$ という数は $n+1$ 頂点の完全グラフの全域木の個数である.

無向グラフの場合には, 前述の符号付き接続行列 B を用いて行列と木の定理を証明することができる (Moon の著書 [3] や拙著 [2] を参照されたい). ラプラシアン行列のすべての余因子が同じ値をとることはゼロサム条件から証明できるので, そのうちの1つ, たとえば $(1, 1)$ 余因子のみ考えればよい. 無向グラフのラプラシアン行列は

$$L = BW^tB$$

と表せる. W は辺の重み $W_{e_k} = W_{ij}$ を対角線に並べた $m \times m$ 対角行列

$$W = (W_{e_k} \delta_{kl})_{k,l=1}^m$$

である. これから $L' = L^{(1,1)}$ が

$$L' = B'W^tB'$$

と表せることがわかる. B' は B から第1行を取り除いた $(n-1) \times m$ 行列である. この行列の行列式を Cauchy-Binet 公式で展開し, Chuard[16]が見出した B の $n-1$ 次小行列式と全域木の関係に注意すれば, 行列と木の定理の展開式が得られる.

3 Cayley, Sylvester, Borchardt

第1節で Cayley[5], Sylvester[6], Borchardt[7] の各論文に行列と木の定理の原型が見られることを述べた。ここではもう少し細部に立ち入って説明する。

3.1 Cayley の論文 (1856)

発表年を見れば、これらの論文の中で Cayley の論文 [5] が最も初期のものである。その中で Cayley は、Sylvester から聞いた話として、

$$\begin{vmatrix} X\vartheta + Xy + Xz & -Yx & -Zz \\ -Xy & Y\vartheta + Yx + Yz & -Zy \\ -Xz & -Yz & Z\vartheta + Zx + Zy \end{vmatrix}$$

という行列式 ($X\vartheta$, etc. は2つの文字の積ではなくて単一のシンボルである) を展開すると

$$X\vartheta \cdot Y\vartheta \cdot Z\vartheta + Y\vartheta \cdot Z\vartheta \cdot Xy + Y\vartheta \cdot Z\vartheta \cdot Xz + (\text{以下省略})$$

という16項の和になるが、その中には $Xy \cdot Yx$ や $Xy \cdot Yz \cdot Zx$ というような「サイクル (cycle)」をなす項は現れない、ということを書き記している。

この行列式の書き方もサイクルの意味も非常にわかりにくいですが、

$$\begin{vmatrix} X\vartheta + Xy + Xz & -Xy & -Xz \\ -Yx & Y\vartheta + Yx + Yz & -Yz \\ -Zx & -Zy & Z\vartheta + Zx + Zy \end{vmatrix}$$

というように転置してから X, Y, Z を行のラベル, x, y, z を列のラベル, ϑ をここに現れていない第4行のラベルと解釈すれば、この行列式は

$$\begin{pmatrix} W_{12} + W_{13} + W_{14} & -W_{12} & -W_{13} & -W_{14} \\ -W_{21} & W_{21} + W_{23} + W_{24} & -W_{23} & -W_{24} \\ -W_{31} & -W_{32} & W_{31} + W_{32} + W_{34} & -W_{34} \\ -W_{41} & -W_{42} & -W_{43} & W_{41} + W_{42} + W_{43} \end{pmatrix}$$

という行列の最初の 3×3 部分の小行列式、すなわち $(4, 4)$ 余因子とみなせる。この行列は行方向にゼロサム等式を満たしていて、4頂点の完全グラフの各辺を2本の逆向きの有向辺に置き換えて得られる有向グラフの重み付きラプラシアン行列 (2種類あるうちの一方) である。その余因子を展開すれば $4^2 = 16$ 項 (それぞれ全域木に対応する) の和になる、というのは有向グラフに対する重み付きの行列と木の定理 (拙著 [1] 参照) からの帰結である。

Cayley がサイクルと呼んでいるものは、上の記法では $W_{12}W_{21}$, $W_{12}W_{23}W_{31}$ と表せる。添え字が $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ や $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ というように巡回していること

に注目されたい。これらは前述のグラフの中で各数をラベルとする頂点をたどって元の頂点に戻る閉路に対応するので、それらを含む項は全域木に対応しないのである。しかし、Cayley や Sylvester はそのようなグラフには言及しておらず、あくまで行列式の成分のラベルが巡回しているという意味でサイクルと呼んでいると思われる。

3.2 Sylvester の論文 (1857)

Sylvester の論文 [6] は上の 3 次の行列式の展開式に加えて 4 次の行列式の展開式 ($5^3 = 125$ 個の項からなる) を具体的に示し、 n 次行列式の場合には $(n+1)^{n-1}$ 個の項の和になると述べている。その根拠として、Sylvester はこの項数が

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

という数値行列式の計算 (ただちに n 次行列式の場合へ一般化できる) によって求められることを掲げている。前節で触れたように、この行列式は完全グラフのラプラシアン行列の余因子にほかならない。

Cayley の論文 [5] もそうだが、Sylvester の論文でもこれらの事実は論文の主題に関わる大量の計算の中で、単なる技術的細目として言及されている。 n 次の行列式の場合については、証明どころか、展開式を明示的に書くこともしていない。上に引用した数値行列式による展開項数の求め方に至っては、脚注として述べているだけである。少なくともこの時点では、Cayley も Sylvester もこれらの展開式をそれほど重視していなかったのではないと思われる。

3.3 Borchardt の論文 (1860)

Borchardt の論文 [7] は Bézout 消去法に由来する特別な形の行列式を考察したものである。Bézout 消去法は適用対象が同じ次数の多項式対に限定されるが、古くから知られた行列式とは異なる形で終結式を構成する。Cayley は Crelle 誌に掲載されたごく短い論文 [11] でこの行列式について説明している。ちなみに、Borchardt はその当時 Crelle 誌の編集者を Crelle から引き継いでいて、Cayley の論文の直後に論文についての注釈 [21] を書き加えている。

n 次多項式 $\phi(z), \psi(z)$ に対する Bézout 消去法の終結式は 2 変数多項式

$$F(x, y) = \frac{\phi(x)\psi(y) - \phi(y)\psi(x)}{y - x} = \sum_{i,j=0}^{n-1} a_{ij}x^i y^j$$

の係数の行列式 $D = \det(a_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ で与えられる。Borchardt は Lagrange 補間公式を利用して、この終結式の計算を別の行列式 $R' = \det(r_{ij})_{i,j=1}^n$ の計算に還元した。それが表題に Interpolation という言葉が入っている理由である。

r_{ij} を定義するには相異なる定数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ を選ぶ。 r_{ij} はそれらを根とする多項式

$$f(z) = (z - \alpha_0)(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$$

を使って

$$r_{ij} = \frac{F(\alpha_i, \alpha_j)}{f'(\alpha_i)f'(\alpha_j)}$$

と定義される。 r_{ij} を並べた $(n+1) \times (n+1)$ 行列 $(r_{ij})_{i,j=0}^n$ はゼロサム条件を満たす。 R' はその $(0,0)$ 余因子とみなせる。 Borchardt はこの余因子に対して Sylvester の展開式と同様のことを見出したのである。 その証明は r_{ij} の具体的な形には関係なく、ゼロサム条件だけを使うので、実質的な内容は行列と木の定理と同じである。

論文の最後の2ページは余因子の展開式の項数を求める考察に費やされている。これは行列の成分を数値に置き換えて計算する Sylvester のやり方とは対照的である。展開の各項は Cayley や Sylvester の論文と同じ意味で「サイクル」(cyclus) を含まない。 Borchardt はそのような項がどれだけあるかをていねいに調べている。そこにはグラフ理論的概念は登場しないが、Borchardt はまるで木を描きながら考えているように見える。そして最後に $(n+1)^{n-1}$ という数を引き出している。Cayley は後の論文 [12] において木の言葉でこれらの考察を説明し直している。

Borchardt が Sylvester の展開式のことを知っていたかどうかはわからない。論文にはそれを伺わせる記述は皆無である。しかしながら、Cayley や Sylvester とまったく独立にこのようなことを思い付いたとは考えにくい。

4 Kirchhoff, Maxwell, Weyl

Kirchhoff[8] と Maxwell[9] はそれぞれ異なる流儀で電気回路（正確に言えば、抵抗と電源だけからなる直流回路）の回路方程式を考察し、その解の記述から行列と木の定理に相当することを見出した。その流儀の違いに注意しながら、彼らの考察の要点を紹介する。Kirchhoff の論文に新たな解釈を示した Weyl の論文 [17] にも簡単に触れる。

4.1 Kirchhoff の論文 (1847)

論文の最初に Kirchhoff の有名な2つの法則（電圧則と電流則）の説明がある。興味深いことに Kirchhoff はこれらの法則を “Theorem” と呼んでいる。現代の感覚では Axiom（公理）と呼ぶべきものだろう。論文で使われている “wire” などの

言葉を現在のグラフ理論に翻訳すれば、これらの法則の内容は次のようになる。 I_k は k 番目の辺（以下単に辺 k と呼ぶ）を流れる電流の値を表す。

1. 電圧則：辺 k_1, k_2, \dots が閉路をなすとき

$$w_{k_1} I_{k_1} + w_{k_2} I_{k_2} + \dots = E_{k_1} + E_{k_2} + \dots$$

という等式が成り立つ。ここで w_k は辺 k の抵抗の値、 E_k は同じ辺に抵抗と直列に挿入された電源の電圧である。

2. 電流則：辺 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ が1つの頂点に接続し、他の辺がその頂点に接続していないとき

$$I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2} + \dots = 0$$

という等式が成り立つ。ただし、電流 $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}, \dots$ は（必要ならば -1 を乗じて）頂点に流れ込む方向に正値をとるものとみなす。

電圧則は Ohm の法則を含んでいる。辺電圧（辺の両端の電位差）を閉路に沿って総和すればゼロになる、という言い方をすれば単なる数学的事実になってしまう。

これらの等式をすべての閉路とすべての頂点にわたって連立させれば、辺電流 I_k に対する連立1次方程式が得られるが、そこには独立ではないものが含まれる。その中から独立な方程式を取り出すために、Kirchhoff は以下のような手順を示している。Kirchhoff の論文とは文字の使い方が逆になるが、第2節に合わせて、回路グラフの頂点の個数を n 、辺の個数を m とする。また、Kirchhoff は全域木の補集合である補木の言葉ですべてを説明しているが、ここではわかりやすさを優先して、全域木の言葉も使うことにする。

1. 電圧則については、回路グラフの全域木を1つ選んで、そこに補木の任意の辺を付け加えて得られる閉路を選ぶ。全域木に補木の辺を1つ付け加えた部分グラフには閉路がただ1つ存在するが、それらの閉路を選ぶのである。補木の辺の個数は

$$\mu = m - n + 1$$

であるから、これによって μ 個の閉路とそれに付随する μ 個の方程式が得られる。

2. 電流則については、回路グラフの1つの頂点を選んで、それ以外の頂点から得られる $n - 1$ 個の方程式を考える。

Kirchhoff はこれらの $\mu + n - 1 = m$ 個の方程式が求めるものであることを実際に証明している。グラフ理論がまだ体系として存在しない時代にこのような考察を行ったことはまことに驚異的である。この全域木に基づく方法は現在も電気回路理論で標準的に用いられている（拙著 [2] 参照）。

こうして Kirchhoff は辺電流 I_1, \dots, I_m に対する次のような m 連立 1 次方程式を得た：

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j^i w_j I_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j^i E_j, \quad 1 \leq i \leq \mu,$$

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j^i I_j = 0, \quad \mu + 1 \leq i \leq m$$

前半が電圧則から得られる独立な方程式，後半が電流則から得られる独立な方程式である。これが Kirchhoff の回路方程式である。この連立 1 次方程式の係数 α_j^i はいずれも $0, \pm 1$ のいずれかの値をとり，現代の用語（拙著 [2] 参照）では次のように解釈できる：

1. 前半の方程式の係数 α_j^i ($1 \leq i \leq \mu, 1 \leq j \leq m$) は電気回路理論で基本閉路行列（あるいは基本タイセット行列）と呼ばれるものの成分である。
2. 後半の方程式の係数 α_j^i ($\mu + 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$) は第 2 節で説明した符号付き接続行列から 1 つの行 (n 個の頂点から 1 つ選んだ頂点に対応する) を取り除いた行列の成分である。

Kirchhoff はこの連立 1 次方程式を Cramer の公式によって解き，解の表示の分子と分母の行列式の全展開を回路グラフの言葉で説明している。それによれば，分母の行列式 $\det(\alpha_j^i)_{i,j=1}^m$ の展開の各項は回路グラフの全域木 (μ 個の閉路を選ぶ際に使ったものも含めて，あらゆる全域木を考える) の補木に対応していて，各項の値は補木の辺の抵抗値の積に等しい。この主張は行列と木の定理の双対形と呼ぶべきものである。分子の行列式の展開の各項も同様の意味で回路グラフのある条件を満たす部分グラフに対応している。ただ，これらの主張に関する Kirchhoff の証明方法はあまり啓発的なものではない。

4.2 Maxwell の著書 (1871/1892)

Kirchhoff は辺の電流に対する方程式を考えたが，Maxwell は頂点の電位に対する方程式を考えた。その意味で両者が扱っているのはまったく異質の方程式である。ちなみに，Maxwell は Kirchhoff の論文 [8] を引用していない。

Maxwell にならって頂点の電位を P_1, \dots, P_n ，2 頂点 i, j の間の電導率（抵抗値の逆数）を K_{ij} と表す。 $K_{ij} = 0$ のときには，頂点 i, j は辺で結ばれていないと解釈する。さらに K_{ii} を

$$K_{ii} = - \sum_{j=1}^n K_{ij}$$

と定める。このとき節点電位に対する方程式（Kirchhoff の電圧則と内容的には同じものである）は

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} P_j = \sum_{j \neq i} K_{ij} E_{ij} - Q_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

と書ける。これが Maxwell の回路方程式である。 E_{ij} は頂点 i, j の間に抵抗と直列に挿入された電源の電圧、 Q_i は頂点 i に外部から流入する電流であり、回路全体の電流の保存則を表すゼロサム条件

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0$$

が成り立つとする。回路方程式の係数行列 $(K_{ij})_{i,j=1}^n$ はゼロサム条件

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^n K_{ij} = 0$$

を満たす対称行列であり、回路グラフの重み付きラプラシアン行列（の -1 倍）にほかならない。

電圧源 E_{ij} だけを想定する Kirchhoff の定式化と違って、ここでは電流源 Q_i も取り入れられていることに注意されたい。Kirchhoff の場合には電圧源によって回路に電流が流れると考えるが、Maxwell の定式化では、電圧源がない（ $E_{ij} = 0$ とする）場合でも、外部の電流源によって回路に電流が流れて頂点に電位の変化が生じる、と考えるのである。

係数行列 $(K_{ij})_{i,j=1}^n$ が正則ではないので、節点の電位に対するこれら n 個の連立 1 次方程式は独立ではない。独立な方程式はこれらの方程式から任意の 1 個を除くことによって得られる。さらに、解にも不定性が表れる。この不定性は P_i のうち 1 個、たとえば P_n を 0 におく（つまり、節点 n を接地する）か、あるいは電位差 $P_i - P_n$ に対する方程式

$$\sum_{j=1}^{n-1} K_{ij} (P_j - P_n) = \sum_{j \neq i} K_{ij} E_{ij} - Q_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

を考えること（Maxwell はこちらを採用した）によって消せる。

Maxwell はこの $n-1$ 連立 1 次方程式を Cramer の公式によって解き、第 3 版の付録において（実際に書いたのは編者の J. J. Thomson かもしれないが）解の表示の分子と分母の行列式の全展開を回路グラフの言葉で説明している。特に、分母の展開式の各項は回路グラフの全域木に対応して、各項の値は全域木の辺の電導率の積に等しい、ということが書き記されている。分母の行列式は $(K_{ij})_{i,j=1}^n$ の (n, n) 余因子であるから、これは行列と木の定理と同一の内容である。分子の行列式の展開式についても、2 個の木からなる全域森に対応している、ということが読み取れる。しかし、これらの公式の根拠や証明については何も書かれていない。

4.3 Weylの論文 (1923)

Kirchhoffの論文は電圧則の取り扱いに工夫を凝らしたが、Weylは電流則を中心に据えてKirchhoffの論文を見直した。その背景にはPoincaré[14, 15]やChuard[16]の研究がある。

回路グラフの辺電圧 I_1, \dots, I_m をベクトル $\mathbf{I} = (I_k)_{k=1}^m$ に組んで、第2節の符号付き接続行列を使えば (WeylはPoincaréやChuardにならった記号を使っている)、電流則は

$$B\mathbf{I} = 0$$

と表せる。Weylはベクトル \mathbf{I} が辺 e_k を単体とする1次元チェイン

$$c = \sum_{k=1}^m I_k e_k$$

に対応していて、電流則はサイクル条件

$$\partial c = 0$$

を表している、と解釈した。 I_1, \dots, I_m が整数値の場合には、電流則の方程式の解は回路グラフの閉路の整数係数1次結合に対応する。

WeylはChuard[16]にならって、上の電流則の方程式の解空間の次元が $\mu = m - n + 1$ であることや、その基底 i_1, \dots, i_μ として回路グラフの基本閉路に対応するものが選べることを説明した。そして、一般の電流ベクトルをそれらの1次結合

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k i_k$$

に表して、電圧則を $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ に対する方程式に書き直し、その解法を論じた。Kirchhoffと違って、Weylは基本閉路を選び出すために全域木を利用することはしていない。

Weylの論文は位置解析 (位相幾何学) から見た電流則の解釈を示しているが、代数的位相幾何学との関わりはこれにとどまらない。上の解釈では B は回路グラフの1次元チェインの境界作用素 ∂ を表現しているが、その転置 tB は0次元コチェインの余境界作用素 δ の -1 倍に対応する。その意味で、Maxwellの回路方程式の要である頂点電位は回路グラフの各頂点 v_i (0次元単体とみなす) で値 $\phi(v_i) = P_i$ をとる0次元コチェイン ϕ とみなせる。その余境界 $\delta\phi$ は辺電圧のベクトルに対応する。さらに、電気回路理論では複数の辺を境界とする面 (「網目」と呼ばれる) も考察の対象になるが、回路グラフにそれらの面を貼り付ければ2次元複体になり、Chuard[16]が考察した2次元複体の接続行列も視野に入ってくる。このような見方を徹底したのが代数的位相幾何学に基づく電気回路理論である [18]。

参考文献

- [1] 高崎金久, 線形代数と数え上げ, 日本評論社 2012 年 6 月 (増補版 2021 年 12 月).
- [2] 高崎金久, 線形代数とネットワーク, 日本評論社 2017 年 3 月.
- [3] J. W. Moon, *Counting labelled trees*, Canadian Math. Congress, 1970.
- [4] S. Chaiken, A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem, SIAM. J. Alg. Disc. Meth. **3** (1982), 319–329.
- [5] A. Cayley, Note sur une formule pour la réversion des séries, J. Reine. Angew. Math. **52** (1856), 276–284.
- [6] J. J. Sylvester, On the change of systems of independent variables, Quart. J. Pure. Appl. Math. **1** (1857), 42–56, 126–134.
- [7] C. W. Borchard, Ueber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante, J. Reine. Angew. Math. **57** (1860), 111–121.
- [8] G. Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, Ann. Physik Chemie **72** (1847), 497–508.
- [9] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd edition, Clarendon Press, Oxford, 1892. 第 1 版は 1871 年に刊行された.
- [10] J. J. Sylvester, On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm’s functions, and that of the greatest algebraical common measure, Phil. Trans. Roy. Soc. London **143** (1853), 407–548.
- [11] A. Cayley, Note sur la méthode d’élimination de Bézout, J. Reine. Angew. Math. **53** (1857), 366–367.
- [12] A. Cayley, A theorem on trees, Quart. J. Pure. Appl. Math. **23** (1889), 376–378.
- [13] A. Cayley, A memoire on the theory of matrices, Phil. Trans. Roy. Soc. London **148** (1858), 17–37.
- [14] H. Poincaré, Complément de l’Analysis Situs, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **13** (1899), 285–342.

- [15] H. Poincaré, Second complément à l'Analysis Situs, Proc. London Math. Soc. **32** (1901), 277–307.
- [16] J. Chuard, Questions d'Analysis Situs, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **46** (1921), 185–224.
- [17] H. Weyl, Repartición de corriente en una red conductora, Revista Matematica Hispano-Americana **5** (1923), 153–164.
- [18] K. Kondo, M. Iri and S. Amari, A Survey of the Recent Japanese Investigations in Topological Network Theory and Diakoptics, Matrix and Tensor Quarterly **13** (1963), 103–108.
- [19] W. T. Tutte, The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles, Proc. Cambridge Phil. Soc. **44** (1948), 463–482.
- [20] R. L. Brook, C. A. B. Smith, A. H. Stone and W. T. Tutte, Dissection of a rectangle into squares, Duke. Math. J. **7** (1940), 312–340.
- [21] C. W. Borchardt, Remarque relative à la note précédente, J. Reine. Angew. Math. **53** (1857), 367–368.