楕円函数と Painlevé 性について

大山 陽介[1]

1　初めに

Painlevé 方程式とは，1900 年ごろに Paul Painlevé によって発見された次の 6 つの方程式である：

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{I}} : y'' &= 6y^2 + t,\\
P_{\mathrm{II}} : y'' &= 2y^3 + ty + \alpha,\\
P_{\mathrm{IV}} : y'' &= \frac{1}{2y}y'^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4ty^2 + 2(t^2-\alpha)y + \frac{\beta}{y},\\
P_{\mathrm{III}} : y'' &= \frac{1}{y}y'^2 - \frac{1}{t}y' + \frac{\alpha}{t}y^2 + \frac{\beta}{t} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y},\\
P_{\mathrm{V}} : y'' &= \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)y'^2 - \frac{1}{t}y'\\
&\qquad + \frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \gamma\frac{y}{t} + \delta\frac{y(y+1)}{y-1},\\
P_{\mathrm{VI}} : y'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t}\right)y'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t}\right)y'\\
&\qquad + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left[\alpha + \beta\frac{t}{y^2} + \gamma\frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right].
\end{aligned}
$$

現在でも活発な研究がなされており，特に 1970 年代以降の研究においては日本人による貢献が大きい。しかしながら，決して簡単とは言えないこれらの方程式を Painlevé が発見しようとした動機はなんなのだろうか？

通常の解説（岡本 [47] など）では，Painlevé 方程式とは「動く分岐点を持たない 2 階正規型微分方程式の分類」として発見されたものであり，

---

[1]徳島大学・理工学部．e-mail: ohyama@tokushima-u.ac.jp.
本稿は 2021 年 10 月 17 日・第 31 回数学史シンポジウムでの講演をもとにしたものである。本研究は科研費 19K03566 によって部分的に支援されている。

そして特に，既知の函数では解くことができない新しい関数を見出そうとした，と言われている。さらに，モノドロミ保存変形によって得られる方程式である，とも書かれている。

こうした普通の説明は本当なのだろうか?　本当だとして，Paul Painlevé が 6 つの方程式を膨大な努力を積み重ねて見出そうとした背景は何だろうか。「動く分岐点を持たない」ことを “Painlevé 性” と呼ぶが，Painlevé 以前から研究があったことも確かであろう。それを考察するのが本稿の目的である。

Painlevé 方程式へと考察が進むきっかけになったの一つは楕円函数であると考えている。楕円函数は 19 世紀の解析学の花形の一つであり、複素解析や多様体など多くの数学が楕円函数の研究の過程で発展している。本稿では，Painlevé の時代からさらに 50 年前の 19 世紀半ばまで立ち戻り楕円函数の研究の中から Painlevé 方程式のルーツを探ることにする。

2　楕円函数の加法公式

楕円函数論は 18 世紀の Leonhard Euler, Adrien-Marie Legendre らの先駆的な研究に引き続き，19 世紀前半に Niels Henrik Abel, Carl Gustav Jacobi, Carl Friedrich Gauss らによって発展してきた。19 世紀の数学は当時としては最新の研究対象であった楕円函数をどう理解するかが大きな課題であり、楕円函数を扱う上で不可欠な複素函数論が Augustin Louis Cauchy 以降に大きく発展した。

19 世紀半ばに Charles Briot[2] (1817-1882), Jean-Claude Bouquet[3] (1819-1885) が複素函数論をもとにした楕円函数論の大著 [6] を著したのも時代の流れであったろう。

楕円函数の歴史については多くの文献があるので，ここでは触れない。楕円函数の性質として重要なものの一つが，加法公式であろう。ω_1, ω_2 を $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ となる複素数として，Weierstrass の $\wp$ 函数

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + {\sum_{m,n}}' \left\{ \frac{1}{(z - 2m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right\}$$

[2] フランス語版 Wikipedia（`https://fr.wikipedia.org/wiki/Charles_Briot`）などに掲載されている肖像画は音楽家 Charles-Auguste de Bériot の肖像のようで，はっきりしない。

[3] Bouquet の名前は，Jean Claude 表記もあるが，G. H. Halphen による死亡記事 [31] によると Jean-Claude である。Bouquet の論文・著作には M. Bouquet と記されていることが多く、first name がはっきりしない。

を考える、ここで $\sum'$ は 整数格子から $(m,n)=(0,0)$ を除いた和である。$\wp(z)$ は加法公式

$$\wp(u+v)+\wp(u)+\wp(v)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2$$

を満たす。$\wp'(u)$ を含んでいるが，$\wp'(u)^2=4\wp(u)^3-g_2\wp(u)-g_3$ を用いて微分の項を消すことにより $\wp(u+v),\wp(u),\wp(v)$ の代数関係式として表すこともできる。

$u,v\in\mathbb{C}$ に対して，2 変数多項式 F が存在して

$$F(f(u),f(v),f(u+v))=0$$

が成り立つとき，$f(u)$ は**代数的加法性**を持つという

Remark. 加法公式でも Bessel 函数のような場合は考えない

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n-k}(x)J_k(y)$$

また、$F(f(u),f(v),f(u+v))=0$ を v で微分して $v=0$ とおくと，2 変数多項式 R が存在して

$$R(f(u),f'(u))=0$$

を満たす。

ここまで出てきた楕円函数の性質をまとめると

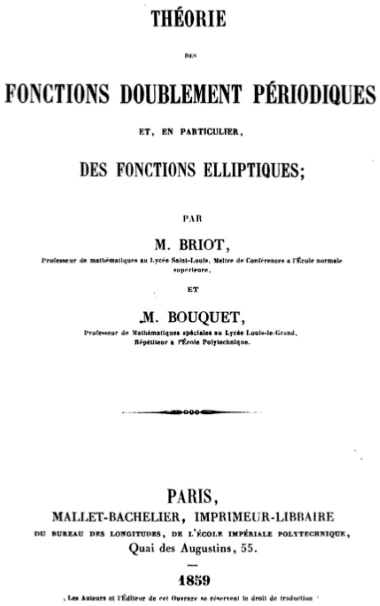
0. **楕円函数** とは複素平面上で二重周期 ω_1,ω_2 を持つ有理型函数のことをいう。ここで $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$ とする。
1. 楕円函数は Weierstrass の $\wp$ 函数 $\wp(z)$ を用いて，$\wp(z),\wp'(z)$ の有理函数として表示される
2. 楕円函数は 1 階の自律的代数的常微分方程式 $R(f(z),f'(z))=0$ を満たす。
3. 楕円函数は代数的加法公式を持つ

1856 年に発表された Briot-Bouquet の定理 [5] は上記の性質 2 の逆を与えることになる：

Briot-Bouquet の定理　自励的代数的常微分方程式 $R(f(z), f'(z)) = 0$ を満たし，全平面で一価有理型函数 $f(z)$ は次に限る：

(i) z の有理函数
(ii) e^{cz} (c は常数) の有理函数
(iii) z の楕円函数

[6, 7] にも詳細が書かれており，楕円函数のまとまった著書としても初期のものになる。


THÉORIE

DES

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

ET, EN PARTICULIER,

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR

M. BRIOT,

Professeur de mathématiques au Lycée Saint-Louis, Maître de Conférences a l'École normale supérieure,

ET

M. BOUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, Répétiteur à l'École Polytechnique.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1859

(Les Auteurs et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

Briot et Bouquet; *Théorie des fonctions doublement périodiques* (1859).

Briot-Bouquet の定理については Forsyth [17] Chap X が詳しい。Andrew Forsyth の 6 巻本は 1900 年ごろまでの微分方程式の理論を知るのに便利である。日本語では竹内 [69] の最後に詳しい解説がある。

Briot, Bouquet は，加法公式を複素平面全体で満たす函数のみを考えていたので自然に一価有理型函数になる。Briot-Bouquet の定理を拡張して、正則函数の芽が加法公式を局所的に満たす場合を考えたのが、Karl Weierstrass である。

Weierstrass-Phragmén の定理　正則函数の芽が加法公式を局所的に持てば，次のいずれかである

(i) z の代数函数
(ii) e^{cz} (c は常数) の代数函数
(iii) z の楕円函数の代数函数

Remark. Weierstrass-Phragmén の定理は，Briot-Bouquet の定理から一価有理型の仮定を外している。すなわち、「楕円函数であれば 1 階代数的微分方程式を満たす」の逆に相当するのが Briot-Bouquet,「楕円函数であれば加法公式を満たす」の逆に相当するのが Weierstrass-Phragmén である。

Weierstrass-Phragmén の定理は Weierstrass が講義の中で最初に述べ，論文として著したのが Lars Edvard Phragmén [62] であるため，この名前がついている。日本語による解説として武部 [68] がある。また，Painlevé も後に Weierstrass-Phragmén の定理に興味を持っている [59]。

3 Fuchs-Poincaré の定理

Briot-Bouquet は楕円函数のような加法性を持つ函数を調べたかったので自励的微分方程式しか考えていない。しかしながら、微分方程式論としてみれば，非自励系に拡張するのは自然である。しかし，当時の解析学の水準では微分方程式の一般論を考察すること自体が難しく、非自励系を考えるのは難解だったようである。一般の 1 階代数的常微分方程式を考察するのは 1884 年の Lazarus Fuchs [18] の研究を待たねばならなかった。

Fuchs-Poincaré の定理 $F(x, y, y')$ を x について解析的，y, y' について多項式とする。微分方程式 $F(x, y, y') = 0$ の解が一価解析的であれば二変数多項式 $F_x(y, y') = F(x, y, y')$ の種数は generic な x に対して 0 または 1。種数が 2 以上の場合は有理函数で解ける。

種数が 0 の場合は Riccati 方程式[4]

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

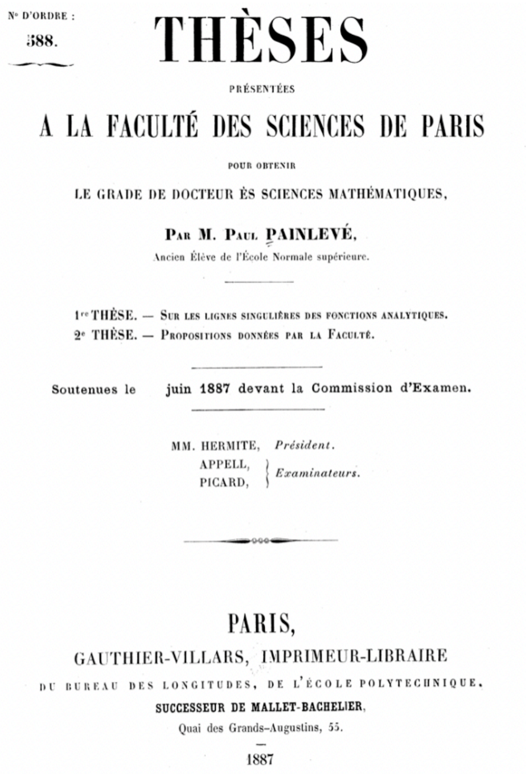
[4]Riccati に関して「リカッチ」読みが流布した理由は、おそらく 藤原松三郎「常微分方程式」 [24] の誤植が原因である。なお、藤原の本では後半に誤植を訂正しているが、そこまで読み進めなかった読者が多かったのであろう。参考までに，L. Fuchs の “Singuläre Stelle der Bestimmtheit” を「確定特異点」と訳したのも藤原と思われる。英語の “regular singular point” から「正則特異点」と訳されなかったことは、日本人にとって幸福であったと思う。

に帰着するので，Briot-Bouquet の結果の拡張になっている。種数が 2 以上の場合を丁寧に調べたのは Henri Poincaré [65] なので Fuchs-Poincaré の定理と呼ばれる。証明は Edward Lindsay Ince [35] Chap XIII, 前述の Forsyth [17] などを参照。現代的な記述は Michihiko Matsuda [45] にある。

L. Fuchs が今でいう Fuchs 型の微分方程式の研究を始めたのは 1866 年以降である [19]。不確定特異点の研究は Ludwig Wilhelm Thomé による。こうして，1870 年代は微分方程式の研究が個別の方程式の研究から一般論に変わりつつある時代でもあった。Fuchs-Poincaré の定理の定理は，こうした一般論の構築の流れの一方で，新しく保形函数論が理解されてきた時代に示されたものであろう。

4　Paul Painlevé の登場

Fuchs-Poincaré の定理は，1 階の非線型微分方程式で動く分岐点を持たない方程式を完全に分類したものであり，楕円函数を真に含んだものであった。ただ，この定理には一点見落としがあり動く真性特異点を持つかどうかについては議論されてない。この間隙を埋めたのが 1887 年 6 月に審査された Paul Painlevé の学位論文 [48] である。なお，学位論文は翌 1888 年に Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 誌に出版されている。



N° D'ORDRE :
588.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. PAUL PAINLEVÉ,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure.

1re THÈSE. — SUR LES LIGNES SINGULIÈRES DES FONCTIONS ANALYTIQUES.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le juin 1887 devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président.*
APPELL, PICARD, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1887

Paul Painlevé, Thèse (1887).

Painlevé の学位論文の主定理は

Painlevé の定理　$F(x,y,y')$ を x,y,y' に対して多項式とする。微分方程式 $F(x,y,y')=0$ の解は動く真性特異点を持たない

証明は難しいが P,Q を多項式として、正規系に限った

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

の場合の証明が福原 [34][5] にある。

上のように正規系に限ると，動く分岐点を持たない場合が Riccati 方程式になることの証明も難しくはない。

ちなみに，この学位論文では「複素平面のある領域で，ある曲線を除いて正則，その曲線上で連続であれば実は曲線上でも正則になる」という，

[5] 福原「常微分方程式」岩波全書の第二版 (1980) では非線型方程式の章が消えて不確定特異点の章に変わっているので、第一版を見ないといけない。

複素函数論の「Painlevé の定理」も述べられている [61]。この定理は，佐藤超函数論を考える際も「上半平面と下半平面との正則函数の差が函数の値として 0 であれば、超函数としても 0 になる」ということを意味するので、超函数論を支える極めて基本的な結果である。

4.1　真性特異点

19 世紀に複素関数論が発展していく過程の中で，おそらく Briot や Bouquet の頃は真性特異点について気にしていなかったと思われる。「真性特異点の周りでは値域は稠密である」という事実は，Casorati-Weierstrass の定理と紹介されることもあるが，1868 年の Felice Casorati の論文 [9] がさほど広まったわけではなく，1867 年の Weierstrass [70] の頃には広まっていったと思われる。Weierstrass は講義の中で発表することもあり，発見されたのが何時ごろかははっきりしない。Fuchs-Poincaré の定理では一価性のみを議論して，当初は真性特異点の問題をさほど意識しなかったのもやむ得ないだろう。

この頃の文献では「動く分岐点を持たない」という表現よりも「解が一価である」という表現が多い。もう少し後の Émile Picard の時代になると “équations différentielles à points critiques fixes” という表現が見られる。

なお，P. Painlevé は学位論文を書く直前に Göttingen に短期留学しており，H. A. Schwarz などに会っている。普仏戦争が 1870 年に起こり，ドイツとフランスの関係がさほどよくはなかったと思われるが，数学界では協調関係を取ろうとしていたようである。例えば，Lipschitz 連続を用いて微分方程式の解の一意性を示した論文は，Gaston Darboux が編集する Bull. Sci. Math. et Astro. 誌に Rudolf Lipschitz を招待したものである [44]。

5　1889 年

1889 年には，Painlevé 方程式や Painlevé 性に関する重要な結果が同時に４つ発表された。ほぼ独立した研究であるが，この時代に Painlevé 方程式の発見に向けて多方面で進展があったことで，時代の流れとしても Painlevé の研究は自然だったのではないかと思われる。

1) E. Picard 第 6 の特別な場合 [63]

Picard は不完全楕円積分の研究の中で，第 6 Painlevé 方程式の特別な場合を発見した：

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{u(2xu^2-1-x)}{(1-u^2)(1-xu^2)} + \frac{du}{dx}\left[\frac{u^2-1}{(1-x)(1-xu^2)} + \frac{1}{x}\right] - \frac{u(1-u^2)}{x(1-x)(1-xu^2)} = 0.$$

Les seuls points critiques des intégrales sont $x = 0, 1, \infty$.

Cette équation différentielle offre encore une particularité digne de

定理 第 6 Painleve 方程式の特殊な場合 $(\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 2)$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-x}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{w-x}\right)\frac{dw}{dx} + \frac{2w(w-1)}{x(x-1)(w-x)}$$

の一般解は、次で与えられる。ここで ω_1, ω_2 は楕円曲線 $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ の周期，$x = k^2$ である：

$$w(x) = \frac{1}{\mathrm{sn}^2(a\omega_1 + b\omega_2; k)}.$$

Remark. ここで、$\mathrm{sn}^2(a\omega_1 + b\omega_2; k)$ は、ω_1, ω_2 も k に依存しているので $w(x)$ は楕円函数 $\mathrm{sn}(z; k)$ の z, k の両方の変数が動いているため、複雑な挙動を示す。

[証明] 不完全楕円積分

$$\Omega(u, k) = \int_0^u \frac{dx}{\Delta(x)}, \qquad \Delta(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

を考える。まず、u を定数と思うと、k の函数として、Ω は次の方程式を満足する：

$$k(1-k^2)\frac{\partial^2\Omega}{\partial k^2} + (1-3k^2)\frac{\partial\Omega}{\partial k} - k\Omega + \frac{ku(1-u^2)}{(1-k^2u^2)\Delta(u)} = 0.$$

Ω が完全周期積分であれば、いわゆる Picard-Fuchs 方程式になり、この場合は超幾何関数に帰着できる。しかし、不完全楕円積分であるために最後の非斉次項がつき、ここから変形して Painlevé 方程式を得るのである。

a, b を定数として、$u = \mathrm{sn}(a\omega + b\omega'; k)$ とおき、$y = \Omega(\mathrm{sn}(a\omega_1 + b\omega_2); k)$ を k の函数と思うと

$$\frac{dy}{dk} = \frac{\partial\Omega}{\partial k} + \frac{1}{\Delta(u)}\frac{du}{dk},$$

$$\frac{d^2y}{dk^2} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial k^2} + \frac{1}{\Delta(u)}\frac{du^2}{dk^2} - \frac{u(2k^2u^2 - 1 - k^2)}{\Delta(u)(1-u^2)(1-k^2u^2)}\left(\frac{du}{dk}\right)^2 + 2\frac{ku^2}{\Delta(u)(1-k^2u^2)}\frac{du}{dk}.$$

となるので、以上から Ω を消去して、$x = k^2$ とおくと、$u(x)$ のみたす方程式

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{u(2xu^2 - 1 - x)}{(1-u^2)(1-xu^2)}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \\ &\qquad + \left(\frac{u^2-1}{(1-x)(1-xu^2)} + \frac{1}{x}\right)\frac{du}{dx} - \frac{u(1-u^2)}{x(1-x)(1-xu^2)} = 0\end{aligned}$$

を得る。ここで、$w = 1/u^2$ と変換して整理すると 第６ Painlevé 方程式の特殊な場合になる。

Remark. a, b が有理数の場合（楕円曲線の等分点の場合)、得られる函数 $u(x)$ は代数函数になる。

Remark. Picard の解の一般化として，例えば Garnier 系の場合には超楕円テータで記述できる解が知られている [14, 40]。超楕円曲線でない場合も [16] などの結果があり、[32] を参照されたい。

2) Mineo Chini による相似還元による 第 3 Painlevé 方程式の発見 [13]

曲面の曲率方程式を研究していた Chini は，常微分方程式への還元で

$$y'' = e^{2x}\sinh y$$

を得た。この式は第 3 Painlevé 方程式の指数函数表示 [3] になっており

$$y = \log u, \quad x = \frac{\log t}{t}$$

とおけば第 3 Painlevé 方程式の特殊な形（$D_8^{(1)}$ 型という）になる：

$$u'' = \frac{u'^2}{u} - \frac{u'}{t} + \frac{u^2}{8t} - \frac{1}{8t}$$

3) Kowalevski によるコマの研究 [41]

歴史的に有名な Kowalevski[6]のコマの研究もこの年である。

Si tel était le cas il faudrait pouvoir intégrer ces équations différentielles à l'aide de séries de la forme

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots),\\
q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \ldots),\\
r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \ldots),\\
\gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots),\\
\gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \ldots),\\
\gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \ldots),
\end{aligned}
$$

où $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$ désignent des nombres entiers positifs, et ces séries, pour pouvoir représenter le système général d'intégrales des équations différentielles considérées, devraient contenir *cinq* constantes arbitraires.

Kowalevski のコマの方程式は Painlevé 方程式そのものではないが，重力馬の元で剛体の回転運動がいつ求積可能になるかを考察したものである。方程式の解を Laurent 展開して、極しか持たない条件（Painlevé 性）を調べて、特殊な場合にのみ超楕円函数で解けることを示した。のちに Painlevétest と呼ばれる手法の先駆である。

4) Heun の方程式

1 年前の 1888 年ではあるが，Karl Heun によって 確定特異点を 4 つ持ち，アクセサリ・パラメタを 1 つ含む 2 階の線型微分方程式が研究されている [33]：

$$
\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-a}\right]\frac{dw}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)}w = 0.
$$

この Heun の方程式は Painlevé 方程式と直接には関係はないが，第 6 Painlevé 方程式も確定特異点を 4 つ持つ 2 階の線型微分方程式のモノドロミ保存変形で表され，Painlevé 方程式と関連する話題が多い。

[6] コワレフスカヤの著者名だが，Acta Math. に彼女が発表した 5 本の論文ではすべて "Sophie Kowalevski"である。学位論文はコーシー・コワレフスカヤの定理に関するもので，その著者名は "Sophie von Kowalevsky"，1885 年に Astro. Nach. に発表した論文は "Sophie Kowalewsky"となっている。また，このコマの論文とほぼ同一内容でフランス科学アカデミーに提出した論文では "Sophie de Kowalevsky" となっている。

5.1 Picard の撤退

こうして，1 階の場合の動く分岐点を持たない方程式の研究の後にも関連する研究が続き、いよいよ 2 階の場合の Painlevé 方程式の発見に向けて進みつつあったと思われたのだが，1893 年に Picard [64] は 2 階の場合の分類には消極的だったように思える:

> Ces remarques, peut être trop rapides, mais que je compte développer en détail dans le tome troisième de mon Traité d'analyse, ne sont pas en définitive très encourageantes. Il est peu probable que les équations d'ordre supérieur à points critiques fixes puissent conduire à l'étude de transcendantes nouvelles, en laissant bien entendu de côté les équations linéaires. J'espère beaucoup plus de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles, dont je vous entretenais naguère, et que j'ai sommairement indiqués dans une Note des Comptes Rendus (*Sur des fonctions d'une variable dépendant de deux constantes réelles arbitraires,* juin 1892).

Picard [64] ではいくつかの例を与えている。例えば

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 + 4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

は、1 階非線型方程式では現れなかった動く真性特異点を持つ：

$$y = Ce^{\frac{1}{x-C'}}$$

また、 Schwarz 写像

$$\frac{d^2\omega}{dy^2} + p(y)\frac{d\omega}{dy} + q(y)\omega = 0$$

の解 $\omega_1(y), \omega_2(y)$ に対して

$$x = \frac{\omega_1(y)}{\omega_2(y)}$$

とおき，その逆函数 $y(x)$ を x の函数と思うと，本質的に Schwarz 微分を満たす

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{dy^2}{dx^2}, \frac{dy^3}{dx^3}\right) = 0$$

が、この解は分岐点を無数に持ったり、場合によっては自然境界をもつ。

Schwarz 写像に関連して、Picard 以前から知られていた例としては、テータ零値に関する Jacobi の方程式 [36] がある：

$$\left(y^2y''' - 15yy'y'' + 30y'^3\right)^2 + 32\left(yy'' - 3y'^2\right)^3 = -\pi^2 y^{10}\left(yy'' - 3y'^2\right)^2$$

の一般解はテータ零値 $\theta_2(\tau), \theta_3(\tau), \theta_4(\tau)$ で表され、動く自然境界をもつ方程式になる。

ちなみにこの Jacobi の方程式は 140 年後に Leon Ehrenpreis によって散乱理論の研究のなかで再発見されている [15]。

さらに、3 階以上の正規系微分方程式では動く自然境界をもつ方程式が知られている。時代的に後になるが Painlevé の弟子であった Jean Chazy は、3 階の動く特異点を持たない方程式を考察した [11]。そのなかで、Chazy は動く自然境界をもつ方程式を見出している：

$$y''' = 2yy'' - 3(y')^2$$

少し変わった例として、Painlevé 自身も y について代数的な自励系の方程式を考察している [57]：

$$y'' = y'^2\left[\frac{y\left[2k^2y^2 - (1+k^2)\right]}{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + \frac{1}{\lambda\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right]$$

の一般解は，A, B を定数として

$$y = \mathrm{sn}\left(\lambda\log(Ax - B); k\right)$$

従って，$2\pi i\lambda$ が $\mathrm{sn}(x;k)$ の周期でなければ $x = A/B$ は動く分岐点になる。

6　三体問題

Painlevé 方程式とは直接関係はないが、1890 年代の数学において三体問題が大きなテーマであった。三体問題の歴史については他書に譲るとして、大雑把に記すと、1887 年に Heinrich Bruns が三体問題では古典的に知られている第一積分以外には座標と運動量に関する代数的な積分が

存在しないことを示した。引き続き、1890 年に Poincaré が三体問題に対して一価正則な積分が存在しないことを証明したのである [66]。

Bruns の定理に関連して、Painlevé は 1898 年に、運動量のみに関して代数的な積分が存在しないことを示して、Bruns の結果を拡張している [52]。

天体力学における Painlevé の大きな貢献として衝突解の研究がある。Painlevé は 1895 年にスエーデンのオスカー 2 世に招かれて、連続講義をおこなった。オスカー 2 世は Acta Mathematica 創刊時に資金援助を行うなど、学問に理解の深い国王で、Painlevé のストックホルム講義にも足を運んでいたそうである。

Painlevé の定理とは「三体問題において特異点は衝突解しかなく分岐点になるというものである。ストックホルム講義録 [49] の p.582 以降で "Du problèm des trois corps et des n corps" として天体力学を扱っている。実際に、三体が $t = c$ 1 で同時衝突するときは $(t-c)^{1/3}$ で展開される。ストックホルム講義録で、Painlevé は四体以上の問題も考察したが結果を得ることができなかった。彼が提案したのが

> Painlevé 予想 n 体問題（$n \geq 4$）では衝突解以外の特異点が存在する

という予想である。

さて、Painlevé のストックホルムでの講義を聞いた一人が Hugo von Zeipel である。von Zeipel はのちにパリに留学して天体力学の研究をおこなった。1908 年に、Zeipel はこの Painlevé 予想に関して「n 体問題（$n \geq 4$）で非衝突特異点が現れるのは、有限の時間で運動が非有界になる時に限る」という結果を得た [73]。すなわち、多体問題が特異点を持つなら、衝突するか非有界になるかいずれかである。

Zeipel の結果はフランス語で書かれてはいるが、さほど知られることなく、1920 年に独立に Chazy が再発見している [12]。ここで先取権の問題があった（von Zeipel の露文が 4 ページと短かったこともある）が、のちに von Zeipel の証明が正しいことが確認されている。

Painlevé 予想に関しては、さらに後になって肯定的に解かれている、1992 年に Zhihong Xia [71] が $N = 5$ の場合の非衝突解を構成し、さらに 2020 年に Jinxin Xue [72] が $N = 4$ の場合の非衝突解を構成した。

こうして、三体問題に関する研究が一段落した後、Poincaré は位相力学系へと進み、カオスの先駆者となり、位相幾何学の基礎をも作っていっ

た。他方で、Painlevé は動く分岐点を持たない 2 階非線型方程式の分類を行い、新しい特殊函数を見出していった。いずれも新しい時代の数学へつながるものであったが、20 世紀半ばまでは Poincaré の研究が継承されたのに対して、Painlevé の研究はその後忘れられたものになった。また、動く分岐点を持たない方程式の研究から距離を置いた Picard は代数曲面の積分や変換群を考察していった。代数曲面の理論はストックホルム講義録で Painlevé も考察しており、Guido Castelnuovo や Federigo Enriques に引き継がれていった。ずっと後になって、梅村浩氏は代数幾何の研究をおこなっているうちに古典を遡ってストックホルム講義録に興味を持ち、1980 年代後半以降に Painlevé 方程式の既約性や微分 Galois 理論の研究へと進んでいったのである。

7　Painlevé 方程式の発見

いよいよ Painlevé 方程式の発見である。ストックホルムでの講義のあと, 30 代半ばの脂の乗り切った時期に分類に挑戦している。なお、Painlevé 方程式に関する論文のほとんどは、彼の全集 Œuvres III 巻に収められている。

1898 年、C. R. 誌上に続け様に論文を発表している [50, 51] のは、彼の計算過程を示すものであろう。**126** 号 p.1699 に第 1、第 2 方程式が書かれている。同年 **127** 号 p.937 には第 3 方程式の 3 つの型（現代的には初期値空間の無限因子の形から D_6, D_7, D_8 型という）が表れている。翌 1899 年の **129** 号に書かれた 2 本の論文で、動く分岐点を持たない 2 階方程式は 25 タイプあって、そこで可積分な方程式を除外すると今でいう第 1 から第 3 方程式が得られることを示している。一連の Painlevé の結果は [53, 57] にまとめられており、通常はこの 2 本を見れば十分である。

7.1　Roger Liouville との論争

また、1902 年には Roger Liouville （有名な Joseph Liouville とは別人で、近い縁戚関係にないと思われる）との間で Painlevé 函数が本当に超越的かどうかについて C. R. Acad. Sci. Paris 誌上で論争をおこなった。Painlevé 方程式の既約性については 1980 年代に西岡啓二や梅村浩らによって解決されたが、当時の変換理論では扱うことが困難であった。

Painlevé が証明を持っていないの確かだが、証明もなく求積できると主張した Liouville にも無理があった。

まず、C. R. 1902 年 9 月 1 日号で R. Liouville は Painlevé 方程式の既約性に疑問を呈し、高階の線型方程式の解で解けると述べた。C. R. 誌は週刊であり、次の 9 月 8 日号で Painlevé は反論している。この後、

1) 10 月 27 日 に Painlevé, 11 月 3 日に Liouville、11 月 10 日に Painlevé
2) 12 月 1 日に Liouville、12 月 8 日 に Painlevé
3) 翌 1903 年 1 月 19 日に Liouville、1 月 26 日に Painlevé

と Painlevé が 5 本、Liouville が 4 本の小論を C. R. 誌に載せた [58, 43]。特に、Painlevé は毎回 Liouville の小論の翌週号にきっちりと反論している。当時の数学のレベルでは決着がつかず、Painlevé は Jules Drach の微分 Galois 理論を用いて証明できるという予想を立てて終わった。以降、Painlevé 方程式の既約性については長い間触れないことになっていたようである。

実は、Painlevé 方程式の既約性の証明には Drach の理論は不要であり、有限次元の微分 Galois 理論の範囲で既約性は証明されている。微分方程式が既約でないというのは、アーベル函数もしくは線型微分方程式の解で解けること（梅村の意味で古典函数で解ける）を意味しており、古典函数なら微分 Galois 群は有限次元だが、Painlevé 方程式はその範囲の外にあることを示せば既約性を示したことになるからである。Drach の理論、すなわち無限次元の微分 Galois 理論は 20 世紀初頭の数学では扱えるものではなかった。

7.2 Richard Fuchs

1900 年になると、Painlevé は連立系や高階の場合に拡張を試みたがうまく行っていない [54, 55, 56]。

そうした中、1905 年に Lazarus Fuchs（本稿で紹介した Fuchs-Poincaré の定理や Picard-Fuchs 方程式などは Lazarus の仕事）の息子である Richard Fuchs が、父親が研究したモノドロミ保存変形の一例として、4 つの確定特異点＋ 1 つの見掛けの特異点を持つ 2 階線型常微分方程式のモノドロミ保存変形から、今でいう第 6 Painlevé 方程式を導出した [20]。さらに 1907 年に Math. Ann. に詳しい計算が掲載されている [21]。

このR. Fuchsの結果は、動く分岐点を持たない2階非線形微分方程式の分類というPainlevéの研究が既存の数学とかけ離れたものではなく[7]、実は線型常微分方程式のモノドロミという数学的に重要な対象と関連することを示したものであるとともに、Painlevéの分類に抜けがあることを示したものである。

Painlevéが第6方程式を抜かした理由ははっきりしないが、特殊な場合であるPicardの方程式はPainlevéもよく調べていて、楕円関数で解けるPicardの方程式は求積可能であると判断していたことも理由かもしれない（Picardの方程式は梅村の意味では既約であるが、Malgrangeの意味では積分可能と見なされる)。

1905年以降、Painlevéの弟子のBernard Gambierが中心となってPainlevéの計算ミスを修正していくが、それは次節に回して、最後にR. Fuchsについて簡単に紹介する。

1897年にR. Fuchsは超楕円積分の研究で学位をとった（J. für Math. **119**, 1–24）その後、Richardの姉であるClaraと結婚した義兄Ludwig Schlesingerと共に、父L. Fuchsの全集（3巻）[19]の編集を行なった。並行して、このモノドロミ保存変形の研究を行なった。

その後、Picardの解の等分点が代数解になることを示したのは良い仕事[22]であるが、Math. Ann. に発表した論文のタイトルがモノドロミ保存変形の論文と全く同じタイトルであったこともあってか、100年近く忘れ去られていた。Painlevé方程式に関する大きな仕事として、Painleve VI型函数の特異点の周りでの振舞いを調べたのが[23]であるが、直後にGarnier [30]に誤りを指摘される。間違いではあったが、二重級数展開などR. Fuchsの漸近解析にも見るべきものはあったと思う。以降はPainlevé方程式の研究は行ってないようである。

その後、第一次大戦時に戦争に役立つ研究に駆り出されたようで、以降は航空力学にシフトした。1922年にLudwig Hopfと共著で“Aerodynamik” (2巻) を著している。

[7] Poincaréは Painlevéの仕事を「絶海の孤島」と評したように、Painlevé方程式の分類は従来の数学とかけ離れたものと思われていたが、本稿の目的は19世紀後半の数学の流れとして自然であることを示すものである。

7.3 Gambier による修正

R. Fuchs の結果を見て、Painlevé の計算に穴があることに気がつかされた。しかし、1906 年以降に修正したのは、Painlevé ではなく彼の弟子であった Bernard Gambier である。Gambier は “Sur les équations différentielles du second ordre dont l’intégrale générale est uniforme” などという標題で C. R. に次々と論文を発表する [25, 26, 27, 28]。

R. Fuchs による C. R. の論文 [20] は 1905 年 10 月 2 日に出版されている。 引き続いて Gambier は 19061 年 1 月 29 日の [25] を皮切りに，6 月 18 日 [26] で第 4 方程式を，さらに，6 月 25 日 [27] に引き続いて，11 月 12 日 [28] で第 5 方程式を見出して，Painlevé 方程式が出揃う。Gambier のこの 1 年の計算を受けて，Painlevé 自身がまとめの論文を著したのが 1906 年 12 月 24 日である [60]。

なお，Gambier 自身が C. R. での一連の計算をまとめたものが 1909 年に Acta Math. 誌に発表される [29]。通常，Painlevé 方程式の分類の完成として引用されるのはこの論文である。

Painlevé が計算ミスをした理由は定かではない。Painlevé は当初には動く分岐点を持たない方程式を 25 種持ってきてそのうち 3 つが新規とした。Gambier の分類では 50 種から 6 つを見出した。この分類については Ince [35] もわかりやすい。ただ、第 6 には Picard の方程式が含まれており、第 5 の特別の形は第 3 である。また、第 4 は Gambier の第 34 方程式を含む形になっており、この第 34 は第 2 方程式と等価である。第 4 から第 6 を見逃した理由としては、パラメタが特別な場合が第 2 、第 3、Picard 方程式になったから、というのもあったかもしれない。

8 その後の進展

Painlevé の方程式のその後の進展は 1930 年代までに限るとさほど多くない。P. Boutroux や R. Garnier などによる有名な話は省略して，少し変わった話題を紹介しよう。

[**特異解**] J. Chazy は 1914 年に変わった特異解を持つ 2 階の非線型方程式を見出した [10]。微分方程式

$$w'' = -w^3w' + ww'\sqrt{4w' + w^4}$$

の一般解は

$$w = A\tan\left(A^3 z + B\right)$$

であるが，特異解として動く分岐点を持つ解が存在する

$$w = \sqrt[3]{\frac{4}{3(z-C)}}.$$

この方程式はもちろん Painlevé 方程式ではないが，どう扱っていいかまだよくわからないし，こうした方程式が他にどの程度存在するのかもよくわからない。この例も [35] p.355 にある。

[**反応拡散方程式への応用**] Painlevé 方程式の数学以外への応用としては，1910 年に反応拡散方程式に応用した Ferencz Jüttner [37] の研究が早い。第 1 Painlevé 方程式やそのタウ函数が扱われているが、反応拡散の分野にも Painlevé 方程式の研究にも大きな影響を与えなかったようだ。Jüttner の研究は Rutherford Aris [2] にも紹介されている。

その後，1965 年の John M. Myers [46][8] の研究があり，1970 年代の Ising 模型の研究以降に Painlevé 方程式が大きな復活を遂げた。

[**対称解**] また，Paul Appell も第 1，第 2 Painlevé 方程式の対称解について論文を著している [1]。この論文は長く忘れられており，A. V. Kitaev [39] が独立に対称解を発見している。さらに第 4 Painlevé 方程式の対称解を研究したのが金子 [38] である。金子和雄氏は Painlevé 方程式の研究で 71 歳の時に博士の学位を取得し，その後も 70 代で 9 本の査読論文を発表したのちに 2015 年に 80 歳で亡くなられた。

ちなみに，Paul Painlevé の妻 Marguerite（1868-1902）は息子 Jean を産んで間もなく亡くなった。Jean Painlevé は映画制作で知られており、水中の生物を撮影した映画は有名である [4]。Paul には二人の姉 Marie（1856 生）と Blanche（1861 生）がおり，Marie が Jean の面倒を見たようである。Blanche は画家の Maurice Louis と結婚し，その間に生まれた娘 Jeanne (1889-1939) は Paul Appell の子供である Pierre Appell (1887-1957) と結婚した。この Pierre は海軍時代に潜水艦 Monge（数学者 Gaspard Monge に因む）に乗艦している。

[8]元になっているのは J.M. Myers“Symmetry in scattering by a strip”, thesis Harvard University (1962)

なお、Michael Tabor が 1984 年に Nature 誌に非線型力学の論説 [67] を書いており、 その中で Painlevé の仕事にもかなり触れている。当時の Nature 誌は今と違いもう少し数式を許容していたようである。

9　まとめ

Paul Painlevé による膨大な分類は長い計算を必要としており、一見他の数学と孤立しているように見える。しかしながら、Painlevé 本人を含めて、Poincaré や Picard らの同時代の研究を合わせ見ると、決して突然現れた異端の数学ではなく、楕円函数以来の自然な流れの中で生み出されたものだったと感じている。確かに時代が進みすぎていた部分があり、Painlevé 方程式の研究が応用を含めて活発になるのは Painlevé の死後 40 年経った 1970 年代からであった。

現代では代数幾何・表現論など様々な手法で研究されており、離散系の研究も活発である。Painlevé 方程式の解析的研究はまだ不十分であり、今後もやらなければいけないことが多い。そうした研究の中で、古典解析のルーツを探ることは役立つことが多いと考えている。

Remark. 以下の文献で，Comptes rendus 誌については個別の URL は省略したので、次を参照されたい。
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb343481087/date.
また，一部の論文では似たような表題のものをまとめた。

参考文献

[1] P. Appell; Sur les polynômes se rattachant à l'équation différentielle $y'' = 6y^2 + x$, *Bull. Soc. Math. France*, **45** (1917), 150–153. https://doi.org/10.24033/bsmf.980

[2] R. Aris; Award Lecture: The Theory of Diffusion and Reaction A Chemical Engineering Symphony, *Chem. Eng. Educ.* **8** (1974), 19-25, 36-40. https://journals.flvc.org/cee/article/view/126139

[3] M. V. Babich and L. A. Bordag; Projective Differential Geometrical Structure of the Painleve Equations, *J. Differ. Equations* **157**, 452–485 (1999). https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3628

[4] *Science Is Fiction: The Films of Jean Painlevé'*, Edition by Andy Masaki Bellows, Marina McDougall, Brigitte Berg, (The MIT Press) 2000.

[5] C. Briot and J.-C. Bouquet; Étude des fonctions d'une variable imaginaire; *J. l'Ecole Polytechnique*, t. **21**, Cah. **36** (1856), 85–254. [Propriétés des fonctions définie par des équations différentielles (Deuxième Mémoire) 133-198.] https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433689c/f136.item

[6] C. Briot and J.-C. Bouquet; *Théorie des fonctions doublement périodiques*, Paris (1859). https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99569b

[7] C. Briot and J.-C. Bouquet; *Théorie des fonctions doublement périodiques*, 2e édition, Gauthier-Villars, Paris (1875). http://eudml.org/doc/203668.

[8] H. Bruns; Über die Integrale des Vielkörper-Problems, *Acta Math.* **11** (1887), 25–96. https://doi.org/10.1007/BF02612319

[9] F. Casorati; *Teoria delle funzioni di variabili complesse*, Fratelli Fusi, 1868. https://books.google.co.jp/books?id=TBgUAAAAQAAJ

[10] J. Chazy; Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, *C. R. Acad. Sci. Paris* **148** (1909), 157–158.

[11] J. Chazy; Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes *Acta Math.* **34** (1911), 317–385. https://doi.org/10.1007/BF02393131

[12] J. Chazy; Sur les singularités impossible du problème des n corps. *C. R. Acad. Sci. Paris* **170** (1920), 575–577.

[13] M. Chini; Sulle superficie a curvature media constante, *Giornale di Matematiche di Battaglini* **27**, 107–123. https://archive.org/details/giornaledimatem05unkngoog/page/n118/mode/2up

[14] P. Deift, A. Its, A. Kapaev and X. Zhou; On the algebro-geometric integration of the Schlesinger equations, *Commun. Math. Phys.* **203**, No. 3, 613–633 (1999). https://doi.org/10.1007/s002200050037

[15] L. Ehrenpreis; Fourier analysis, partial differential equations, and automorphic functions, *Proc. Symp. Pure Math.* **49** (1989), Part 2, 45–100.

[16] V. Z. Enolski and T. Grava; Singular $\mathbb{Z}_N$-curves and the Riemann-Hilbert problem. *Int. Math. Res. Not.* 2004, **No. 32**, 1619–1683 (2004). https://doi.org/10.1155/S1073792804132625

[17] A. R. Forsyth; *Theory of Differential equations*, Vol II, Part II (1900). https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99545b

[18] L. Fuchs; Über differentialgleichungen, deren integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* (1884), 699–710; Werke 2, 355–368.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/92812#page/67/mode/1up

[19] Gesammelte mathematische Werke von L. Fuchs, Three Vol., Berlin 1904, 1906, 1909.
https://archive.org/details/gesammeltemathem01fuchuoft
https://archive.org/details/gesammeltemathem02fuchuoft
https://archive.org/details/gesammeltemathem03fuchuoft

[20] R. Fuchs; Sur quelques équations différentielles linéarires du second order, *C. R. Acad. Sci. Paris* **141** (1905), 555–558.

[21] R. Fuchs; Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegene wesentlich singulären Stellen, *Math. Ann.* **63** (1907), 301–321.
http://eudml.org/doc/158289

[22] R. Fuchs; Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegene wesentlich singulären Stellen, *Math. Ann.* **70** (1911), 525–549.
`https://doi.org/10.1007/BF01564511`

[23] R. Fuchs; Über die analytische Natur der Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten, *Math. Ann.* **75** (1914), 469–496. `https://doi.org/10.1007/BF01563655`

[24] 藤原松三郎, 常微分方程式（岩波書店）1930.
`https://books.google.co.jp/books?id=1V7tPMd5dj0C`

[25] B. Gambier; Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **142** (1906), 266–269.

[26] B. Gambier; Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, *C. R. Acad. Sci. Paris* **142** (1906), 1403–1406.

[27] B. Gambier; Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, *C. R. Acad. Sci. Paris* **142** (1906), 1497–1500.

[28] B. Gambier; Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **143** (1906), 741–743.

[29] B. Gambier; Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, *Acta. Math.* **33** (1910), 1–55.
`http://doi.org/10.1007/BF02393211`

[30] R. Garnier; Études de l'intégrale générale de l'équation VI de M. Painlevé dans le voisinage de ses singularités transcendantes, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) 34 (1917), 239–353.
`http://www.numdam.org/item/?id=ASENS_1917_3_34__239_0`

[31] G. H. Halphen; Notice sur les Œuvres de M. Bouquet (Jean-Claude), member de l'Académie des Sciences, *C. R.*, **102** (1886), 1267–1273.

[32] J. Harnad; F. Balogh; *Tau functions and their applications.* Cambridge (2021).

[33] K. Heun; Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten, *Math. Ann.* **33** (1888), 161–179. `http://eudml.org/doc/157403`

[34] 福原滿洲雄　常微分方程式（岩波全書，第一版） 1950

[35] E. L. Ince; Ordinary Differential Equations, Longmans, Green and Co., 1927, Chap XIII. `https://archive.org/details/ordinarydifferen029666mbp/mode/2up`

[36] C. G. J. Jacobi; Über die Differentialgleichung, welcher die Reihen 1 ... + etc., 2 ... + etc. Genüge leisten. *Crelle J.* **36** (1848), 97–112; Werke **2**, 171–190. `https://eudml.org/doc/147402` `https://archive.org/details/gesammelwerk02jacorich/page/n181/mode/2up`

[37] F. Jüttner; Die chemische Reaktionskinetik und ein neue Painlevésche Transzendente, *Z. Math. Phys.*, **58** (1910), 385–409.

[38] K. Kaneko; A new solution of the fourth Painlevé equation with a solvable monodromy *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **81**, 75–79. `https://doi.org/10.3792/pjaa.81.75`

[39] A. V. Kitaev; Symmetric solutions for the first and second Painlevé equations. *J. Math. Sci.* **73** (1995), 494–499. `https://doi.org/10.1007/BF02364571`

[40] A. V. Kitaev and D. A. Korotkin; On solutions of the Schlesinger equations in terms of Θ-functions, *Int. Math. Res. Not.* 1998, **No. 17**, 877–905 (1998). `https://doi.org/10.1155/S1073792898000543`

[41] S. Kowalevski; Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Math.* **12** (1889) 177–232. `http://doi.org/10.1007/BF02592182`

[42] R. Liouville,; R. Liouville,; Sur les équations différentielles du second ordre à à points critiques fixes, *C. R.* **135** (1902) 392–395;

[43] R. Liouville,; Sur les transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre. *C. R.* **135** (1902) 731–732; 952–954; Sur la réductibilité des équations différentielles, *C. R.* **136** (1903), 146–148.

[44] R. Lipschitz; Sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations différentielles, *Bull. Sci. Math. Astro.* **10** (1876), 149–159.
`http://www.numdam.org/item/?id=BSMA_1876__10__149_0`

[45] M. Matsuda, *First order algebraic differential equations : a differential algebraic approach*, Springer Lecture Notes in Math. **804**, 1980.
`https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0091495`

[46] J. M. Myers; Wave scattering and the geometry of a strip, *J. Math. Phy.* **6** (1965),1839–1846. `http://doi.org/10.1063/1.1704731`

[47] 岡本和夫, パンルヴェ方程式（岩波書店）2009.

[48] P. Painlevé, Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, **2** Série 1, (1888) , B1–B130.
`https://books.google.co.jp/books?id=qoI2AQAAMAAJ` (Theses)

[49] P. Painlevé, Leçons, sur la théorie analytique des équations différentielles à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le roi de Suède et de Norwège, 1897.
`https://iris.univ-lille.fr/handle/1908/1536`

[50] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, *C. R.* **126** (1898) 1185–1188; *C. R.* **126** (1898) 1697–1700; *C. R.* **127** (1898), 541–544; *C. R.* **127** (1898) 945–948; *C. R.* **129** (1899), 750–753; *C. R.* **129** (1899), 750–753; Œuvres III.

[51] P. Painlevé, Sur la détermination explicite des équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **126** (1898) 1329–1332; Œuvres III.

[52] P. Painlevé, Mémoire sur les intégrales premières du problème des n corps, *Bull. Astro.* **15** (1898) 81–113; Œuvres III, 666–699. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65371319/f89.item

[53] P. Painlevé, Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, *Bull. Soc. Math. France*, **28** (1900) 201–261. http://www.numdam.org/item/?id=BSMF_1900__28__201_0

[54] P. Painlevé, Sur les systèmes différentiels à points critiques fixes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **130** (1900) 767–770.

[55] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du troisième ordre à points critiques fixes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **130** (1900) 879–882.

[56] P. Painlevé, Sur les équations différentielles d'ordre quelconque à points critiques fixes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **130** (1900) 1112–1115.

[57] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme, *Acta Math.* **25** (1902) 1–85. https://doi.org/10.1007/BF02419020

[58] P. Painlevé, Sur l'irréductibilité des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre, *C. R.* **135** (1902) 411–415; Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation, $y'' = 6y^2 + x$, *C. R.* **135** (1902) 641–647; Sur les transcendantes uniformes définies par l'équation, $y'' = 6y^2 + x$, *C. R.* **135** (1902) 757–761; Sur l'irréductibilité de l'équation, $y'' = 6y^2 + x$, *C. R.* **135** (1902) 1020–1025; Sur la réductibilité des équations différentielles, *C. R.* **136** (1903) 189–193.

[59] P. Painlevé; Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition, *Acta Math.* **27** (1903), 1–54. https://doi.org/10.1007/BF02419020

[60] P. Painlevé; Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **143** (1906) 1111–1117.

[61] Painlevé theorem. *Encyclopedia of Mathematics.* http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Painlev%C3%A9_theorem

[62] E. Phragmén; Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques, *Acta Math.* **7**, 33–42 (1885).
`https://doi.org/10.1007/BF02402193`

[63] E. Picard; Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (Grand prix des Sciences mathématiques, 1888), *J. Math. Pures et Appl.* **5**, 135–319, 1889.
`https://eudml.org/doc/235412`

[64] E. Picard; Remarques sur les équations différentielles, *Acta Math.* **17** (1893), 297–300. `https://doi.org/10.1007/BF02391996`

[65] H. Poincaré; Sur un théorème de M. Fuchs, *Acta Math.* **7** (1885), 1–32; Œuvres **III**, 1–32. `https://doi.org/10.1007/BF02402192`

[66] H. Poincaré, Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Math.* **13** (1890), 1–270.
`http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/chp/hp-pdf/hp1890am.pdf`

[67] M. Tabor; Modern dynamics and classical analysis, *Nature* **310** (1984), 277–282. `https://doi.org/10.1038/310277a0`

[68] 武部 尚志, 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方（日本評論社) 2019. 第 16 章 加法定理による特徴付け–楕円関数の国の旗印.

[69] 竹内 端三, 楕円函数論（岩波全書） 1936.
`http://doi.org/10.11501/1063357`

[70] K. Weierstrass; Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* 11–60 (1876); Werke **2**, 75–124.
`https://www.biodiversitylibrary.org/item/92671#page/605/mode/1up`
`https://archive.org/details/mathematischewer02weieuoft/page/76/mode/2up`

[71] Z. Xia; The Existence of Noncollision Singularities in Newtonian Systems, *Ann. Math.* **135** (3) (1992), 411–468.
`https://doi.org/10.2307/2946572`

[72] J. Xue; Non-collision singularities in a planar 4-body problem, *Acta Math.* **224** (2) (2020), 253–388.
https://dx.doi.org/10.4310/ACTA.2020.v224.n2.a2

[73] H. von Zeipel; Sur les singularités du problème des n corps. *Arkiv för Mat. Astron. Fys.* **4** (1908), 1–4.