

第 31 回数学史シンポジウム講演概要

題名：「数学的表現」について

三宅 克哉

2003 年の津田塾大学数学・計算機科学研究所における第 14 回数学史シンポジウムで講演した際に「数学の三相」（三宅著『方程式が織りなす代数学』付記 II を参照）をまとめ、この三相を「数学的実在」、「数学的事実」および「数学的表現」とした。今回の講演ではこの「数学的表現」についての数学史的な展開を足早に辿る。

・目次

1. 数学的表現
 2. パラダイムとしての数
 3. 「Pre-Socratic philosophers」についての補足
 4. アテネ学派
 5. 「数学的表現」の様式としての誕生
 6. Euclides の『原論』
 7. 『原論』における数論の位置, その他
 8. 「人間の宇宙」
 9. Diophantus の『算術』と未知数の記号
 10. 3 次方程式に至る道
 11. ルネサンス期における代数学
 12. 3 次方程式が代数的に解かれた!
 13. Viète の解析術
 14. 解析幾何学の誕生
 15. 微積分, 冪級数, 変量と関数
 16. 数論の新たな出立
 17. パラダイムとしての新たな「数論」への展開, その 1
 18. その 2: 楕円関数, 等々
 19. その 3: 「無限公理」と実数の連続性
 20. その 4: 「数学的表現」と「無限公理」
 21. 数学的表現についての原則的な姿勢の分岐と展開
- ・補遺. Dedekind の切断
- ・参考文献

1. 数学的表現

まず初めに「数学的実在」と「数学的事実」の「数学的表現」との関係を描いておこう。筆者が「数学的実在」として意味するところは、数学者の各々を数学に駆り立てるのっぴきならない個人的な衝動とか必然性を支えるものを指す。また「数学的事実」は、そのような数学者が、例えば公準や公理、定義ないしは命題とか証明として数学的な表現を与えて社会的に定着させようとする「数学的表現」の部品である。「数学的表現」はそれらの部品に一定の数学的で論理的な秩序を与えて（数学）社会に送り出されたものを意味する。この意味でこれらの三相はいずれもあくまでも「個的なもの」であり、「人間的なるもの」である。特に「数学的表現」は人間の（数学的な）社会へと提示されたものであり、例えば「真理の世界」や「絶対調和の世界」といったものとは無縁なものである。もちろん「数学的事実」には他者が提示した「数学的表現」の部品を切り出したものが含まれる。

またついでながら、「数学的なアイデア」は、一人の数学者または数学者たちの小グループが新たに「数学的表現」として送り出すべく先ず切り出した「数学的事実」あるいはその萌芽の集まりを指すものと理解すればよい。一点注意が必要なのは、「数学的表現」の様式は数学の発展とともに変化し、発展することである；それ以上に、「数学的表現」の様式の発展こそが数学の発展である。このようにすべてを動的なものと理解しておく、例えば André Weil のいう「数学史は数学的なアイデアの受け渡しである」という視点も理解しやすくなる。（アンドレ・ヴェイユ著『数論 歴史からのアプローチ』特別付録を参照、）

数学史においても 19 世紀はまさに激動の時代であった。特に筆者のように数論に深く関わってきた者にとれば、Gauss の『数論研究 (*Disquisitiones Arithmeticae*)』によって 19 世紀が始まり、Hilbert の『数論報文 (*Zahlbericht*)』によって 19 世紀が終わったと言われれば十分に納得が行く。例えば数学史家 Jeremy Gray は講義録『抽象代数学の歴史；代数方程式から現代代数学へ (*A History of Abstract Algebra; From Algebraic Equations to Modern Algebra*)』において、環論を主軸とした「現代的な代数学の概念的な枠組みが Emmy Noether によって敷かれたことを否定するものはいないだろう」という。Gray はしかしさらにまた、それでもなお彼女は「すべてはすでに Dedekind にある」とし、19 世紀の大いなる流れのなかで生まれ、育ってきたことを自分の数学の不動の立脚点としていたと説くとともに、「整数の環はパラダイム的な数学上の対象である」と強調している。

2. パラダイムとしての数

数を初めてパラダイム的に採用したのは、紀元前 6 世紀に活躍した「サモスの賢人」Pythagoras である。彼は 20 年にわたる放浪によって当時存在した数学の知識のすべてを身につけて故郷のサモス島に帰還したが、その地の僭主に反発してイタリア半島に移り、彼の教団ないしは学派を興したとされている。この学派の場合は、数としては「単位からなる多」であるが、加法、乗法および整除性をもつ正の整数を考えていた。そして「あらゆる事象には数が内在しており、宇宙のすべては人間の主観ではなく数の法則

に従い、数とその計算によって解明される」という思想を打ち立てたとされ、簡潔な標語「万物は数なり」によって伝承される。そして子弟の教育として四つの学科マテマタ (μαθηματα; mathematics の語源で、この語尾の s は複数を表す)、算術 (静なる数)、和声 (動なる数)、幾何学 (静なる図形)、天文学 (動なる図形) を設定した。(なお Arithmetic には明治以降「算術」という訳語が与えられてきた。これに対して用語「数論」は 18 世紀末に出版された Legendre の著書『*Essai sur la Théorie des Nombres*』によっている。本論では意味が響きやすい「数論」という用語を用いることも多い。ただし用語「算術」は中国の古典『九章算術』から採られたものであろう。)

Pythagoras と彼が率いる学派は三角数の $1, 3 = 1 + 2, 6 = 1 + 2 + 3, 10 = 1 + 2 + 3 + 4$, 等に強く惹かれ、なかでも三角数としての 10 をテトラクテュス (τετρακτύς, 四つ組み三角数) と呼び、完全なるものとして重要視した。

また Pythagoras 学派においては「人間の宇宙」そのものは宇宙の中心火を中心にして 9 個の球面、すなわち、地球、月、太陽、水星、金星、火星、木星、土星のそれぞれが乗る球面とすべての恒星が乗る一つの球面が回転し、さらに重要な数に合わせるべく 10 種の天体像を希求し、中心火に対して地球と対称的な位置に「反地球 (αντιχθον)」(ないしは「対地球 (counter-earth)») を構想し、これは中心火のために地球からは見えないものであるとした、ともされている。

なお、古代ギリシャでは紀元前 4 世紀のクニドスの Eudoxos による地球を中心とした天動説、さらには紀元前 3 世紀のサモスの Aristarchus による太陽を中心とした「地動説」も存在していた。

いわゆる Pythagoras の定理「直角三角形の三辺 a, b, c は関係式 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす」ことがこの学派によって知られていたことは間違いのないようである。バビロニア数学の古い粘土板 Plimpton 322 にはこういった 15 組の数の三つ組みの表が与えられている。しかも三つ組み自体の並べ方は実に不規則であるが、表の第 1 列には c^2/a^2 が書かれており、この値はほぼ規則的といってもよさそうな順序に並べられている。このことから、諸説があるものの、この表は今で言う三角関数値もしくは「数直角三角形」の組織立った表に該当するものであるとも考えられる。果たして Pythagoras がかの地においてどの程度までこういった数の三つ組みについての知識を得ていたかは明確でない。

Euclides の『原論』の第 3 巻命題 31 では「円においては半円内の角は直角であり、半円よりも大きい切片内の角は直角よりも小さく、より小さい切片内の角は直角よりも大きい。等々」と書かれている。この直径上の (半) 円弧を直角三角形によって特徴づける定理はすでにミレトスの Thales 以前に知られていたとされており、彼の業績に因んで「タレースの定理」と呼ばれることがある。その証明は円周上の頂点と円の中心とをさらに結べば問題の三角形が二つの二等辺三角形に分割されることおよび三角形の内角の和が二直角になることから容易に導かれる。この定理にいう幾何学の円弧と上記のような有理整数からなる三つ組みとの関係は Pythagoras には十分に知られていたとしても問題はなさそうである。

ところがしかし、やはりこの学派によって、例えば正方形の対角線と辺との比や正五角形の対角線と辺との比が有理数、すなわち整数の比、でないことが発見されるに至り、幾何学による表現能力が数 (ないし数の比) による表現能力よりも遥かに豊かであ

ることが明らかになった。

もちろん、変数記号が導入されたあとの Descartes や Fermat による解析幾何学の視点に立つならば、等式 $a^2 + b^2 = c^2$ が円と対応することは自明になるのだが、それは随分と時を下ってからのことになる。

3. 「Pre-Socratic philosophers」についての補足

Pythagoras 学派においては教科として四つの学科が定められたが、学問はまだ未分化であり、学問に身を置く人を一般に哲学者 ((pre-Socratic) philosophers) と呼んでいる。「最初の哲学者」とされるミレトスの Thales は最初に「証明」を与えたとされ、「二等辺三角形の両底角が等しい」ことを、それを裏返してそれ自身と重ね合わせることによって示したとされる。(上記の「タレースの定理」の証明と響き合う。)

また紀元前5世紀に活躍したエレアの Zeno はのちに Aristoteles によって「弁証法 (dialektike)」の創始者とされ、特に運動論におけるパラドックスによって有名である。「時間の流れ」を線分と対置して、それが有限回の分割によって「不可分線分」に到達するとしても、またいくらでも分割され続けられるとしても矛盾が生じるとした。

Democritus は Zeno の講義を聞いたとされる Leukippos を師とする原子論者だが、数学的な対象はいくらでも分割されるとした。特に三角錐を底面と平行な面で細分してその体積が錐の傾きによらず底面積と高さに比例し、それらの積の $1/3$ であることを(三角柱を3分割して)発見した。Plato は師 Socrates を主たる語り手として多様な思想家を取り上げ、多くの対話篇を残したが、何故か Democritus は取り上げていない。

4. アテネ学派

一方、紀元前4世紀に活躍したクニドス出身の Eudoxos はエジプトで長く過ごし、アテネに移って Plato のアカデメイアの一員となった。数学者としては「量の比の理論」を展開し、Democritus の発見を含め、円錐の体積の公式や球の体積の公式等を「取り尽くしの方法」で証明し、彼の成果が Eucleides の『原論』の第5巻や第12巻の骨格を与えた。また天文学においては「天動説」を唱え、Aristoteles や結局は Ptolemaeus にまで引き継がれていった。Eudoxos 自身が書いたものはまったく残されていないが、古代の科学者のなかでは彼は少なくとも Archimedes に次ぐものとされている。

少し先走るが、紀元前3世紀に活躍した Archimedes は古代における第一級の科学者と言われる。彼は例えば「取り尽くしの方法」を用いてパラボラの切片の面積を求め、彼の著述が大いに後代のヨーロッパに影響を与え、「無限分割」による解析法が「古代人の方法」として微積分法の前夜を彩った。

Plato は師の Socrates の主知主義を受け継ぎ、数多くの対話篇により数々の賢人たちの思想や事物に関する考察を書き残していったが、最終的には、永遠不変のアイデアという理想的な範型があり、アイデアこそが真の実在であり、この世界・宇宙は、善なる創造主 (Δημιουργός, デーミウールゴス) によって、アイデアを範型として模倣・制作されたものであるとする境地に至った。

一方、Aristoteles も主知主義を貫き、「人間の世界」に関する知識を種々の学問の総体と捉えて諸学を学問として打ち立て、特に、数学をその第10巻(I)、第13巻(M)、第

14 卷 (N) 等に含まれた「第一哲学 (ἡ πρώτη φιλοσοφία)」を設定し、それをその方法論と共に自然学 (τὰ φυσικά) と切り離れた。ただし「論理学」をあらゆる学問の成果を手に入れるための「道具」(ὄργανον, オルガノン) と位置付けた。

Aristoteles は後に纏められたいわゆる『形而上学 (μεταφυσικά, metaphisica)』の第 11 卷 (K) 第 2 章 1060b14 以下で「[線] は面の, [面] は物体の, (そして点は線の) 切断であり, それぞれの限界 (ペラス) である」といった意味合いを述べており, また「点には [生成過程] がない. . . けだし, 点は或る分割にほかならない」と述べる。よってまずその存在が「自明である」物体から始まり, その限界 (すなわち論理的に厳正で確定的な実体としての定義を与えるもの) として面を捉え, 面を規定する限界として線を捉え, 等と進む。

また Aristoteles はマケドニアの王に招聘され, ミエザの学園を開設して王子アレクサンドロスの教育に携わったが, 彼が国王に就くとその翌年にはアテネに帰り, 郊外に学園「リュケイオン」を開設した。

5. 「数学的表現」の様式としての誕生

アレクサンドロス大王によって紀元前 332 年に建設されたエジプトのギリシャ的な都市アレクサンドリアは古代エジプトの最後の王朝の首都として栄え, 学術研究所ムーセイオンは 70 万冊の蔵書を誇る図書館を有するに至り, 多くの学者がここに集散した。

この地で講義をし, 数学で一派を形成した (一説によると一つのグループの名前ともいわれた) Euclides は『原論 (Στοιχεία)』(ストイケイア, ラテン語では *Elementa*) を編纂した。この書の卓越した出来栄により, それまでに書かれていたとされる幾冊かの Στοιχεία (ストイケイア) を称する書物はこことく消え去ってしまったとされる。

彼の『原論』は全部で 13 巻からなっている。定義, 公準 (要請), 公理 (共通概念) をそれぞれ箇条書きにしたもので始まり, 命題とその証明の羅列によって成り立っている。ただし, これらの定義, 公準, 公理という用語は現在とは異なったこの著作, あるいは当時に固有のものとするべきである。しかも著述が進むにつれて定義されていない対象が現れることもあり, 19 世紀末に近づいて精緻に提示されるようになった公理系や論理系に謳われる概念とは (当然ながら) 隔たりがある。例えば Hilbert はこの『原論』に対して現代的な意味での公理系を提示し直して形式化する意図のもとに『幾何学の基礎 (*Grundlagen der Geometrie*)』を著した。特に点, 線, 面といった幾何学的な対象をその幾何学的な内実的意味を持たせずに定義して「形式化」し, それらの間の関係こそが本質的であるとした。この点ではむしろ Euclides の『原論』における姿勢が徹底して追求されているとも考えられよう。

Euclides の場合, 「定義」は

1. 点とは部分をもたないもの [として] ある。
2. 線とは幅のない長さである。
3. 線の端は点である。
4. 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である。
5. 面とは長さのみをもつものである。
6. 面の端は線である。

7. 面とはその上にある直線について一様に横たわる面である。

.....

等々と 23 項目が淡々と挙げられている。ここには上記の Aristoteles が見せているような言語による表現に現れている姿勢とはまったく異質な表現様式が採用されており、正に哲学ないし形而上学からの数学の独立宣言といった趣を感じさせる。教科としての数学書ではあるが、ここには論理性を基礎に置く「数学的表現」とその様式が明瞭に提示されている。しかも歴史的な事実としては、この言語的異質性にもかかわらず『原論』（の少なくとも直線分と円についての幾何学の部分）は現代にまで及ぶ長い時を貫いて、幾多の人間社会の知性に受け入れられ続けている。正しくこの『原論』によって「数学的表現」とその様式が誕生した。

6. Euclides の『原論』

さてそれでは、Euclides は『原論』の内実として何を求めたのか？ 命題を追って大別するならば、第 1 巻から第 4 巻と第 6 巻の「平面幾何学」、第 5 巻と第 7 巻から第 10 巻の「量の比の理論と数論」および第 11 巻から第 13 巻の「立体幾何学」に分けられる。ただし、まず「平面幾何学」のなかの第 2 巻は「幾何学的代数」ともされており、「数論」と大いに関係するが、その他は大雑把に言えば「直線分と円についての幾何学」である。「ピュタゴラスの定理」は第 1 巻の最後から二つ目の命題 47 として与えられている。第 5 巻では唐突に量の比についての理論が提示され、二つの（同質の）量が「比を有すること」が（自然）数を用いて定義される。そして第 6 巻で図形の相似関係との対比によって「量の比の理論」が平面幾何学と結びつけられる。

さてこの「量の比の理論」において注目すべきことは、二つの量が「比を有すること」は定義されているが、「一般の（同質の）二つの量の比」そのものは定義されていない。線分が単位の線分によって測り切られるときはこれら二つの線分（の量）の比はまさに数である。さらに単位の線分をより短く取り直してそれによって当初の線分と当初の単位の線分の両者が共に測り切られるとき、それらは「通約可能」であり、それらの比は新たに採った単位線分で測った数の比、すなわち有理数と対応する。他方、既に上述のように Pythagoras 学派によって知られていた「通約不可能」な二つの量が存在する。この場合、「比を有する二つの量」の「比」は無理数 (irrational number) になるわけである。ところが比を有する一般の二つの量の「比そのもの」を定義することは当時の Euclides の環境では不可能であった。敢えて時代錯誤的に早々と先取りするならば、こういった量の比をあまねく定義して見せたのが 19 世紀のドイツの数学者 Dedekind であり、それによって一般の実数がすべて数学的に取り出されることになった。しかもそれには「無限公理」が必要不可欠ある。（彼の場合は無限集合としての有理数全体をある種の二つの無限部分集合に（手立てを指定することなく）「切断する」ことを要請することになる。幾らかの詳細は第 19 節および補遺で述べる。）

他方、「無限公理」が実無限であるとして拒否される Aristoteles 的な文化において、幾何学的に表現され得る量に注目して展開された緻密な量の比の理論が Euclides による上記の「量の比の理論と数論」である。そして「立体幾何学」において三角錐の体積や、円周率（すなわち円周と直径との比）を含んだ球の体積や表面積の公式が見事に提示され、証明される。（ただし最後の巻はいわゆるプラトン多面体の分類にあてられて

いる。) また背理法ないし帰謬法によって証明を有限の段階に収める「取り尽くし法」は、すでに述べたように Archimedes も利用している。たとえばパラボラの切片の面積を見出してこの「取り尽くし法」を後の西欧に広く伝えたのは Archimedes の著述のなすところが大きい。この手法は17世紀において「古代人の方法」と通称されていた。

7. 『原論』における数論の位置, その他

もう一点を加えておこう。『原論』の第7巻ではまず Pythagoras 学派以来展開されてきた数論が扱われているが、そこでは最初の命題から始まって、例えば簡明な命題3を典型として取り上げれば三つの与えられた数を A, B, Γ とし、そこで取り扱うそれらの数のそれぞれに直線分を(形式的に)付している。これは(自然)数の持つ加法や乗法の構造を幾何学に依って導入し、上記のような(特に幾何学的に表示される)無理数にまで「自然に」広げる意図によるものと考えられる。この視点からすれば、上で指摘したように第2巻で「幾何学的代数」を展開していることとも整合する。二つの数を直線分で表示すれば、それらの和はそれらの線分を一直線に繋ぐことによって明白であり、積はそれらを二辺とする長方形(の面積)の単位正方形(の面積)に対する比として自明に受け入れられる。次元を持たない数を比と見ることは実に合理的である。なお「数字」ではなく、「数」を正面切って取り上げたのは Pythagoras であった。

以上のように、Euclides の『原論』における最大の動機なるものを、「一般の量の比の理論」を「数学的表現」の様式として(たとえば Aristoteles の形而上学には求められないような)簡明でそれ故に精緻な言語体系の形で展開し、その威力を「立体幾何学」への適用によって提示することにあつたとまで言いたくなる。

これによって、Euclides は「人間の宇宙」とそこにある「数理的」な現象を記述するための「言語様式」を「人間の世界」にある諸々を「理知的」に記述するための(通常の、しかし論理学に従う)言語とはまったく異なった姿に整えたことになる。

余談ではあるが、この「人間の言語体系」に関わる葛藤に踏み込んだ思索者として筆者の意識にあつたのは、一方に Descartes や Leibniz また Kronecker があり、他方では Frege や Wittgenstein がある。ただし最後の Wittgenstein においては、結局はあくまでも「人間の世界」における言語様式こそが自分にとってのつびきならない関心事であるとしてそこへと回帰した(この点については、筆者は最近友人の教示によって知るところとなり、参考文献に上げた奥雅博の大阪大学人間科学部紀要の論文「ウィトゲンシュタインのゲーデル理解」を多としている)。

8. 「人間の宇宙」

なお「人間の宇宙」そのものの形態に関しては、Pythagoras 学派のものとは異なり、上記のように当然地球こそがその中心に位置するとする考え方(天動説)や、また太陽が中心であるとする地動説(紀元前3世紀のサモスの Aristarchus によるもの)もすでに古代ギリシャの文化のなかに現れていたことは触れておいた。

他方 Euclides は別途「円錐曲線論」についての著作4巻を表しており、ペルガの Apollonius はそれを凌ぐものをと意気込んで『円錐曲線(Κωνικά)』を著した。これらの曲線群の(円を含む)楕円(エリプス)、パラボラ、および、双曲線(ハイパボラ)は空間曲面の円錐を平面によって切断する形で与えられるが、いずれも「平面曲線」に

は違いない。ところが『原論』の出現とその影響力が驚異的であったために、その線分と円の幾何学は以後の宇宙観にも大いに影響を持ち続けた。たとえば2世紀の頃の古代ローマの天文学者 Claudius Ptolemaeus はその著書のいわゆる『アルマゲスト』（ギリシャ語による原題は Μαθηματικὴ Σύνταξις ; *Mathematike Syntaxis*, 数学全書)において、天動説に基づいた惑星の円軌道がもたらす観測値とのずれを修正するために、円軌道上に中心を持つ小さな「周転円」を微妙に導入し、その上をさらに惑星が動くものとすることによって当時の観測誤差の範囲にまで精度を上げた。この円の組み合わせによるモデルの導入によって、地動説による惑星の楕円軌道によるモデルは遙かに遅れて1609年の Johannes Kepler の著書『新天文学 (*Astronomia Nova*)』を待つことになる。彼に先立って地動説を唱えた Copernicus は単純な円軌道を採用しており、当時の観測値とのずれにおいては天動説の Ptolemaeus のモデルを凌駕することができなかった。また Galileo は地動説を採択するにやぶさかではなかったが、楕円軌道を認めようとはしなかったようである。

Kepler は月や火星の見かけ上の大きさの変化に対応するためにも、それらの軌道を滑らかに繋がる二つの円弧によって記述しようと考え、特に詳細な火星の軌道の観測結果をもとに分析を進めたが、その過程で近似計算のための簡便な手法として楕円を用い、悪戦苦闘を続けた。そして最終的に、結局、楕円軌道こそが見事な法則性を物語ることになり至った。このように Euclides の『原論』による「直線分と円の幾何学」の影響力は強烈であった。

ついでながらこれに関連してもう一点を追加しておこう。Galileo は望遠鏡による天体観測を導入したり物体の落下速度の加速性を「実験的に解説する」という自然学的な論証法を導入した。しかし発見的に実験を行ったというよりも、結論に思い至ったあとでその説明を実験によって解説したわけであって、運動論の諸法則を公理化できてはならず、Euclides 流の理論展開はできなかった。彼は Newton に先立ってすでに「慣性運動」（外力が働かない場合の物体の運動形態）に思い至っていたが、それを「円運動」としてしまったことから、これによって「万有引力」の導入には至らなかった。そして Newton が彼の力学を体系化して『自然哲学の数学的諸原理』を敢えて微分積分学（すなわち彼の流率法）を用いずに幾何学的に記述した。ただしそこでは Euclides の『原論』を超えて楕円を導入しており、Kepler による地動説のもとでの楕円軌道を万有引力に基づいて証明したのであった。

9. Diophantus の『算術』と未知数の記号

さて3世紀のアレクサンドリアにおいて異質で重要な計算術家 Diophantus が『算術 (*Αριθμητικά*)』（ラテン語では *Arithmetica*）を著し、後世に大いなる影響を与えることになる。この著作において彼は未知数の記号を導入し、それが満たすべき条件を記述して、それによってその値を正の有理数として取り出すという手法を展開した。彼は「代数学の父」と称されることもある。この手法は省略記号代数と呼ばれており、求めるべき数 ἀριθμός を最初の二文字 $\alpha\theta$ で表したものとされている。（これが手書によって書かれていくうちに一文字の記号のように見えるようになり、またギリシャ文字は一方で数を表すために用いられたことから、後に通常のアルファベットにはない語尾の σ の ς が用

いられたと説かれたこともあったようである。)

こういった手法は9世紀前半にバクダードで活躍した al-Khuwārizmī にはまだ影響を与えてはいなかったが、代数学の手法がヨーロッパにもたらされたのは、下記のようにまずは al-Khuwārizmī の著作の翻訳によるものであり、2次方程式の解法や3次方程式の分類がイタリア・ルネサンス期に考察されるようになる。しかし Diophantus の解析法がヨーロッパにもたらされるのはかなり遅れることになる。

Diophantus の『*Arithmetica*』は元は13巻から成っていたようであり、ビザンティンにはそのうちの6巻のギリシャ語版が残されている。またアラビア語訳の4巻が新たに発見されている。

ローマ帝国の統治下においてはその衰退とともにギリシャ文化への興味が著しく失われてゆく。他方5世紀にはキリスト教のネストリウス派が異端とされ、彼らはコンスタンティノポリスを中心とするいわゆる東ローマ帝国やさらに東方のペルシャ帝国へと移動し、ギリシャの文化を広めることになる。8世紀にはさらにイスラム圏のアッバース朝第2代カリフのマンスールによって新都としてバクダードが開かれる。そしてここは唐の長安と並ぶ大都市となって栄華を誇り、例えば中国から紙の製法を獲得して製紙工場も作られた。バクダードが東西の十字路として隆盛を誇るなか、多くの学者たちがここに去来し、多くのギリシャ語の文献がアラビア語に翻訳されて浸透していった。「知恵の宝庫(ヒザーナ・アル=ヒクマ)」をもとに拡充された「知恵の館(バイト・アル=ヒクマ)」では Plato や Aristoteles などの著作が組織的に翻訳、研究され、東方におけるギリシア学術の研究の中心地となるとともに、例えば al-Khuwārizmī が活躍し、イスラム世界における大いなる文化の蓄積が成った。

10世紀には Abū al-Wafā Būzjānī (アブル・アル=ワファー) は al-Khuwārizmī の著作に注釈を付け、Diophantus の『*Arithmetica*』をギリシャ語から翻訳し、それによって、彼の後継者であった al-Karaji は Diophantus の信奉者になったとされている。

そして12世紀になるとヨーロッパにおいて市民的な大翻訳運動が引き起こされて、イスラム文化圏におけるギリシャ語やアラビア語による知識の集積が基本的にはラテン語へと翻訳されてヨーロッパへ奔流していくことになる。例えば al-Khuwārizmī の『アル=ジャブル・ワル=ムカーバラ (*hisāb al-jabr wa'l muqābala*)』と『アルゴリトミ・デ・ヌーメロ・インドルム (*Algoritmi de numero Indorum*)』は、前者が algebra の、後者が algorism の語源になった。この「al」はアラビア語の定冠詞であるがラテン語訳においてそのままに残った(「wa'l」は「and the」にあたる)。上記の Ptolemaeus の『アルmagest』は、通称としては『Ἡ Μεγάλη Σύνταξις』(*He Megale Syntaxis, The Great Treatise*, 大全書) が用いられたが、アラビア語に翻訳されたときに付けられた定冠詞の「al」がラテン語に訳された際に残されたままになり、しかも「Syntaxis」が省略されて『*Almagest*』(*The-Greatest*) と呼ばれることになったようである。また「Algoritmi」はその本の冒頭にある「Algoritmi dicti (al-Khuwārizmī 曰く)」から来しているとされている。(最近は数学史において人名につけられる定冠詞「al」は取り除かれることが多くなってきている。)

ヨーロッパ、特にイタリア・ルネサンスへの影響として Diophantus の『算術』に先立ったのは al-Khuwārizmī の『アル=ジャブル・ワル=ムカーバラ』であった。この著

作では2次方程式が重点的に調べられているが、記号としての「+、-」や省略記号は用いられていなかった。（北西アフリカのマグレブでは一部省略記号が用いられた。）未知数は「jadhr」（ジャズル；根），その平方は「mal」（マール），また立方は「kab」（カーブ）と表されていた。係数としては正整数が用いられ、したがって2次方程式は六種類，例えば「根が平方に等しい場合」や「平方と根が数に等しい場合」とか「根と数が平方に等しい場合」等々に分類されてそれぞれに解法が与えられていた。

10. 3次方程式に至る道

3次方程式に積極的に取り組んだのは11世紀後半から12世紀前半に活躍したペルシャ人の Omar Khayyám であった。彼は一般の3次方程式は代数的には解けないと考えており、幾何学的方法を開発した。すなわち双曲線とパラボラとの交点を用いるものであり、一般の3次方程式に対応できる手法であった。ただし変数やパラメータを記号によって扱うような手法は全く用意されてはおらず、係数にあたるものの正、負、ゼロに応じた多くの場合分けが必要であった。

一方西ヨーロッパにおいてはスコラ哲学以外の学問、特に数学関係においては、見るべきものはほとんどなかった。それでも Leonardo Fibonacci はローマ数字よりもアラビア数字のほうが優れているとしてエジプト、シリア、ギリシャなどへと旅して学び、その成果を『算盤の書 (*Liber Abaci*)』（実は『計算の書』と呼ばれるべきである）として1202年に書き上げた。これはインド・アラビア数字とその計算法を初めてヨーロッパに紹介したものであった。そのなかにあったいわゆるフィボナッチ数列は現在でも興味を持って取り扱われている。彼は3次方程式 $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ が Euclides の意味による（すなわち有理数や2次無理数の）根を持たないことを初めて証明し、その正の根を6桁の60進小数で近似した。

一方11世紀から12世紀においてヨーロッパで大学が誕生し、12世紀における大翻訳運動を下支えすることになった。まず自由都市国家ボローニャにおいて「法学校」に集まっていた「教師と学生の団体」としての大学 (*Universitas societatis*) に始まり、幾つもの学校があったパリにおいてそれらの教師たちが権力者の介入に対抗して結集したのがパリ大学の始まりとされている。またイングランドのオックスフォード大学とフランスのモンペリエ大学もこのように自然発生した大学である。こうした初期の大学では（例えば既得権益を主張し、それを保持しようとして）教師と学生が集団で他の都市に移住することがあり、それによってオックスフォード大学からケンブリッジ大学が、パリ大学からオルレアン大学が、ボローニャ大学からパドヴァ大学が生まれた。

そして上述したように市民的な大翻訳運動が引き起こされ、イスラム文化圏における成果の集積がヨーロッパへと奔流することになる。特に数学関係としては、Euclides の『原論』、『光学』、『反射光学』など、またさらに Archimedes の『円の求積』や Ptolemaeus の『アルmagest』、al-Khuwārizmī の『アル=ジャブル・ワル=ムカーバラ』、『アルゴリトミ・デ・ヌーメロ・インドルム』、『天文表』等が含まれる。イスラム圏でも最大の哲学者とされていた Aristoteles の『分析論前書』、『分析論後書』および『天体論』や『気象論』など、さらに Aristoteles に次ぐ「第二の師」と称されていた al-Fārābī の『諸学総覧』も挙げておこう。

ただし 13 世紀に入るとアラビア語からラテン語への翻訳とは別に、西ヨーロッパでもギリシャ語からラテン語への翻訳の動きが生じており、例えば 1269 年には翻訳家の Willem van Moerbeke は Archimedes の科学および数学に関する著作の主要なものをラテン語に訳し、結局はそれらが約 2 世紀を経て Leonardo da Vinci その他に知られることに繋がった。スコラ哲学の内部においても学問的な進展が芽生えてはいた。例えばカンタベリー大司教にまで上った Thomas Bradwardine やリジューの司教になった Nicole Oresme は Aristoteles の比例論を改善し、その結果、現代的に述べれば、分数乗の指数法則や無理数による冪乗に当たるものまでも考察されていた。また Oresme は、スコラ哲学の中で Aristoteles の「形相」に関してさらに踏み込んだ「一様に非一様な」形相、すなわち変化率の変化率が一様な形相について考察されてきたものを「グラフ化」すること、いうならば関数のグラフ表示を示唆する考察を行っていた。さらに Oresme は測定可能なものはすべて連続量として捉えられると書いており、連続量の背景に「運動論」、すなわち、時の流れの感覚による支えが強かった。また彼は、調和級数が発散することの証明を持っていた。さらに、現代的にいうならば、無限級数の和

$$1/2 + 2/4 + 3/8 + \dots + n/2^n + \dots = 2,$$

$$1 \cdot 3/4 + 2 \cdot 3/16 + 3 \cdot 3/64 + \dots + n \cdot 3/4^n + \dots = 4/3,$$

にあたるものを得ていた。

このように当時の西ヨーロッパでは「上級のな」代数学を受け入れる状況にはなかったものの、特に Archimedes の著作によって「古代人の方法」と呼ばれた「無限分割」による分析術がまず受け入れられて行き、成果も得られていった。そして古代ギリシャにおいて顕著であった「無限嫌悪」は退いて行き、「可能的無限」や「実無限」の両者にしばしば言及した。

しかしながら、このあとに、西ヨーロッパにおいて学問の衰退が始まった。一つにはペストの大流行が生じ、さらに 15 世紀になると百年戦争やバラ戦争によってイギリスやフランスの衰退が進んだ。

1 1. ルネサンス期における代数学

15 世紀も中頃になるとヨーロッパはペストによる衝撃から立ち直り始めていた。また活字を用いた 1 文字ずつ植字をする印刷術によって、学術的な著作も人々の手に渡りやすくなっていった。1447 年にはヨーロッパで初めての書物が印刷され、この世紀の終わりまでには 30,000 冊もの書物が送り出された。もちろん数学関連の書物は極めて少数ではあったが、それでも数学の発展にとっての基礎を培っていった。例えば遅くとも 1464 年には al-Khwarizmi の『アル=ジャブル・ワル=ムカーバラ』はすでにイタリア語に翻訳されていた。

しかしまったく馴染みがなくなってしまうとギリシャ語の古典を復元して印刷することは、アラビア語の代数学や算術の書物をラテン語訳によって印刷することに比べて、当初はあまり意味のないことであった。

この頃の数学者でケニヒスベルク出身の Regiomontanus (Johannes Müller) は影響力に富んだ人物であった。ニュルンベルクでは商人の援助を受けて印刷所と天文台を作り、また Archimedes, Apollonius, Heron, Ptolemaeus, Diophantus などの書物の訳

本の印刷を注文したという記録が残されている。彼自身による数学書には『全形状三角形論 (*De triangulis omnimodis*)』がある。これは Euclides の比の理論や「三角法」、たとえば正弦定理、を復活させた点でも重要である。ただし正接 (関数) はもう一つの著作『方位論 (*Tabulae directionum*)』で取り上げられた。

またフランス人の医師 Nicholas Chuquet は 1484 年に『数の科学三部作 (*Tripartie en la science des nombres*)』を書き上げたが、その出版は Fibonacci の『算盤の書』と同じく 19 世紀になってからのことであり、もっぱら手稿によって広まった。

当時最もよく知られた代数学の著書は修道士 Luca Pacioli の『算術・幾何・比及び比例大全 (*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*)』で、1494 年に出版された。この著作は彼が長年にわたって書きためていたものの集大成であったのだが、当時の習いでもあったように、彼が参考にしたものについてほとんどその出所は書かれていない。当時省略記号は大いに増えており、加法と減法については p と m が用いられ、未知数の cosa, その平方の censo, 等しいことの aequalis はそれぞれ co , ce , ae と表され、未知数の 4 乗は $cece$ が用いられていた。ただし Chuquet の冪乗記号は採用されていなかった。また Pacioli も Omar Khayyám に倣って 3 次方程式は一般には代数的には解けないと考えていた。

上記 Regiomontanus からも推測されるように、15 世紀後半になるとドイツでも特に代数学に関する本の出版が盛んになった。例えば、ライプツィヒ大学の講師 Johannes Widmann が 1489 年に『巧妙で親切な商業用算術 (*Behende und hübsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*)』を出版しており、これによって現在の記号「+、-」が初めて印刷されて現れた。本来倉庫の荷の過不足を示すために使われたが、それらが数学演算の記号になった。彼は当時のドイツでは良く知られていた al-Khwarizmi の『アル=ジャブル・ワル=ムカーバラ』の写本を持っていたようである。さらに下って 1544 年には Michael Stifel が『算術全書 (*Arithmetica integra*)』を出版し、ここでは負数、冪乗根、冪乗が用いられ、2 次方程式を見かけ上は一つの形式に整理することができた。彼は修道士であったが、後にイエナ大学で数学教授を務め、例えば記号「+、-」の普及に貢献した。著作『コス数の算法について (*De algorithmi numerorum cossicorum*)』では未知数を単一の記号で表し、それが後に Thomas Harriot に引き継がれた。それでも Stifel はやはり 3 次方程式が代数的には解けないものと決め込んでいたものだから、多項 3 次方程式には全く触れなかった。

1 2. 3 次方程式が代数的に解かれた！

ところが 1545 年に遂に Gerolamo Cardano が『アルス・マグナ』(*Ars magna*, 大いなる術) を出版し、3 次方程式ばかりか 4 次方程式についてもそれらの一般的な代数的解法を発表した。当時のイタリアにおいては 3 次方程式は大きく三種類に分類されており、Cardano に先立って Niccoro Tartaglia は未発表ながら二つの場合の解法を得ていた。彼は『アルス・マグナ』の序文において、一応その一つの場合の解法を Tartaglia から教わったことを明記していた。ところが Tartaglia はさらに Cardano が自分との間で、自分が発表するまではその解法を公にはしないと約束をしていたと主張してどろどろとした抗争が生じた。ともかくも探究心が旺盛であった Cardano は、Tartaglia に教

えられた場合についてはすでにボローニャ大学教授の Scipione del Ferro が先立って発見しており、それを弟子の一人に伝えていたことを確認した。彼は自分の弟子の一人の Ludovico Ferrari と共にボローニャを訪ね、幸い残されていた del Ferro のノウトを調べあげていた。そして Cardano と Ferrari は3次方程式のすべての場合に対して冪乗根と四則演算を組み合わせた根の公式を見つけ出し、さらにその過程で Ferrari は4次方程式の場合の同様の解法を発見した。そしてそれらのすべてが『アルス・マグナ』として出版された次第であった。（ただし係数や定数を文字で表すことはまだ行われていなかった。）

これは数学的には実に画期的な成果であった。それまでは、上記のように、3次方程式は一般的には代数的に解けないものだと考えられており、Euclides の頃の幾何学的な、すなわちパラボラとハイパボラの交点を利用する手法が Omar Khayyám によって精緻に展開されていた。従ってイタリア・ルネサンスにおけるこの成果はヨーロッパが遂にそれを凌駕するまでに成熟し遂げたことを示す証になる。

しかもこの3次方程式の解法は新たな展開をもたらすことになった。Cardano が『アルス・マグナ』で丁寧に分析したように、特に3次方程式が3実根を持つ場合は、その根を表す平方根と立方根の組み合わせにおいて、必ず負の数の平方根、すなわち虚数が現れ、それを含む数の立方根を注意深く選び出すことによって3実根のすべてが得られることが判明した。決して「数の概念」そのものが拡張されたわけではなかったが、ここに、「負の数」や「複素数」を数の代数的な演算の構造との整合性のもとで少なくとも「代数的な技術」として展開しなければならない必然性が浮上した。（Cardano は無理数や負の数を「仮想の数 (numeri ficti)」と呼んでいた。また彼は負の数を導入すればその平方根を考察するのは当然のことと考えていたようである。）

ただし Cardano は al-Khūwārizmī の信奉者であったものだから省略記号はほとんど用いなかったが、特定の整数係数の方程式を取り上げるにあたってはそれが一般的な場合を代表するように選んでいた。

また彼の『アルス・マグナ』によって、以後一般的な5次方程式の代数的な解法を求める（という数学的な事実としては不可能な）ことが挑発的な問題となった。そしてようやく19世紀前半になって大いなる理論を生み出し、それも決着を見る。

1.3. Viète の解析術

ボローニャ出身である Rafael Bombelli は Cardano の『アルス・マグナ』を丁寧に研究し、特に複素数に強く興味を惹かれて調べ上げた諸結果を『代数学 (*L'algebra*)』として1560年頃にまとめ上げたが、その全容は出版されなかった。

他方 François Viète は1591年に『解析術序説 (*In artem analyticem isagoge*)』（『新代数学 (*Algebra Nova*)』としても知られている）を出版した。彼が「代数学の父」と呼ばれることがあるのは、変数ばかりか係数にもアルファベットによる記号を用いて数式を表す方法を導入したことにある。彼は未知の量に母音の文字を、既知の量や定数に子音の文字を用い、またドイツ式の記号「+、-」を用いた。しかしその他に関してはすでに導入が見られていた略記号を用いずに、例えば、未知量 A の2乗や3乗を A quadratus, A cubus と表し、等号としてはすでにウェイルズ生まれの Robert Recorde が導入していた「=」を用いずに aequalis の略語を用いた。また彼は「algebra」という語が気に

入らず、それなりに調査、工夫して「解析術 (ars analytica, analytic art)」を用いた。

Viète は Pappus の『全集 (Συναγωγή)』や Diophantus の『*Arithmetica*』に強く影響を受けており、彼の数学的な関心は極めて広範に及んだ。

1.4. 解析幾何学の誕生

解析幾何学といえば René Descartes (1596-1650) と Pierre de Fermat (1607-1665) の両名がほぼ同じ頃 (1630 年を過ぎたあたりであろうか) , それぞれが独立にたどり着いていたようである。しかも両者ともに 4 世紀のアレクサンドリアの Pappus の難問ないしは『数学集成 (Συναγωγή, *Synagoge*)』に取り組み、幾何学的な問題を代数に帰着させて易々と回答を得た。

かつて Aristoteles は主知主義に基づき、「論理学」を導きの方途として、広く「人間の世界」に関する知識を種々の学問の総体として捉え、諸学を打ち立てた。次いでさらに Euclides は「論理学」を格段に整え、「人間の宇宙」における諸現象を記述することに特化した主知主義に基づく記述様式を提示した。

Descartes は 1628 年にオランダに移住したあと、それらを近代化して科学的世界観の変革を宣言することを意図し、1637 年に『理性を正しく導き、学問において真理を探究するための方法の話 (方法序説)。加えるに、その試みである屈折光学、気象学、幾何学。 (*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences (La Dioptrique, Les Météores, La Géométrie)*』を著し、すべてを疑うことから出発して「私は考えるので私はある (Je pense, donc je suis)」ことによって独自の道へと旅立った。そして Descartes は代数的な表記法をほぼ現代に通じるまでに徹底して記号化し、例えば未知数の冪を x^2 , x^3 , 等々と表した。さらにオランダ人の古典学者の友人から Pappus の 3 本および 4 本の直線の問題を知らされ、自分の流儀によって代数化して簡潔に解くことに成功し、自信を持って上記の『方法序説』に付けた『幾何学』を書き上げた。

他方、Fermat はオルレアン大学で法律を学び、卒業してまずボルドーで請願委員を務め、その後トゥールーズ高等法院の勅撰委員に就いて「法服貴族」となり、以後 Pierre de Fermat と呼ばれることになった。彼は Viète の影響を受け、終生その解析術の記法を愛用し続けた。当時盛んであった古典の復元活動にも加わり、Pappus の『数学集成』を調べることによって Apollonius の『平面の軌跡 (*Plane Loci*)』を復元することを引き受けた。そして 1636 年には解析幾何学の基本原理として、

最終的な方程式に二つの未知量があるときには必ず一つの軌跡が得られ、それらの未知量の一方は拘束されて直線ないし曲線を描くことを発見していた。彼の成果の大半は没後しばらくして 1679 年に出版された『数学の諸研究 (*Varia opera mathematica*)』に至るまでは、基本的には Mersenne その他への手紙によって回覧された。解析幾何学に関しては著述『平面及び立体軌跡入門 (*Ad locos planos et solidos isagoge*)』とその付録の『軌跡による立体問題の解法』がある。また 1629 年頃に発見されていた重要な結果が『極大と極小を求める方法 (*Methodus ad disquirendam maximam et minimam*)』として残されている。これは特に単項 x^n (n は正または負の整数) によって $y = f(x)$ と表される場合について、無限小量を利用した導

関数を求める方法を提示してその応用を図ったものである。

他方 Descartes は代数関数に関する導関数を重根条件によって導いていた。これに対して Fermat は当時話題として大きく浮かび上がっていた超越関数「サイクロイドに対して Descartes の方法で接線を与えよ」という問題を Mersenne を通して Descartes へと投げかけた。Descartes は接線を何とか直接に見出し、「この問題は新人向けの易しい問題である」と付して返答した。そして彼は超越的な曲線は幾何学から締め出すべきであるとの持論を展開した。

ついでながら、Descartes は光学においては光は瞬時に達するものとしていたが、他方 Fermat は光の速さは有限であり、「光はその進路を到達時間が最小になるように選んで進む」という「フェルマの原理」を提示した。

また Descartes は機械学的宇宙観を取り入れ、それまでの宇宙論を一新すべく「渦巻宇宙論」を提示した。しかしこれは Newton によって彼の力学に基づく機械学的宇宙論によって否定されることになる。

1 5. 微積分、冪級数、変量と関数

微積分法についてはやはり立役者は Isaac Newton (1642-1727) と Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) であろう。しかし一方で上記のように Fermat の『極大と極小を求める方法』は Mersenne による連絡網を通して良く知られるところになっており、また

「Fermat のパラボラ」や「Fermat のハイパボラ」として知られる x^n (n は正または負の整数) に対する微分は、従ってまた少なくとも多項式や冪級数に対しては、十分に知られるところにはなっていた。もちろん現代的な意味での厳密な極限論はいずれにせよまだ得られてはいなかった。

Newton においては運動論がその考察の支えになっていたようである。すなわち、時間の経過にともなう物体 (の重心) ないしは質点の位置とその変化率である速度および速度の変化率である加速度の実在性に支えられていた。ただし彼の力学でも重力加速度は当然ながら定数であり、おおもとの位置を時間の関数として見たときには 2 次関数にとどまる。従って彼は結局は自身の「流率法」をあえて避け、古典的な円錐曲線に関する幾何学によって彼の運動論を書き上げて出版した。しかし彼は十分に微積分法を心得ており、また積極的に冪級数を道具として駆使していた。

他方、Leibniz においても極限論についての厳密性は意識されてはおらず、彼の重要性としては特に「関数 (fonction)」という用語の導入に注目すべきである。これによって幾何学からさらに展開されていく「関数」の世界が数学に取り込まれることになる。また彼も積極的に冪級数を表に出し、指数関数や三角関数の冪級数による表示を与えている。彼の場合、関数に対する「微積分法」において決定的であった卓抜な「記号法」によってその「演算法則」を与えることに成功した。加えて Jakob Bernoulli との強い連携のもとで「関数の概念」も提示されて定着し、また Jakob を筆頭とする Bernoulli 一族の数学者たちや、さらには数学王と呼ばれることになる Leonhard Euler にいたる面期的な数学者群が続き、例えば微分方程式や変分法による新たな現象の記述によって広大な世界が開かれることになっていった。

こうした「関数」をめぐる新時代の背景には、数学の応用面での三角法や対数表の作成に加え、特に望遠鏡の発達に対応した天文台の増加やそこで日々活動していた多くの

計算家たちの活動もあった。

また Leibniz は形式言語を考案し、推論を代数的な計算のように単純で機械的に展開できると考えていた。

ついでながら、Leibniz は Plato, Aristoteles や当然スコラ学者たちにも退けられてしまっていた原子論を復活させ、独特な『单子論 (*Monadologie*)』を著した。(これは小冊子として 1714 年にまとめられたが、出版は没後になされた。)

「数学的表現」の様式という視点から標語的に幾つかの項目を並べておこう：

- ・ Viète の記号の導入による解析術と Descartes による代数的な様式の確立；
- ・ それらによる解析幾何学としての幾何学の取り込み；
- ・ Fermat による解析幾何学への微積分法の取り込み；
- ・ Newton による機械学的な「人間の宇宙」の記述；
- ・ Leibniz と Jakob Bernoulli による「関数」概念による新たな数学像の導入；
- ・ Leibniz による微積分法の記号化とその演算の法則化；
- ・ 微分方程式による「新たな解析術」の展開；
- ・ Euler, Lagrange, Laplace, Fourier 等の変分法や偏微分方程式による現象の記述。

16. 数論の新たな出立

少々遡るが 1621 年には、非公式な学者集団に属していたクイズ好きの Claude Gaspar Bachet は Diophantus の『*Arithmetica*』をラテン語に翻訳して出版した。そしてその一冊を Fermat が手にすることになり、それに魅せられた。それを読み進めながら彼はいくつもの発見をし、合計 48 の「定理」を欄外に書き残した。最も有名なものが「冪乗数でその冪が 3 以上であるものは同じ冪乗の二つの冪乗数の和には分けられない」というもの、いわゆる「Fermat の最終定理」である。そして「この定理に関して私は真に驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを書くには狭すぎる」と続けていた。

また「無限降下法」という数学的帰納法を逆転させた形の証明法を開発した。これは、ある性質を満たす正整数が与えられたと仮定し、それに基づいてそれよりも小さい正整数で同じ性質を持つものを構成して矛盾に導くという手法である。例えば Albert Girard が主張していた「 $4n + 1$ の形の素数はすべて二つの平方数の和として、しかもただ一通りに表される」ことをこの手法で証明した。しかもさらに $4n - 1$ の形の整数は二つの平方数の和ではありえないことも Fermat は知っていた。したがって、奇素数は $4n + 1$ か $4n - 1$ のいずれかであるから、それらはまったく異なった特徴づけによって同じように二分されることになる。

特に「最終定理」の冪指数が 4 の場合に対しては、彼は無限降下法による証明を与えている。

また「Fermat の小定理」は、1640 年の Frénicle de Bessy 宛の手紙で

「素数 p と幾何級数 $1, a, a^2, \dots$ 等々、がどのように与えられても、 $p - 1$ を割り切るようなある n に対して p は $a^n - 1$ を割り切らなければならない」

と告げられた。ただし彼は素数を p と表すような記号法はもちろん用いてはいない。

1659 年の Christiaan Huygens に当てた手紙では、Fermat は、例えば「どの正整数

も4個の「[整数の]平方数の和に表される」と書いているが、Eulerは「どの正整数も4個の有理数の平方の和に表される」ことまでを証明し、継いで結局 Lagrangeがこの Fermatの主張の証明を成し遂げた。

Fermatは当時の数学者たちに自分が見出した数の世界の豊かさを主張し続けたが、結局はそれを著書としてまとめることはなかったし、当時の数学者をこの世界に引き込むこともできなかった。彼の息子の Samuel de Fermatは父の死(1665年)によってその数学が消え去ってしまうことを恐れ、父が発信した手紙に報告されていた彼の数学の発見や結果の回収に努めて、1679年になってようやく『Pierre de Fermatの数学の諸研究 (*Varia opera mathematica D. Petri de Fermat*)』として出版した。

そして幸いにも Leonhard Euler (1707-1783)が Fermatの数論を発見し、時間をかけて彼の主張に取り組んで行き、証明を与え、拡張し、またいくつかには反例を与えていった。(それでもなお残されていた「Fermatの最終定理」に最終的な決着を与えたのは1995年の Andrew Wilesの論文である。)例えば Eulerは「Fermatの小定理」の証明に踏み込み、素数 p で割れない数の冪乗の p による剰余が持っている乗法的な構造に注目した。そして合成数 n に対するいわゆるオイラーの関数 $\varphi(n)$ なるものを導入し、「Fermatの小定理」を一般化した。また、彼は二つの平方数の和として表される数の考察からさらに踏み込んで、整数 a, b, N によって $a^2 + Nb^2$ と表されるような数の素数 p による剰余の考察からいわゆる「平方剰余の相互法則」を発見した。また2次形式の Brahmaguptaの乗法的な恒等式

$$(x^2 + Ny^2)(z^2 + Nt^2) = (xz + Nyt)^2 + N(xt - yz)^2 = (xz - Nyt)^2 + N(xt + yz)^2$$

にも気づいていた。

Eulerは代数方程式の問題にも取り組んでおり、実数係数の多項方程式が何らかの「根」を持つならば、それは必ず複素数の根を持つことを示した。

余談ながら、彼は自然対数の底として e を用い、円周率を π と表し、複素指数関数を冪級数によって定義し、例えば $2\cos x$ を虚の指数関数の和として表した。

『無限解析入門 (*Introductio in analysin infinitorum*)』においては、彼は変量の関数を「変数および定量からなる解析的式」と定義した。どうやら彼の「関数」は局所的には冪級数として表されるものと考えられていたようである。また Bernoulli 兄弟を悩ませていた級数の和を、正弦関数 $\sin x$ の冪級数表示を多項式流に大胆に処理して

$$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2 + \dots$$

と決定した。他方、収束性を問題にしないで無限級数を母関数としても利用している。

さらには Fagnano のレムニスケート積分の加法公式に刺激され、Eulerは最終的には一般の楕円積分に関する加法公式を証明した。

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)は Eulerを追いつき、上述のように Fermatの主張の「どの正整数も4個の[整数の]平方数の和に表される」ことを証明した。また同じ判別式を持つ2変数2次形式の同値関係を整数による線形変換で行列式が ± 1 のものによる変数への作用によって導入し、その同値類の個数が有限個であることを示す縮約過程を見出した。さらには1の冪乗根を導入して3次と4次の方程式の根が冪乗根で解ける構図を一般化して分析した。ところが、彼が導入したいわゆる Lagrange resolventは次数が5以上の場合には、4次や3次の場合とは異なって、その次数がもとの次数より

も小さくはならず、5次方程式の根の公式を得ることには失敗した。

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) は Euler と Lagrange の数論に関する論文を丁寧
に学習し、94 ページの数論の大論文「Recherches d'Analyse Indéterminée (不定解
析の研究)」を 1785 年に投稿し、1788 年に出版された。この第 IV 部で彼自身が「素数
間の相互法則」と呼び、今では「平方剰余の相互法則」と呼ばれるものの証明を試み
た。しかし Legendre は「算術数列に関する素数定理」を確信しつつも証明を与えない
で用いたために証明は不完全に終わった。(この論文を Gauss は「素晴らしい論文であ
る」と評した。) 彼は 1798 年の著書『数論についての試論 (*Essai sur la Théorie des
Nombres*)』においていわゆるルジャンドル記号を導入し、「相互法則」を簡明に表示
し直した。記述を簡潔にするためにここでは彼の記号を横書きで (N/p) と表す；ただし
 p は奇素数で N は p で割れない整数であり、この記号の値を、 p による N の剰余が平方
数の剰余にもなっている場合は $(N/p) = 1$ とし、そうでない場合は $(N/p) = -1$ と定め
る。このとき「平方剰余の相互法則」は、二つの奇素数 p と q に対して、等式

$$(q/p) \cdot (p/q) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$$

が成り立つと主張する。もともと素数が考察されたのは、自然数を乗法の構造のもとで
考察し、それを乗法に基づいて再構築するにあたり、不可欠な構成要素の「原子」とな
るものを素数と名付けたのであった。それら「原子」の間にこのような簡明な相互関係
が成り立つというのである。

継いで若き Carl Friedrich Gauss (1777-1855) が 1799 年に学位論文によって「代
数学の基本定理」を証明した。すなわち、「一変数の実数係数の多項式は必ず 1 次または
2 次の多項式の積に分解される」というものである。上記のようにこれは既に Euler に
よっても考察されていた。他方、一変数の実数係数の有理式の原始関数は初等関数で得
られるだろうという「予測」とも密接に関係し、微積分の分野でも大いに興味を持たれ
た問題でもあった。Gauss は彼の学位論文で Euler や Jean Le Rond d'Alembert の「証
明」を批判した上で、自身の証明を展開した。しかし実は彼の証明においても「実数の
連続性」が恐らくは無意識に前提されており、彼がそのあとで発表したものを含めて 4
種の証明のすべてにこの欠陥が共通していた。

ともかくも、上の表現のように、彼は複素数を表には出さないように慎重に書いてい
たが、Gauss はのちに 4 乗剰余の相互法則を扱うに当たり、いわゆる「ガウスの整数」
 $m + ni$ ($i^2 = -1$, m と n は整数) の導入を「ガウス平面」によって幾何学的に行った。

またついでながら、Gauss は発表こそしなかったが、世に先駆けて非ユークリデス
幾何学が成立することに気づいていた。そして本職であった天文台において宇宙空間に
おける巨大な三角形を観測してその内角の和を調べ、それを 2 直角と比べようとした
が、結局は誤差の範囲を超えることは出来なかったとされている。

17. パラダイムとしての新たな「数論」への展開、その 1

19 世紀には過去に例を見ない大変革が数学に起こった。例えばその一つは 1 の冪乗根に
対する円分方程式の分析と、それが引き金となって方程式の個性を記述するための (ガ
ロア) 群の導入があり、高次冪剰余の相互法則への探究を志向して始まった代数的数体
とイデアル論への展開があり、幾何学においては非ユークリデス幾何学の発見があ

り、多様な複素解析関数の導入や新たなリーマン面の出現に加え、代数関数体におけるイデアル論の展開による「閉リーマン面」の代数化があり、「無限公理」に基づく「実数の連続性」に対する Dedekind その他による分析に加え、「量化の記号 (量子子, quantifier) \forall (任意の) および \exists (存在する)」の導入につながる極限論の精密化がある。さらには集合論の導入や、「無限公理」に反発して「有限の立場」を志向することになる Kronecker の自覚的な宣言があり、等々。

さて、1801年に Gauss は『数論研究 (*Disquisitiones arithmeticae*)』を出版して数学の在り方を一新することになった。この著作は7節からなっているが、大きく見れば3部分に分かれている。これを貫いている伏線としては、「平方剰余の相互法則」の厳密な証明とそれ関わる現象の分析と展望があった。

第1部は整数 a を法とした場合の整数の構造を整理したものであり、整数 m と n に対して、その差が法 (modulus) として指定された数 a で割れる場合に $m \equiv n \pmod{a}$ と表し、「 m と n は a を法として合同である」と述べることによって、Fermat に発する算術的な構造を使いやすく整備した。

最も大部である第2部では基本的には2変数2次形式の理論が展開され、その中心にあるのは「2次形式の同値関係」と「2次形式の合成」である。特に後者は Gauss により初めて本格的に取り扱われ、乗法的な Brahmagupta の恒等式の拡張と組織的な検討である。これを、形式 $x^2 + Ny^2$ を $-N$ の平方根によって得られる2次体において因子分解し、そこでの乗法的な構造を有理数の体へと還元させるものだと見るならば (アナクロニズムではあろうが) 明解になる。(例えば高木貞治著『初等整数論講義』第三章参照。) 判別式を固定したときの2次形式の合成は同値関係とも両立し、同値類全体に可換群の構造を導入することができ、その同値類から「種 (genera)」が取り出される。さらに指標 (character) が導入され、これがのちの「群の表現の指標」の所以になっている。また第2部には3変数2次形式の考察も一部導入されている。この第2部における「平方剰余の相互法則」の証明は彼の第II証明であり、実に長大にわたる枠組みにおいて達成される。

第3部は第VII節の円分論である。基本的には、奇素数 p に対する1の原始 p 乗根である $\zeta = \cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p)$ を根に持つ方程式 $x^p - 1$ の既約因子についてのガロア理論である。整数の modulo p における位数 $p - 1$ の乗法群を ζ に冪指数として作用させ、その部分群に対応させて順次冪乗根によって得られる解を積み重ねて ζ を取り出す。特に $p = 17 = 2^4 + 1$ の場合については、第365項で $\cos(2\pi/17)$ を具体的に平方根の積み重ねによって表示しており、これは彼が1796年に発見した「正17角形が定規と円によって作図できる」ことの証明に対応している。一方、第356項では第IV節で予言していた定理の証明が与えられている。この考察と結果からは「平方剰余の相互法則」の証明が比較的簡明に得られるが、それを含む部分の原稿は予算等の理由から結局省略されてしまい、Gauss の死後に発表された。Gauss は生前に6種類の「平方剰余の相互法則」の証明を発表している。

また Gauss はこの第VII節の序文に当たる第335項において、この節での定理の原則は「円関数ばかりか他の超越関数、例えば積分 $\int [1/\sqrt{1-x^4}] dx$ 、そしてまた多様

なタイプの合同関係に対しても適用できる」ように拡張され得る、と書いた。これは意欲的な若者たち Abel, Jacobi, Galois, Eisenstein 等々を大いに鼓舞した。

このように Gauss の『数論研究』は数年先立って出版された Legendre の『数論についての試論』とはまったく異なった意図と内容を持っており、しかもラテン語で出版されたこともあって、数学的なエリートたちに読まれて強大な影響を与えたが、まったく一般受けはしなかった。

代数的な側面においては、一変数 n 次の多項式によって与えられる方程式 $f(x) = 0$ は代数学の基本定理によって n 個の複素数の根を持つ。それら n 個の根の置換全体ではなく、この方程式に固有なガロア群（と呼ばれることになるもの）に属する置換を決定して選別する手順は次のようにして得られる：それらの根の有理整数係数の 1 次結合 α であって、各根が $f(x)$ の係数の有理式を係数とする α の冪乗たちの線形結合で表されるようなものを用意し、このような α が満たす既約方程式を $g(x) = 0$ とする。このとき、もとの方程式の根の置換で、それから引き起こされる α の移動先が再び $g(x) = 0$ の根になるもの全体が求める方程式 $f(x) = 0$ のガロア群を構成し、それらの個数は多項式 $g(x)$ の次数と一致する。Abel と Galois は共にこれに基づき、まず Abel は冪乗根によって解ける場合の最も基本的なガロア群として可換群（のちにアーベル群とも呼ばれることになる）を取りだし、また Galois は何らかの素数 p に対する有限素体上の 1 次変換によって表現される群を引き出し、両者ともに特に一般の 5 次方程式が冪乗根の組み合わせでは解けないことを示した。

18. その 2：楕円関数、等々

Legendre は 1825 年から 1830 年にかけて『楕円関数と Euler 積分の理論 (*Traité des Fonctions Elliptiques et des intégrales eulériennes*)』3 巻を書き上げ、例えば Abel にも大いに影響を与えた。（彼はあくまでも実数の範囲で今でいう楕円積分を徹底して考察し、分類した。これに対して、Abel は楕円積分を複素線積分によって与え、その逆関数を複素関数として考察した。早世した Abel を記念するために Jacobi は Abel が取り出した複素関数に「楕円関数」という語を用いることおよび Legendre の言う「楕円関数」を「楕円積分」と呼ぶことを提案し、結局 Legendre もこれに合意した。）

Gauss の影響を強く受けた Niels Henrik Abel (1802-1829) は 1827 年に出版された論文「楕円関数の研究 (*Recherches sur les fonctions elliptiques*)」を一気に書き上げて今で言う楕円関数論を作り上げ、さらにその虚数乗法論を提示した。ただしこの題名の「*fonctions elliptiques*」を彼は Legendre の意味、すなわち、今でいう楕円積分関数として用いた。ともかく Abel は積分 $\int^x [1/\sqrt{(1-x^2)}] dx$ の逆関数が三角関数であって周期 2π を持つことを見ながら、それでも $\alpha = \int^x [1/\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}] dx$ を複素線積分として考察し、その逆関数 $x = \varphi(\alpha)$ が二重周期を持つことを見出した。すなわち、二つの複素数 ω_1, ω_2 で $\varphi(\alpha + \omega_1) = \varphi(\alpha + \omega_2) = \varphi(\alpha)$ であり、 $\tau = \omega_1/\omega_2$ が実数でないものが存在する。ここで先走り、実数でない複素数 γ で $\varphi(\alpha)$ と $\varphi(\gamma \cdot \alpha)$ とが α の関数として代数的な関係を持つときに、Kronecker に倣って「楕円関数 $\varphi(\alpha)$ は γ による虚数乗法を持つ」ということにしよう。このとき、Abel は $\varphi(\alpha)$ が虚数乗法を持った

めの必要十分条件が $\tau = \omega_1/\omega_2$ が虚 2 次無理数であることを示した。また簡単な場合の二つの例を提示して、それらの場合に τ と関わる何らかのアーベル方程式、すなわちガロア群が可換群になるもの、の根がさらに関わってくることを指摘した。そしてこれらの例に導かれた Kronecker は、まず有理数係数のアーベル方程式の根と 1 の冪乗根、すなわち複素指数関数の周期の等分点での値、との関係 (Kronecker-Weber の「定理」) を主張した。さらに虚 2 次無理数 τ の有理関数を係数に持つアーベル方程式の根と τ と関連した虚数乗法を持つ楕円関数の周期の等分点における値との関係についての夢想 (「Kronecker の若き日の夢」) を提示することになる。(実は τ の虚数部分が正である方を探ることに統一したときの τ についてのいわゆる「(楕円) モデュラー関数」の値が新たに関わり、 τ が虚 2 次体を生成するときにはこのモデュラー関数の τ における値がこの虚 2 次体の最大不分岐アーベル拡大体、すなわちヒルベルトの類体、を生成する。これを組み込んだ上で「Kronecker の若き日の夢」が実現される。)

楕円関数とその周期との関係については次のことがわかっている：複素平面上での (有理整数上の) 加群 (module) $\Omega = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \text{ は有理整数} \}$ であって $\tau = \omega_1/\omega_2$ が実数でないものに対しては、必ずこの Ω をちょうど周期の全体とするような楕円関数が存在し、複素数全体の加群の Ω による剰余群である複素トーラスが新しいリーマン面の格好の例を与える。これは Weierstrass の \wp 関数を用いれば簡明に確認される。(楕円関数についての入門的な解説は三宅著『楕円関数概観 楕円積分から虚数乗法まで』を参照されたい。)

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) は Gauss の『数論研究』の普及に力を尽くすとともに、解析学を数論に導入して画期的な成果を上げ、また Riemann と Dedekind にも大なる影響を与えた。Dirichlet は 1822 年から 1826 年にパリで学び、例えば 1829 年にはフーリエ級数の収束性に関する緻密な論文を書き、さらに現代流の関数の定義を与えた上で微分はおろか積分もできないような関数の例を与えている。また彼はパリ時代においても Gauss の『数論研究』を自分で学び、旅の間もこの本を手放さなかったと伝えられている。

他方 1829 年には Nikolai Ivanovich Lobachevsky が、そして 1832 年には Bolyai János が非ユークリデスの幾何学の存在を宣言した。

また Augustin Louis Cauchy は特に解析学の厳密性を強調して極限や関数の連続性を定義したが、それでも彼の定義では「連続性」と「一様連続性」との区別には達していなかった。とはいえ、時代は数学の根底に対する鋭い内省へと向かうようになってきていた。現在の水準までの解析学の厳密化は Weierstrass に至ってほぼ達成された。

Bernhard Riemann (1826-1866) はゲティンゲン大学に入学したあとベルリン大学に移り、Jacobi や Eisenstein および当時はベルリンにいた Dirichlet から特に強い影響を受けた。そしてゲティンゲン大学の Gauss のもとに帰って学位を得た。彼は平行線が存在し得ない、すなわち 2 本の「直線」は延長すれば必ず交わるという幾何学も存在することを見出し、さらに複素解析の大域性に裏打ちされた Riemann 面やまた Riemann 多様体を局所的な微分構造を張り合わせた総合体として定義した。これにより、ユークリデス幾何学や非ユークリデス幾何学などの定曲率の幾何学はもとより、各点における曲面の曲率が変化するような遥かに広範な幾何学が与えられ、数学の幾何学的な表現様式的能力は大きく広がった。もう一点ここで特筆すべきは、今でいうこの多様体を定

義するにあたり、彼自身が用いた用語「Mannigfaltigkeit」によって「無限集合」を自分の数学上の必然性に基づいて取り込んだことである。彼のこの姿勢は当時ゲティンゲン大学で間近にいた弟弟子の Dedekind に大いなる影響を与えたものと思われる。

19. その3: 「無限公理」と実数の連続性

Richard Dedekind (1831-1916) はゲティンゲン大学での Gauss の最後の学生であった。学位を得、教授資格を得たあと、1854年にはゲティンゲン大学において私講師として講義を始めた。そして2年目には独自に学んできたガロア理論の講義を世に先駆けて行った。兄弟子の Riemann の講義を聞き、また逝去した Gauss の後任として1855年に Dirichlet がゲティンゲン大学に着任したあとはその講義に出席し、本人が述べたとされるころでは数学者として生まれ変わった。Gauss の『数論研究』の Dirichlet による講義録『整数論講義 (*Vorlesungen über Zahlentheorie*)』を彼の死後に出版し、これは4回まで版を重ねた(1863年-1894年)。それらに自著の補遺を積み重ね、第2版(1871年)への補遺 X では「算術の基本定理」ないしは「素因子分解定理」を一般の代数的数体の代数的整数の環において成立させるためにイデアル論を提示し、Kummer が円分体に導入していた「イデア数」の考え方を「数学的に整備する」ために、「無限集合」を用いた「イデアル」を導入した。さらに第3版(1879年)への補遺 XI 「代数的整数の理論について (Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen)」により代数的数論を確立した。

また、Dedekind は『連続性と無理数 (Stetigkeit und Irrationale Zahlen)』(1872年に出版)において微積分の基礎となる実数とその連続性を数学的に確立するために「無限集合」を導入していた。彼はさらに『数とは何であり、また何であるべきか? (Was sind und was sollen die Zahlen?)』(1888年)によって自然数をその総体の構造によって捉え、自然数論に立脚した実数の体系を構築した。遂にここに算術 (Αριθμητικά) がピュタゴラス学派以降再び4学科 μάθηματa の第1の学科に納まることになった。この Dedekind の方法は「有理数の切断」を通して見ればその本質が、例えば数字を含めた数の表示法にはまったく依存しないことを含めて、明瞭になる。(「補遺. Dedekind の切断」を参照されたい。)

上記第5節で述べたように、Euclides の『原論』では、例えば「直線」は

1. 点とは部分をもたないもの [として] ある。
2. 線とは幅のない長さである。
3. 線の端は点である。
4. 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である。

の4項によって規定されている。そして Hilbert はこの『原論』に対して現代的な意味での公理系を彼の『幾何学の基礎』(1899年)で提示し直した上で『原論』の内容を展開して見せた。特に点、線、面といった幾何学的な対象をその幾何学的な内実の意味を持たせずに定義し、それらの間の関係こそが本質であるとした。したがって、Euclides が『原論』で与えた「数学的表現」とその様式においては、例えば「点」や「直線」の概念はもっぱら読み手の「直感」が与える存在であって、大袈裟に言うならば「数学的な実体」としては与えられていなかったことが確認されることになった。

この意味で「直線」とその「連続性」は(実数における有理数の稠密性を含めて)よ

うやく Dedekind によって初めてその「数学的な実体」を与えられたことになる。

他方で、彼はまた 1882 年に Heinrich Weber との共著で出版された論文「一変数代数関数論 (Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen)」において複素 1 次元の閉リーマン面をその上の代数関数体におけるイデアル論に基づいて代数的に構成して見せた。

20. その4: 「数学的表現」と「無限公理」

上記においては「無限公理」の内実に触れず、また「集合」という言葉もできるだけ避けるようにしてきた。というのは、「無限公理」というと「集合論」と一体になって理解されることを懸念したからである。数学的な対象の有限個ではない系は、それをひとまとめにして一つの数学的な対象とするときに「無限集合」が現れる。しかし「無限公理」というとさらに一步踏み込んで、それをのっぴきならない形で数学的な対象として取り扱う必然性が認識されることが必要である。

古代ギリシャでは「可能的無限」と「実無限」とが峻別され、「実無限」を拒否する姿勢が強かった。「無限分割」による解析法も「幸運にも」答えを見つけることができた際に、その証明において背理法を用いてそれが有限の過程で終わる手法を見つけ出し、その場合は「実無限」が避けられていると考えられた。

また例えば Leibniz の場合、当初指数関数の冪級数展開を

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \text{etc.}$$

と表し、「 $x^n/n!$ 」も「 $+ \dots$ 」も用いなかった。「関数」という語を導入した Leibniz も、例えば自然数を「 n 」と表したり、その「関数」としての「 $n!$ 」をここでは与えてはおらず、まして不確定な (indefinite) 形の「 $+ \dots$ 」といった表記は思いもよらなかったのではなかろうか。彼の「 $+ \text{etc.}$ 」は「いくらでも算出できるアルゴリズム」が用意されているという意図が込められていたろう。

しかし Euler になると「すべての素数」をひとまとめにしてその無限性を証明する数学的な手法が現れた。彼は実数 $r > 1$ の関数としてゼータ関数

$$\zeta(r) = 1 + 1/2^r + 1/3^r + 1/4^r + \dots$$

を考え、これをオイラー積、すなわちすべての素数 p にわたる $1/(1 - 1/p^r)$ の積と等しいとし、 $r \rightarrow 1$ のときに調和級数が $\rightarrow \infty$ であることによって素数が無数にあることを示した。この手法は Dirichlet に引き継がれ、算術数列における素数定理、すなわち数列 $\{a + nd\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, において a と d が互いに素であるときに無数の素数が現れることが証明された。(Dirichlet はここでオイラー積を引き出すために modulo d におけるディリクレ指標を導入し、その直交性を利用した。)

さらに Dedekind に至り、彼はまずガロア理論を講義したが、このとき多項式の既約性が問題になる。これを明確にするために Abel や Galois は問題となる多項式の係数から四則演算によって得られる数の全体を「有理領域 (domaine rational)」と称して指定した。すなわち、多項式の既約性の概念を確定させるために該当すべき (代数的) 数体を指定したことになる。

次いで Dedekind は代数的数体において最大公約因子を顕在させるために「イデア

ル」を導入した。例えば最も簡単な場合として、有理数体 \mathbf{Q} に $\sqrt{-5}$ を添加した虚 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ を取り上げよう。ここでは

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5}) \cdot (1 + \sqrt{-5})$$

となるが、 $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ には例えば 2 と $1 - \sqrt{-5}$ の最大公約数が存在しない。したがって因数分解が進められず、素因数分解の一意性が成り立たない。Kummer ならば（数学的な表現を欠いたままに）形式的に「イデア数」を導入するところであるが、Dedekind はここで Euclides の『原論』第 7 卷のエクレイデスの互除法からの帰結に倣う；二つの有理整数 a, b に対してはその最大公約数 d は有理整数 m, n を用いて $d = m \cdot a + n \cdot b$ と表される。そこで彼はまず $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ の整数の全体（の環）を

$$O = \{ a + b \cdot \sqrt{-5} \mid a, b \text{ は有理整数} \}$$

で与え、次いで 2 と $1 - \sqrt{-5}$ の最大公約因子を（その「候補者」全体を集めた）無限集合

$$\{ m \cdot 2 + n \cdot (1 - \sqrt{-5}) \mid m, n \text{ は } O \text{ の数} \}$$

によって与えた。このような環 O の $\{0\}$ 以外の（有限生成）部分 O -加群をイデアルと呼び、その積や素イデアル等々を導入して「因子分解の一意性」を獲得した。

この論述においては、この例のように「実無限」を導入して数学的に妥当な処理の根拠とすることを「無限公理」の導入と呼んできた。

2 1. 数学的表現についての原則的な姿勢の分岐と展開

ともかくも Dedekind や Weierstrass, あるいは Cantor によって、アプローチは異なるが、何らかの「無限公理」が導入されて実数全体ないしは数直線の連続性が定式化され、それらの同値性（特に「区間縮小法の原理」は「実数における有理数の稠密性」すなわち「エウドクソス-アルキメデスの公理」と組み合わせられる必要がある）が確認された（難波・三宅著『微分積分学』第 1 章参照）。そして「無限公理」を取り込むための言語として、「量化の記号（量化子, quantifier, のちの \forall (任意の) および \exists (存在する))」が「変数」と組み合わせられて導入されることになっていく。

また Georg Cantor (1845-1918) は取り組んでいた解析学上の問題から一転した展開を図り、1874 年に論文「すべての実代数的整数を集めたものの把握について (Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen)」によって集合論を興し、それを進展させていく。そして例えば Hilbert のもとで学んでいた Ernst Zermelo (1871-1953) は 1904 年に「ツェルメロの公理」といわれる「選択公理」を打ち出して「整列可能定理」を証明した。無限集合を取り扱うための強力な新手法が導入されたことになる。彼はさらに 1908 年に集合論の公理系を発表した。

一方「代数学の基本定理」の基礎が確立され、数の万能的な大枠としての複素数が代数学にとどまらず解析学においてもゆるぎない地位を与えられた。

また、実数全体についての公理的な取り扱いとは別に、自然数から実数全体を構成する Dedekind 流の視点も強く意識されて行く。例えば Giuseppe Peano (1858-1932) は集合を用いた自然数の公理系、いわゆる「ペアノの公理系」を冊子『算術の原理、新手法の提示 (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*)』の形で 1889 年に発表した。

ところが他方では、Kummer の弟子で代数的数論や代数学に携わっていた Leopold

Kronecker (1823-1991) は、1853 年には有理数体上のアーベル方程式の根は必ず円分体に含まれること (Kronecker-Weber の「定理」) を宣明し、さらに 1857 年には虚 2 次体上のアーベル方程式の根はその体の数による虚数乗法を持つ楕円関数の周期の等分点における値から得られること (「Kronecker の若き日の夢」) を「予言」したが、彼はさらに 1882 年に、長大な論文「一般的な代数的量の算術理論の基礎 (Grundzüge einer arithmetischen Theorie der allgemeinen algebraischen Grösse)」を發表し、彼の数学に対する「構成的な立場」を宣言するにいたった。(なおこの論文ではかねてから予言していた Kummer のイデア数に対する一つの「数学的な表象」を「構成的に」与えている；高木貞治著『代数的整数論』附録 (三) を参照。)

この Kronecker の立場では、有理整数と変数の多変数多項式の世界から有限の段階を経て構成されるもののみが数学的な存在として認められるものだとする。よって複素数の全体、あるいは「代数学の基本定理」も、また超越数である円周率 π もその存在を認めようとはしない。多項式の最小分解体は、構成された数体上の一変数多項式環に一つの既約方程式を modulus として (Gauss に倣って) 合同関係を導入することを積み重ねて構成する。John Stillwell はこれを「代数学者の代数学の基本定理」と名付けている (John Stillwell, 『初等数学論考』を参照)。こういう彼の立場は、その後 Brouwer の「直感主義」や Poincaré に繋がって行くと見られる。

なおこの「代数学者の代数学の基本定理」の手法を加えれば、Euler による「代数学の基本定理」の証明が完成するが、「実数の連続性」は前提される必要がある。

他方 Gottlob Frege (1848-1925) はゲティンゲン大学において数学で学位を得るが、論理学への道へと進み、Aristoteles 以来の最大の論理学者といわれるほどの成果を挙げた。彼は 1879 年に画期的な『概念記法 (*Begriffsschrift*)』を著し、伝統的な論理学を革新する新時代を切り開いた。今日の数学で定着している「全称量化子」 \forall (任意の) や「存在量化子」 \exists (存在する) の考え方の源泉を辿れば彼のこの業績に至ることになる。また Frege は命題論理と述語論理の公理化を行ったが、特に述語論理は彼の独創性の賜物である。ところが、自分の主張である「数学を論理学に帰着させる」ことを具現するための『算術の基本法則 (*Grundgesetze der Arithmetik*)』を書き上げ、その第 1 巻に続くべき第 2 巻のゲラ刷りが仕上がってきた 1902 年に Bertrand Russel (1872-1970) から「ラッセルのパラドックス」を知らせる手紙を受け取った。彼は深い挫折感に陥ることになったが、この次第を第 2 巻の序文に書き足して本体はそのまま手をつけずに翌年に出版した。Russel の方はこの自身のパラドックスに対処するために、述語論理における複雑さを階層化して 1 階述語論理、2 階述語論理、と積み上げていくことによって克服することに成功し、1910 年から 1913 年にかけて『プリンキピア・マテマティカ (*Principia Mathematica*)』を Alfred North Whitehead との共著によって出版した。

David Hilbert (1862-1943) は「現代数学の父」とも言われ、1900 年のパリ国際数学者会議を期して多彩な未解決問題 23 題を提示し、新世紀への数学の方向づけを示唆した。彼はすでに 1890 年にはドイツ数学会の要請で『数論報文 (*Zahlbericht*)』をまとめており、特に 19 世紀に方向づけを与えた Gauss の『数論研究』がもたらすことになった代数的数論の発展とその枠組みについての報告を与えていた。すでに眺めてきたように、Gauss はまず「代数学の基本定理」についての厳密な証明を求め、継いでこの『数

論研究』によって、平方剰余の相互法則を基調として、2変数2次形式の理論と円分論とを（後知恵による言い方ではあるが）それぞれに関係する有限可換群の構造に従って二つの新研究領域として提示し、さらに楕円関数論への展開にも示唆を与えた。これらに刺激されて、楕円関数の虚数乗法論やガロア理論が提示され、それらが代数的数論という枠組みと新たな代数学への方向を与えた。Hilbert自身は、例えば特に Gordan によって具体的な計算に基づいて見出されていた不変式が有限の生成系を持つことに對し、構造論的な証明を与え、また「Kronecker-Weber の定理」に初めて欠陥のない証明を与えた。そして『数論報文』によって「代数的数論」という新機軸を正面切って提示し、さらに代数的数体の「絶対イデアル類群」に對する絶対類体の構想を与えた。一方 Heinrich Weber (1842-1913) は「Kronecker の若き日の夢」に對するべく「合同イデアル類群」を導入した。そしてそれらは高木貞治の「類体論」(1923年)に結実し、さらにこれは Emil Artin による「アルティンの相互法則」の証明(1927年)を促すに至り、「平方剰余の相互法則」以来の幾つかの相互法則を包含する相互法則の決定版が得られることになる：これらを合わせて「高木-アルティンの類体論」と呼ばれている。

一方 Hilbert は自分の講義を基にした W. Ackermann との共著の論文「記号論理学の基礎 (Grundzüge der theoretischen Logik)」(1928年)で「意味」を徹底して取り除いて記号化された論理学を展開することにより、数学の「完全性」すなわち「真の命題は必ず証明できること」と「無矛盾性」すなわち「公理から演繹を繰り返して進んでも決して矛盾には達しないこと」を、最も確実な「有限の立場」に基づいて証明しようと志向した。ここに至って、著しく拡大され、展開されてきた「数学的表現」の「自律的な健全性」が明確に意識されることになった。

そして Kurt Gödel (1906-1978) は、まず 1930 年に一階述語論理の完全性を証明した；すなわち、この論理体系においては、論理式が論理的に妥当であるならば、その論理式への有限な演繹（形式的証明）が存在する。彼は繼いで 1931 年にペアノ算術の不完全性を証明した；すなわち、もし数学的帰納法の枠組みによって公理化可能な理論が自然数論を含むならば、そこには証明も反証もできない自然数論の命題が必ず存在し、しかも有限個の公理をさらに付け加えたとしても、その種の命題の存在をすべて解消してしまうことはできない。標語的に言うならば、有限の立場に基づく形式主義においては自然数論の無矛盾性は証明できないことになる。Hilbert の形式主義は、形式化された数学的表現の様式の枠組みの無矛盾性を追求するためには何らかの手直しが必要とされる。例えば Gerhard Gentzen (1909-1945) は 1936 年に大きい無限順序数を導入して数学的帰納法を強化することにより、自然数論の無矛盾性を証明した。

したがって、またここに「数学的表現」の様式にまったく新しい展開が与えられることになった。

なお「無矛盾性の証明」を志向するためには「形式化」は避けることができない。というのは、例えば「自然言語」においては、そこで扱われる「語」や「文」はしばしばその内容が変革を受けることから、それらの「真実性」は確定されない。通常の議論なるものの多くが一つの語の定義やその用法についての妥当性をめぐるものであることに思いを巡らせるならば納得が行くであろう。

・補遺. Dedekind の切断

「実数の連続性」を (Aristoteles 風 !?) に 「数直線」を用いてできるだけ簡潔に説明しておこう. まず一本の直線上に原点 O を採り, さらに単位の線分を規定する点 E ($\neq O$) を採る. そして原点 O には数 0 を, また E には数 1 を対応させる. (下に用いている記法に合わせれば $O = 0 \cdot E$, $E = 1 \cdot E$ である.) 次に自然数 m に対しては線分 OE を E の側に次々と合計 m 本を継ぎ足して得られる線分の端点 $m \cdot E$ を対応させる. 他方線分 OE を n 等分して得られる線分 OP の端点 P を $P = (1/n) \cdot E$ と表す. このように進め, 正の有理数 m/n に対して点 $(m/n) \cdot E$ を対応させる. (ここで分数表示を用いているが, これは「線分の比」を便宜的に表示するものである.) さらに負の有理数 $(-m/n)$ に対しては O に対して $(m/n) \cdot E$ と反対側にある対称的な点 $(-m/n) \cdot E$ を対応させる. このようにして, すべての有理数 q に対応する点 $q \cdot E$ が直線の上に位置づけられる. このような「有理点」はこの数直線上に「ぎっしりと」配置されているがこれらの点は実は隙間だらけに並ぶ. 例えば 2 の平方根 $\sqrt{2}$ に対応するような点 $\sqrt{2} \cdot E$ は欠けている. それでもこの直線上に一点 P が与えられると, それによって数直線上の「有理点」全体は P の左にあるものと右にあるものの二組に分けられる. そこで Dedekind は「よく判っている有理数全体」

$$\mathbf{Q} = \{ q = \pm m/n \text{ で } m \text{ と } n \text{ は自然数, ないし } m = 0 \}$$

を次の 4 条件を満たす二組 A と B とに分割する (デーデキントの切断) :

- (i) A と B はどちらも空っぽではなく, しかも共有する数はない;
- (ii) A と B の数をすべて合わせれば \mathbf{Q} 全体になる;
- (iii) A の数 a と B の数 b に対しては必ず $a < b$ が成り立つ;
- (iv) B はその中に最小の数を持たない.

特に有理数 q に対しては

$$A(q) = \{ \text{有理数 } r \text{ で } r \leq q \text{ であるもの全体} \},$$

$$B(q) = \{ \text{有理数 } r \text{ で } r > q \text{ であるもの全体} \},$$

とすればこれらの条件を満たしている. もし実数 r が, 例えば 2 の平方根 $\sqrt{2}$ のように「明確に」与えられている場合には, それによって $A(r)$ と $B(r)$ を決めることができるだろう. ($B(\sqrt{2})$ については「有理数 $q > 0$ であってしかも $q^2 > 2$ であるもの全体」とすればよい.) ところがそうでない場合は, 例えば, アルゴリズム的に対応する分割を与えることはできない. しかしたとえそうであっても, Dedekind は無限個からなる有理数全体のこのような分割のすべてを「合理的に考察されるべき対象とみなす」ことにより, 数直線上の「すべての点」を (A と B の境界点として) 定義し, それによって「実数の全体」を数学的な対象として「合理的に構成」するわけである. しかもこれにより「実数の連続性」や「極限の概念」が「量子子を導入して合理的に」与えられる.

ただし, この有理数全体の「Dedekind の切断」を用いる意図は, すべての実数を, まず自然数から初めて加法と乗法を生かしたままに減法すなわち 0 と負の整数を導入し, 次いで 0 以外での除法を許して有理数の全体を構成し, 最終的にその「Dedekind の切断」によって実数をすべて「構成する」というところにある. 他方, 例えば, 難波・三宅共著『微分積分学』第 1 章において展開している立場は, 実数全体 \mathbf{R} を公理系によつて的確に規定することを目的としており, そこでは有理数全体 \mathbf{Q} の代わりに規定

すべき実数全体 \mathbf{R} の「Dedekind の切断」とその特性「 \mathbf{R} の Dedekind の切断 (A, B) においては A は必ず最大値を持つ」ことを公理として導入する。これら二種類の立場、特に上記の有理数全体の「Dedekind の切断」による実数の構成法に基づいて実数全体 \mathbf{R} の「Dedekind の切断」の特性を導くことは、同書の第 1 章全体の解説から、特にまず「有理数の実数における稠密性」を見ることによって納得されるであろう。(また高木貞治著『数の概念』, および, 足立恒雄著『数の発明』を参照されたい。)

・参考文献

1. メルツバッハ&ボイヤー, 『数学の歴史 I, II』, 三浦伸夫・三宅克哉監訳, 久村典子訳, 朝倉書店, 2018.
2. Thomas Little Heath, *Diophantus of Alexandria: a Study in the History of Greek Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1885.
3. Thomas Little Heath, *A History of Greek Mathematics*, I, II, Clarendon Press, Oxford, 1921.
4. アリストテレス, 『形而上学 上, 下』, 出 隆 訳, 岩波文庫, 1961.
5. 中村幸四郎・寺坂英孝・伊藤俊太郎・池田美恵 訳・解説, 『ユークリッド原論』, 共立出版, 1971.
6. アンドレ・ヴェイユ, 『数論 歴史からのアプローチ』, 足立恒雄・三宅克哉訳, 日本評論社, 1987.
7. Jeremy Gray, *A History of Abstract Algebra, From Algebraic Equations to Modern Algebra*, Springer Undergrad. Math. Series, Springer, 2018.
8. Jeremy J. Gray and Karen Hunger Parshall, edit., *Episodes in the History of Modern Algebra (1800–1950)*, American Math. Soc., 2007.
9. John Stillwell, 『初等数学論考』, 三宅克哉訳, 共立出版, 2018.
10. 奥 雅博, 「ワイトゲンシュタインのゲーデル理解」, 大阪大学人間科学部 紀要 17, pp.167-183. <https://ir.library.osaka-u.ac.jp/repo/ouka/all/4517/hs17-167.pdf>
11. 高木貞治, 『初等整数論講義』, 共立出版, 1931.
12. 高木貞治, 『代数的整数論』, 岩波書店, 1948.
13. 高木貞治, 『数の概念』, 岩波書店, 1949.
14. 足立恒雄, 『数の発明』, 岩波科学ライブラリー 219, 2013.
15. 難波完爾・三宅克哉, 『微分積分学』, 実教出版, 1977.
16. 三宅克哉, 『方程式が織りなす代数学』, 共立出版, 2011.
17. 三宅克哉, 『楕円関数概観 楕円積分から虚数乗法まで』, 共立出版, 2015.