ガウス確率論の誕生

植　村　栄　治　（大東文化大学）

２０１９年１１月１０日

１　はじめに

確率論に関係のあるガウス(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)の業績として著名なのは最小二乗法に関する研究である．最小二乗法に関しては，1805 年にルジャンドル(Adrien-Marie Legendre, 1752-1833)がこれを提唱して以来，広く知られるようになった．ガウスは 1809 年刊行の『天体運動論』の中で最小二乗法についてより深い考察を行うとともに，自分は 1795 年頃から最小二乗法を常用していたと主張したため，先取権を巡ってルジャンドルとの間に論争が生じた．現在では，ガウスが 1800 年以前から最小二乗法を用いていたことは確実と考えられているものの，その使用がいつ頃から始まっていたかは明確でない．

本稿では，1798 年 6 月 17 日に書かれたガウス日記第 88 項目 [1)]を背景として，ラプラス(Pierre-Simon Laplace, 1749-1827)の確率計算法に対抗してガウスが主張したのは最小二乗法に基づく確率論だったと考えられること，ラプラスが当時提示していたのは 18 世紀半ばにルジェル・ヨシプ・ボスコヴィッチ(Rugjer Josip Bošković, 1711-1787)が編み出した最小絶対値法に基づく計算だったこと，そしてその最小絶対値法は 1810 年頃にはルジャンドルやガウスの主張する最小二乗法に取って代わられたこと等について述べる．

また，近年では最小絶対値法の実用的価値が見直され，数理計画法等において重要な一手法として再認識されつつあることにも言及する．

1) ガウス日記第 88 項目は，”Calculus probabilitatis contra LA PLACE defensus.”(確率の計算はラプラスに抗して守られた．)と述べている．ガウス全集（以下「全集」または”*Werke*”と略す）10-1 巻 533 頁；高瀬正仁訳・解説『ガウスの《数学日記》』(日本評論社，2013) 132 頁参照．

２　ボスコヴィッチの最小絶対値法

２．１　ボスコヴィッチは現在のクロアチアにあるドゥブロヴニクで生まれ，自然科学者としてイタリアやフランスで活躍したイエズス会士である．彼は，教皇ベネディクトゥス 14 世の命を受けて，子午線弧の測定作業を行い，その報告書 [2)] (以下『遠征記』と略記)を 1755 年に刊行した．その中で，彼は，緯度及びその緯度を中心とする 1°の弧長について世界の 5 か所のデータを次のように示した(次頁参照)[3)].

なお，中心緯度θにおける 1°の弧長aの長さは，

$$a \approx z + y \sin^2\theta$$

とおくことができる [4)]．ここでzは赤道における 1°の弧長であり，yは北極における 1°の弧長からzを引いたものである．

Gradus	Latitudo ° ′	½ lin.v. ad rad. 10000	Hexapedæ	Diff. a primo obſerv	Diff. computata	Error
Quitenſis	0, 0	0	56751	0	0	0
Prom.B.S.	33,18	2987	57037	286	240	—46
Romanus	42,59	4648	56979	228	372	144
Pariſien.	49,23	5762	57074	323	461	138
Lapponic.	66,19	8386	57422	671	671	0

（『遠征記』500 頁）

なお、安藤洋美の著書『最小二乗法の歴史』[以下【安藤】と略記] は，上記のデータを見やすくして，次の表を与えている [5)].

位置	θ	弧長 a トアズ	$\sin^2\theta\times10^4$
1 キト(エクアドル)	0° 0′	56751	0
2 喜望峰	33°18′	57037	2987（3014の誤り）
3 ローマ	42°59′	56979	4648
4 パリ	49°23′	57074	5762
5 ラプランド	66°19′	57422	8386

（【安藤】35 頁）

この 5 か所のうち任意の 2 か所を取り出し，その 2 個の式からyを求め(【安藤】は下記の表においてこのyを「極超過」と呼んでいる)，さらに楕円率（地球扁平率）を$\frac{3*56751}{y}$として算定する．そうすると次のように全部で 10 通りの楕円率が得られる．

Binariũ	Exceſſus poſtremi	Ellipti citas	Binariũ	Exceſſus poſtremi	Ellipti-citas
1, 5	800	1/213	2, 4	133	1/128
2, 5	713	1/239	3, 4	853	1/200
3, 5	1185	1/144	1, 3	491	1/347
4, 5	1327	1/128	2, 3	—350	—1/486
1, 4	542	1/314	1, 2	957	1/78

（『遠征記』501 頁）

【安藤】はデータの誤りを修正した値も記しているので，その表を掲げておく．

対	極超過 y	楕円率	対	極超過 y	楕円率
1,5	800	1/213	2,4	133(135)	1/128(1/1282)
2,5	713	1/239	3,4	853	1/200
3,5	1185	1/144	1,3	491	1/347
4,5	1372	1/128	2,3	−350	−1/486
1,4	542(360)	1/314(1/304)	1,2	957(949)	1/78(1/178)

（【安藤】35 頁）

このようにしてボスコヴィッチは地球扁平率を算出したが，上記の 10 個の値はばらつきが大き過ぎるため，彼はこれらの数字を示すにとどめている．『遠征記』ではこれ以上の考察は行われておらず，最小絶対値法は登場しない．

2.2　さて, これらの数字からできるだけ精確な地球扁平率を求める方法を検討したのが，2 年後に刊行された彼の論稿[以下「1757 年論稿」と略記][6]である．この 1757 年論稿は『遠征記』の内容を要約したものだが，その中で，ボスコヴィッチは初めて最小絶対値法の考え方を示した．すなわち，『遠征記』の上記データに基づいてできるだけ精確な地球扁平率を求めるための規準として，彼は次の 3 点を挙げた．

① 弧長の差は緯度の sin の二乗の差に比例する
② 正の諸修正は負の諸修正に等しい
③ 諸修正が正にせよ負にせよそれらの和が，上の 2 つの条件が満たされたときに生じ得るすべての中で最小である [7]

1757 年論稿はこの方法に基づいて地球扁平率=1/255 という結果を示しているが，その具体的な計算式は示されていない [8]．

なお，ボスコヴィッチは，この弧長に基づいて地球扁平率を算出する前に，振子周期の測定データに基づく地球扁平率の算定を行っている．そのデータと算定された地球扁平率の表はそれぞれ以下の通りである [9]．

Tabula I pro gravitate.

Locus observationis	Latitudo °	'	½ sin. vers.rad. 10000	Pendulum in lin.Paris.	Different.a primo	Differ. computata	Error
Sub æquatore	0	0	0	439 . 21	0	0	0
A Portobello	9	34	271	439 . 30	. 09	. 07	. 02
A petit-Goave	18	27	1002	439 . 47	. 26	. 24	. 02
Parisiis	48	50	5667	440 . 67	1 . 46	1 . 38	. 08
Pelli	66	48	8450	441 . 27	2 . 06	2 . 06	0

（「1757 年論稿」390 頁）

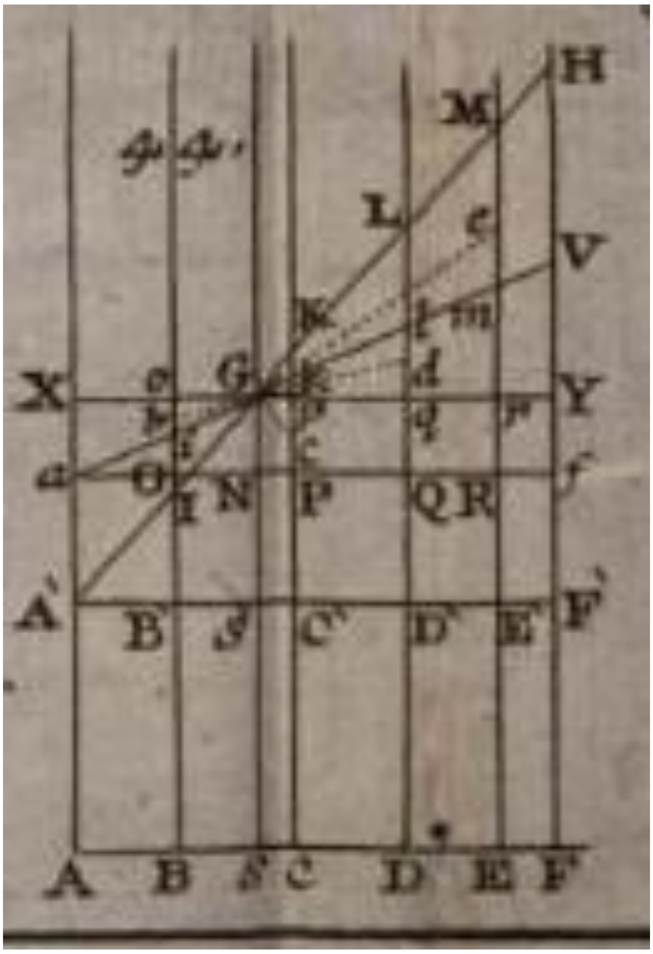
Tabula 2 pro eadem.

Binarium	Differ. in pol., & æq.	Fractio gravitatis	Ellipticitas	Binarium	Differ. in pol., & æq.	Fractio gravitatis	Ellipticitas
1,& 5	2 . 44	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{319}$	1,& 4	2 . 58	$\frac{1}{170}$	$\frac{1}{355}$
2, 5	2 . 41	$\frac{1}{182}$	$\frac{1}{312}$	2, 4	2 . 54	$\frac{1}{173}$	$\frac{1}{343}$
3, 5	2 . 42	$\frac{1}{182}$	$\frac{1}{312}$	3, 4	2 . 57	$\frac{1}{171}$	$\frac{1}{351}$
4, 5	2 . 16	$\frac{1}{203}$	$\frac{1}{265}$				

（「1757 年論稿」390 頁）

これによると，どの 2 地点の組み合わせでも，(4，5)を除いて，概ね三百数十分の一の値が得られており，実際の値(=1/298)にかなり近い．このように，ここでは振子周期の方が弧長測定より精確な値が得られているのは興味深い．

2.3　ボスコヴィッチが最小絶対値法に基づく具体的な計算方法を最初に示したのは，彼の同郷の友人ベネディクト・スタイ(Benedict Stay, 1714-1801)が 1760 年に刊行した或る書物[以下「1760 年書」と略記]の補遺においてである[10)]．彼はそこで『遠征記』に掲載した測量データを用いて最小絶対値法を適用した計算の仕方を詳しく説明している[11)]．その説明は以下の図[12)]を用いた幾何学的なものであるが，詳細は省略する．



（1760 年書の図 44）

2.4　最小絶対値法の適用に関するボスコヴィッチの考察は上記の 1760 年書で明らかにされているが，同書はラテン語で書かれていたため，より多くの人々が読めるように，彼は 1770 年にフランス語の論稿 13)を発表した．この 1770 年の論稿において，彼は 1760 年書の重要部分を仏訳するとともに，さらなる考察を加えて，地球扁平率として 1/289 が得られることを示した 14)．

2.5　以上のような諸文献を通じて，ボスコヴィッチは観測データからできるだけ真値に近い値を求めるための方法として最小絶対値法を創出し確立した．その基本的な考え方はラプラスに受け継がれ，18 世紀末まで確率論・誤差論の主流となった．

2) Christopher Maire et Roger Joseph Boscovich, *De Litteraria Expeditione per Pontificiam ditionem ad dimetiendas duas Meridiani gradus, et corrigendam mappam geographicam, jussu, et auspiciis Benedicti XIV Pont. Max. suscepta,* (Romae: Excudebant Nicolaus, et Marcus Palearini, 1755).

3) *Id.* : 500.

4) これ以降に登場する数式の導出・証明は必ずしも簡単でないが，ここでは省略する．

5) 安藤洋美『最小二乗法の歴史』（現代数学社，1995）35 頁．

6) Roger Joseph Boscovichch, " De Litteraria Expeditione per Pontificiam ditionem, et Synopsis amplioris Operis, ac habentur plura ejus ex exemplaria etiam sensorum impressa", *Bononiensi Scientarum et Artum Instituto Atque Academia Commentarii,* Tomus IV, (1757) : 353 - 396.

7) ここでの「それらの和」は正負の符号を取り去った量の和すなわち現在で言えば

「諸修正の絶対値の和」を指すと解される．なお，この部分の原文（ラテン語）は次の通りである．*Id.* ; 392.

ut summa sive positivarum, sive negativarum correctionum sit omnium minima, quae salvis prioribus binis conditionibus haberi potest,

8) *Id.* ; 392.

9) *Id.* ; 390. 地球が球でない場合には，緯度によって地球の重心からの距離が異なるので，振子が 1 秒を刻むのに必要な糸の長さが緯度により異なる．このことを利用して各緯度と地球の重心までの距離の関係を計算し，地球の扁平率を算定することができる．

10) Benedict Stay, *Philosophiae Recentioris, a Benedicto Stay is IIn Romano Archigynasis Publico Eloquentare Professore, versibus traditae, Libri X, cum adnotationibus et Supplementis P. Rogerii Josephi Boscovich S. J.*, Tomus II, (Romae: Sumptibus Nicolai et Marci Palearini, 1760) : 406-426.

11) ここでも上記①～③の規準は概ね同趣旨の文言で明示されている．

12) 1760 年書の巻末に掲載の図 44 参照．【安藤】36-37 頁はこの図を用いてボスコヴィッチの解法を丁寧に解説している．

13) Maire and Boscovich, *Voyage Astronomique et Géographique dans l'État de l'Église, entrepris par l'Ordre et sous les Auspices du Pape Benoît XIV, pour mesurer deux degrés du méridien, et corriger la Carte de l'État ecclésiastique*, (Paris: Chez N. M. Tilliard, 1770) : 501-512 (Note pour la fin du N^{O}.303, Liv. V.).

14) *Id.* : 510.

3　ラプラスの最小絶対値法

フランスの数学者ラプラスは，天文学や地球科学の諸問題についても種々の研究を行った．彼は 1792 年に刊行された論文 [15]の中で地球の弧長や扁平率を各種のデータをもとに計算したが，その中でボスコヴィッチの最小絶対値法の考え方を支持して次のように述べている [16]([　]内は植村による補足).

> この楕円は次の 2 つの条件を満たす必要があると私には思われる．すなわち，1．誤差の和がゼロであること，2．誤差のすべての符号を正とした場合の和が最小であること，である．ボスコヴィッチ氏はこの目的のために巧みな方法を案出し，それは彼の『天文学と地理学の旅行』のフランス語版の巻末に掲載されている．しかし，彼は[地球の]形の考察について自己の方法を無用に複雑化しているので，私は最も単純な解析的な形を以下に示そう．

このように述べた後，ラプラスは当時知られていた種々の測定データをもとにして地球の扁平率の算定を試みた．彼が用いたデータは次の通りである．

	緯度	弧長(単位は toise=1.949m. 当該緯度を中心とする 1°の長さ)	
1.	0°00'	56753	(ペルー[エクアドル])
2.	33°18'	57037	(喜望峰)
3.	39°12'	56888	(米国・ペンシルヴァニア)
4.	43°01'	56979	(ローマ)
5.	45°43'	57034	(フランス)
6.	48°43'	57086	(ウィーン)
7.	49°23'	57074.5	(パリ)
8.	52°41'	57145	(オランダ)
9.	66°20'	57405	(ラップランド)

ラプラスは，これらのデータをもとに，最小絶対値法を用いて，地球の扁平率を 1/279 と算定した [17].

ところで，ラプラスは振子時計のデータを用いた地球の扁平率の算定も行っている．ラプラスが 1792 年の論文で用いた振子のデータは次の通りである．

	緯度	周期 2 秒となる糸の長さ(単位は ligne=2.2558*mm*)	
1.	0°00'00"	439.21	(ペルー[エクアドル])
2.	9°34'00"	439.30	(パナマ)
3.	18°27'00"	439.47	(ハイチ)
4.	33°18'00"	440.14	(喜望峰)
5.	41°54'00"	440.38	(ローマ)
6.	48°12'30"	440.56	(ウィーン)
7.	48°50'00"	440.67	(パリ)
8.	51°31'00"	440.75	(ロンドン)
9.	58°15'00"	441.07	(エストニア)
10.	58°26'00"	441.10	(エストニア)
11.	59°56'00"	441.21	(ペテルスブルク)
12.	66°48'00"	441.27	(フィンランド)
13.	67°04'30"	441.41	(ロシア)

ラプラスは，これらのデータをもとに，最小絶対値法を用いて，地球の扁平率を 1/359 と算定した [18]．実際の扁平率(=1/298)と比較すると，弧長を用いる上記の方が若干精度が高いが，どちらの誤差も真値の 1~2 割以内に収まっているのであるから，両者とも比較的良好な数値と言えるだろう．

15) Pierre-Simon Laplace, “Sur les degrés mesurés des méridiens et sur les longueurs observées sur pendule”, *Histoire de l’Académie royale des inscriptions et belles-lettres, avec les Mémoires de littérature tirés des registres de cette académie*, Année 1789, (Paris : Imprimerie Impériale, 1792) : 18-43 ; “Sur quelques points du système du monde”, *Œuvres complètes*, tome 11, (Paris:Gauthier-Villars et fils, 1845) : 493-516.

16) *Œuvres complètes*, tome 11 : 506.

17) *Id.* : 510.

18) *Id.* : 515．なお，ラプラスは 1783 年執筆(1786 年刊行)の論文(Mémoire sur la figure de la terre)では上記 1～12 のデータに基づき，扁平率を 1/321 と算定している．*Œuvres complètes*, tome 11 : 10 参照．．

4　ガウスの最小二乗法

4.1　ガウスが確率や誤差の問題についていつ頃から研究をしていたかは必ずしも明らかでない．ガウス自身が後に述べた所によれば 1795 年から最小二乗法を用いていたという [19]．また，1798 年 6 月 17 日付のガウス日記第 88 項目では確率の計算についてラプラスに対抗する考えを得た旨が記されている [20]．しかし，これらの具体的内容は明らかでない．

4.2　ガウスが誤差に関する問題について外部に発表したのは，1799 年 8 月 24 日付のツァッハ宛書簡 [21]が最初と考えられる．その書簡において，ガウスは当時公表されていたフランス・スペイン間の測量結果の数字に基づき，地球の扁平率を 1/187 と算定した．

その際，ガウスは「私の方法を適用する際に，公表の数字の誤りを発見した」旨及び

「私の方法」についてはその見本をツァッハ宛に送った旨を記している．この書簡はツァッハが当時，編集・発行していた雑誌(Allgemeine Geographische Ephemeriden)に掲載された．その脚注でツァッハはガウスの言う見本については「他の所で」と記したが，結局，取り上げられなかった．そのため，この「私の方法」がどのようなものであったかは不明である[22)]．

TABLE 1.

French arc measurements, from Allgemeine Geographische Ephemeriden, **4**, 1799, *page* xxxv. *The number 76545.74 is a misprint; the correct number is 76145.74. The table gives the length of four consecutive segments of the meridian arc through Paris, both in modules* S *(one module ≅ 12.78 feet) and degrees* d *of latitude (determined by astronomical observation). The latitude of the midpoint* L *of each arc segment is also given.*

	Modules S	Degrees d	Midpoint L
Dunkirk to Pantheon	62472.59	2.18910	49° 56′ 30″
Pantheon to Evaux	76545.74	2.66868	47° 30′ 46″
Evaux to Carcassone	84424.55	2.96336	44° 41′ 48″
Carcassone to Barcelona	52749.48	1.85266	42° 17′ 20″
Totals	275792.36	9.67380	

（ 注 22) Stigler：467 ）

4.3　ガウスは，1812 年 1 月 24 日付のオルバース宛書簡において，1799 年春にウルグ・ベク（Ulugh Beg, 1394-1449. ティムール朝第 4 代君主で天文学者・数学者）の時間方程式表について最小二乗法を適用したと述べている．

ガウスが 1799 年 8 月 24 日付でツァッハに送った前述の書簡中の「私の方法」に関する「見本」というのは，この時間方程式表の修正についてガウスが同年春に得た計算結果であると考えられている．その具体的な計算過程は散逸して不詳だが，種々の検討の結果，この計算に際してガウスが最小二乗法を用いたことはほとんど疑いの余地がないと言われている[23)]．

4.4　1801 年 1 月にイタリアで小惑星が発見され，ケレスと命名された．ケレスは間もなく見えなくなったが約 1 年後にどの位置に現れるかが問題となった．ガウスは，40 日間の観測データをもとにケレスの軌道を精確に計算して公表し，1801 年 12 月にはツァッハやオルバースがその予想通りの位置にケレスを再発見するに至った．この精確な軌道計算が最小二乗法によって得られたと言われることがあるが，それは明らかに誤りである[24)]．

ガウスが 1812 年 1 月 24 日付の上記オルバース宛書簡で述べたところによれば，1802 年秋に行ったケレスの軌道要素の第 8 回目の改良において最小二乗法が用いられた[25)]．また，1812 年 1 月 30 日付のラプラス宛の書簡において，ガウスは，自分が最小二乗法をしばしば適用し始めたのは 1802 年のことであり，それ以来，頻繁に使用してきたと述べている[26)]．

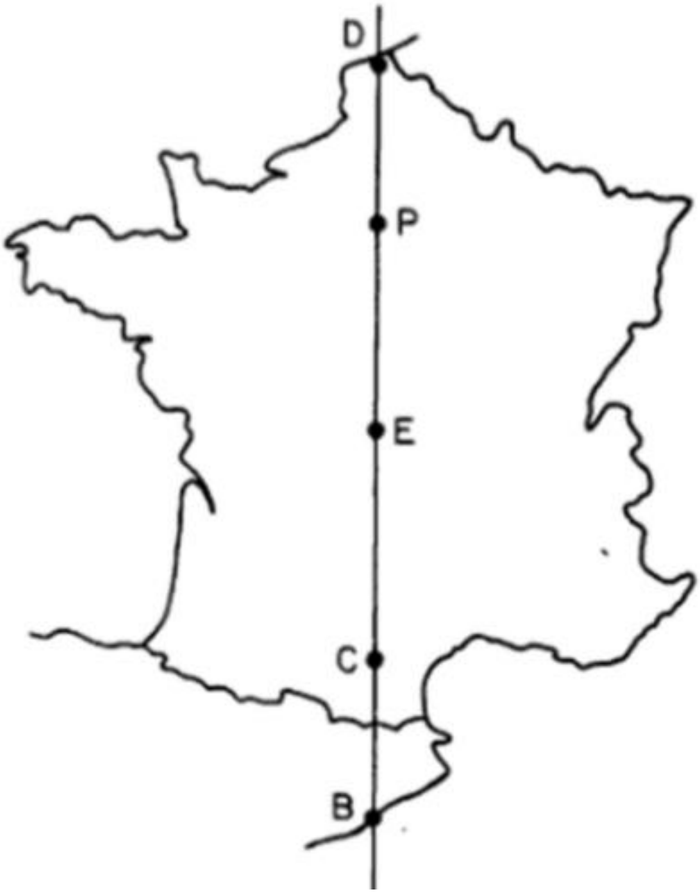


FIG. 1. *The French meridian arc, through Dunkirk* (D), *the Pantheon* (P) *in Paris, Evaux* (E), *Carcassone* (C), *and Barcelona* (B).

（ 注 22) Stigler: 468 ）

4 .5　1803 年から 1807 年にかけて，ガウスはブラウンシュヴァイク近辺の測量を行った．その際，100 か所ほどの測量地点のデータを修整するために最小二乗法を用いたことが指摘されている．すなわち，テオ・ゲラルディ(Theo Gerardy, 1908-1986)の 1977 年の論文は，ガウスの計算メモの写真 6 枚に基づいてこの測量の計算過程を検証し，そこに最小二乗法の適用が見られることを明らかにしている [27].

4 .6　以上をまとめると，ガウスが既に 1790 年代後半から最小二乗法を知っていたことは確実と言ってよい．但し，その使用例は計算メモの中で確認できるケースが若干あるにとどまり，ガウスの 1809 年以前の著作や草稿の中で最小二乗法が明確な定理や命題の形で述べられたことはない．また，ガウスの実際の諸計算において最小二乗法が何か決定的な役割を果たした例は余り見受けられないように思われる．小惑星や彗星の軌道計算の精密化については 1810 年以降，最小二乗法が大きな役割を果たし始めるが，その頃のガウスは既に天文学上の細かい計算を弟子たちに任せるようになっていた．

19) ガウスは 1812 年 1 月 30 日付のラプラス宛の書簡において，自分は 1795 年以来，最小二乗法を使用してきたこと，及び 1798 年 6 月には確率計算の諸原則に最小二乗法を取り込んだ旨を述べている． *Werke*, 10-1 : 373.
20) 前注 1)参照．
21) この書簡は， *Werke*, 8 : 136 に収録されている．
22) 「私の方法」が最小二乗法を含むものであったことは容易に想像される．しかし，

上記の測定値に最小二乗法を適用して計算してもガウスの示した 1/187 という地球扁平率を算出することは難しいという指摘がある. Stephen M. Stigler, "Gauss and the invention of least squares", *The Annals of Statistics* 1961, vol. 9, No. 3 (1961) : 465-474 参照. また，そもそもこのガウスの計算には誤りが存在するとして計算の信頼性を疑問視する見方もある. Jacques Dutka, "On Gauss' priority in the discovery of the method of least squares", *History of exact sciences*, Vol.49, No.4 (Springer:New York, December 1995) : 355-370 (368). Dutka は，ガウス自身も後にその誤りに気が付いたようだと述べ，その理由として，後年のシューマッハ宛の書簡の中で, ガウスは, 自身が 1799 年に最小二乗法を用いた例として Ulugh Beg の時間方程式に言及しているが，地球扁平率の計算については全く触れていない点を挙げている. *Id.* : 368. 結局，この地球扁平率の計算においてガウスが最小二乗法を使用した可能性は極めて高いものの，残された資料からそれを厳密に裏付けることは困難なようである.

23) *Id.* : 362. なお，ベクの時間方程式についてガウスが行った修正計算の結果は，*Werke*, 12 : 64-65 に収録されている.

24) ガウスが 1801 年に考案した，楕円軌道を描く天体について 3 個の観測からその軌道要素を計算する方法については，ガウスが 1802 年にオルバース宛に執筆し 1809 年になって刊行された論稿に詳しく述べられている. Carl Friedrich Gauss, "Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden", *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde,* 20 (1809 Sep.) : 197-224 ; *Werke,* 6 : 148-165. それを参照すれば，1801 年秋にケレスの軌道要素を算出した際に最小二乗法が不要だったことは明白である. なお，この論稿の最後でガウスは「観測が既に数年間に及び，その軌道要素が微小な所まで決定されている場合には，任意の個数の観測を基礎に置くことができる微分変化を使うのが最良の手段と考える.」と述べている. *Id.* : 165.これは最も精確な軌道を求める最終段階で最小二乗法を用いる趣旨であると解される(当時はまだ最小二乗法という言葉がなかったのでガウスはここでは「微分変化の使用」(der Gebrauch der Differential-Änderungen)という表現を使っている). Assyr Abdulle and Gerhard Wanner, "200 years of least squares method", *Elemente der Mathematik*, 57 (2002) : 45-60 (50) も同様の理解を示している. すなわち，この文章はガウスが 1805 年以前に最小二乗法を知っていた有力な証左と言えよう.

25) *Werke*, 8 : 140.

26) *Werke*, 10-1 : 373.

27) Theo Gerardy, "Die Anfänge von Gauss' geodätischer Tätigkeit", *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 102 Jahrgang (Januar 1977), (Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer, 1977) : 1-20. 同論文の 12 頁に収録された写真に筆者(植村)が説明用の書込みを加えたものを本稿の末尾に掲載した。筆者が四角で囲んだ部分には中央の縦線を境にして 4 行の数式(それぞれ =0 という右辺が省略されていると考えてよい)が左右に記されている（読みやすいようにその拡大図を上方に記した)。右側の数式の係数はそれぞれ左側の数式の係数を何倍かしたものである。例えば第 1 行(=A)の場合、左側の各係数に 7 を掛けた値が右側の各係数になっている。この 7 は(本来 9 となるべきだが)y の係数 461 を 54(=第 4 行の y の係数の絶対値)で割った近似値と考えられる。また、第 2 行(=B)の場合は、左側の各係数に−3 を掛けた値が右側の各係数になっているが、この−3 は y の係数−169 を同じく 54 で割った近似値と考えられる。同様の計算により、第 3 列は−5 を掛け、第 4 列は−1 を掛けたと考えられる。以上を通じて、54 で割る操作は以後の計算を簡単にする意味しかないと考えられるので無視すると、左側の各行の y の係数を二乗した値がそれぞれ右側の y の係数として現れていることが分かる。これは左側の 4 個の数式(=0

とおいて x と y に関する 4 個の 1 次方程式とみなす)に最小二乗法を適用して x と y の係数を求める計算が行われたことを示していると言える。*Id.*：13 の記述参照。

5．1810 年以降の展開

ルジャンドルによる最小二乗法の主張(1805 年)及びガウスによる最小二乗法の理論的裏付け(1809 年)等を経て，最小二乗法は確率論や統計学の分野で急速に存在感を増した．ラプラスは，最小二乗法による近似を研究し，1810 年には「標本が大きくなると標本平均値の分布は正規分布に近づく」という中心極限定理を示した．また，ベッセルが 1816 年に提唱した「確率誤差」の概念は，統計的検定の前身となった．最小二乗法は正規分布や最尤推定法などと相まってその後の数理統計学の発展の基礎となったと言うことができる．

しかし，近年ではコンピュータの発達や目標計画法・線形計画法の発展等に伴い，最小絶対値法が実用性の高い回帰分析手法であることが再認識されるようになった．また，データに外れ値がある場合には最小二乗法よりも最小絶対値法の方がより良い近似を与えるとの指摘もあり[28)]，ボスコヴィッチに始まる最小絶対値法は今なおその存在意義を失っていないと言えよう．

28) 例えば，末吉俊幸「最小絶対値法による回帰分析」(https://www.jstage.jst.go.jp/article/jorsj/40/2/40_KJ00001203093/_pdf/-char/en [2020 年 1 月 14 閲覧])(*Journal of the operations research*, Society of Japan, 1997, Volume 40, Issue 2：261-275)参照．

6．結語

ガウス日記第 88 項目には，ボスコヴィッチ及びラプラスの最小絶対値法に対抗して最小二乗法を導入しようというガウスの意思が表れている．その最小二乗法は正規分布の研究につながり，中心極限定理・最尤推定法・確率誤差論等を通じて近代的な確率論や数理統計学の確立に寄与した．1798 年当時のガウスにとって最小二乗法は真である確率が最も高い数値を求めるための一計算法に過ぎなかったかも知れないが，その数学的意義は極めて大きかった．しかし，今日，真値に迫るための分析手法として最小絶対値法が再評価されつつあることは，皮肉であるとも数学の奥深さを示すとも言えるように思われる．

参考文献（上記以外のもの）

【1】ガウス全集：Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Bde. 1-12, 1863-1929.
【2】Guy Waldo Dunnington, *Carl Friedrich Gauss：Titan of Science*, (New York, Hafner Publishing, 1955), (Reprinted 2004 by The Mathematical Association of America).
【3】ダニングトン著，銀林浩=小島穀男=田中勇訳『ガウスの生涯』(東京図書，1976).
【4】Lancelot Law Whyte, *Roger Joseph Boscovich*, (London: George Allen & Unwin Ltd., 1961).

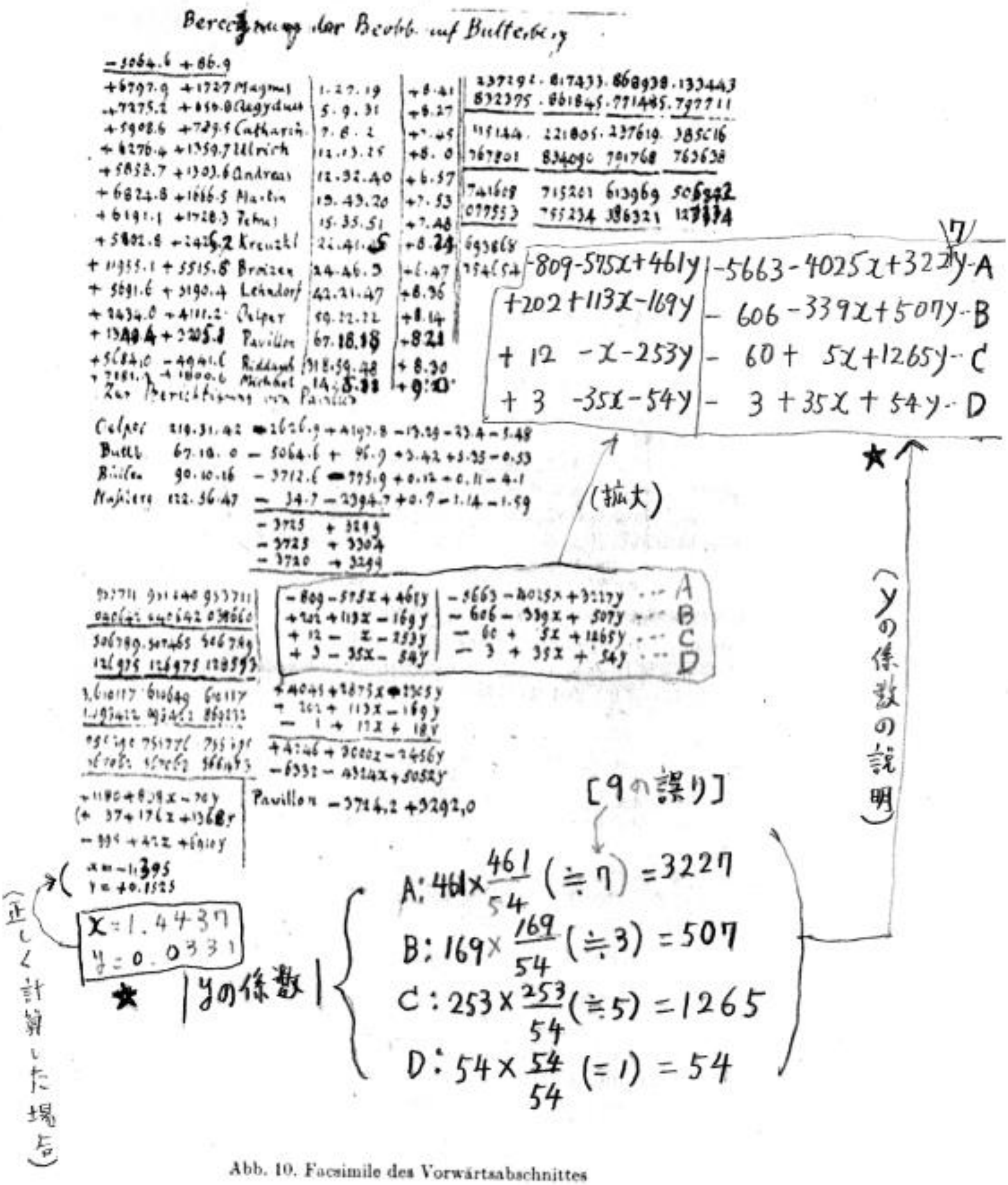


Abb. 10. Facsimile des Vorwärtsabschnittes

(注 27) Gerardy : 12)　■