楕円曲線とη関数の積
(Elliptic Curves and Products of η-functions)

難波完爾(Kanji Namba)

463-3 Kitamizote Sojya Okayama 719-1117

Tel/fax. 0866-90-1886

2019.11.29

key words:

elliptic curve, congruence zeta, η-series, prime number,
Chebyshev polynomial, Lissajous curve, collelation, coefficient
Sato-Tate (sin²-)distribution, Legendre symbol

ここでの研究の対象は楕円曲線とη関数の(偶数個の)積の係数の(代数的)相関関係に関するものです。

1. 楕円曲線とη関数(η-function, η-series)

先ず、η関数(級数, η-series)について記す。整数Zから自然数Nへの関数

$$n(3n+1)/2 : Z \to N$$

に対し、無限和と無限積の両方の形に表現される

$$f(x) = \sum_{n\in Z} (-1)^n x^{n(3n+1)/2} = \prod_{n\in N} (1-x^n) =$$

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}+x^{92}+x^{100}-x^{117}-x^{126}+\cdots$$

を考え、それに $x^{1/24}$ を乗じた

$$\eta(x) = x^{1/24}f(x) = x^{1/24}\sum_{n\in Z} (-1)^n x^{n(3n+1)/2} =$$

$$\sum_{n\in Z} (-1)^n x^{1/24*(6n+1)^\wedge 2} = x^{1/24}\prod_{n\in N} (1-x^n) =$$

$$x^{1/24}(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}+x^{92}+x^{100}-\cdots)$$

を考える。η級数については、計算の複雑性の観点から重要な性質があります。例えば、200項(正確には201項)の部分列

$$\eta(x) \fallingdotseq x^{1/24}\sum_{-100\leqq n\leqq 100} (-1)^n x^{n(3n+1)/2}$$

で

$$\min(201(3\cdot 201+1)/2,\ 201(3\cdot 201-1)/2) = 201\cdot 301 = 60501$$

の手前、つまり、60500次の項までの項を「正確に」記述できているということです。要するに次数の平方根のorderの個数の項で表現できることです。また、

$$\eta(x)^3 = \sum_{n\in Z} (-1)^n(4n+1)x^{1/8*(4n+1)^\wedge 2}$$

も美しく有効な表現です。

大切な点はη(x)は $x^{1/24}$ の冪級数であるがxの整級数ではないことです。しかし、例えば

$$\eta(x)^{24} = xf(x)^{24} =$$
$$x-24x^2+252x^3-1472x^4+4830x^5-6048x^6-16744x^7+84480x^8-113643x^9-115920x^{10}+534612x^{11}-370944x^{12}-577738x^{13}+401856x^{14}+1217160x^{15}+987136x^{16}-6905934x^{17}+\cdots$$

や

$$\eta(x^2)^2\eta(x^{10})^2 =$$
$$x-2x^3-x^5+2x^7+x^9+2x^{13}+2x^{15}-6x^{17}-4x^{19}-4x^{21}+6x^{23}+x^{25}+4x^{27}+6x^{29}-4x^{31}-2x^{35}+2x^{37}-4x^{39}+6x^{41}-10x^{43}-x^{45}-6x^{47}-3x^{49}+\cdots$$

は x の整級数になっています。ここでは、「x の整級数」という性質に着目してみましょう。例えば、$\eta(x^2)^2\eta(x^{10})^2$ が楕円曲線

$$y^2 = x(x^2+x-1) = g(x)$$

の合同ゼータ関数(congruence ζ-function)になっていることは、素体

$$GF(p) = F_p = \{0, 1, \cdots, p-1\} = p$$

で考えて、平方剰余記号(ルジャンドル記号, Legendre symbol)を

$$(n/p) = \#\{y: y^2 = n\} -1 = n^{(p-1)/2} \bmod p = 0, \pm 1$$

として

$$a_p = \sum_{n\epsilon p} (g(x)/p) = \#\{[x,y]\epsilon p^2: y^2 = g(x)\}-p$$

とするとき、$\eta(x^2)^2\eta(x^{10})^2$ の x^p の係数を $\eta(x^2)^2\eta(x^{10})^2[p]$ と記すと

$$a_p = \pm\eta(x^2)^2\eta(x^{10})^2[p]$$

が特別の素数(2, 5 など)を除いて成立すると云うものです。例えば

$$[y^2 = x(x^2+x-1)][p]$$

でこの係数を記しますと、

$$\eta(x^2)^2\eta(x^{10})^2 = x-2x^3-x^5+2x^7+x^9+2x^{13}+2x^{15}-6x^{17}-4x^{19}-4x^{21}+6x^{23}+x^{25}+4x^{27}+\cdots,$$
$$[y^2 = x(x^2+x-1)][p]: [[3, 2], [5, 1], [7, -2], [11, 0], [13, -2], [17, 6], [19, 4]]$$

のように、

$$\eta(x^2)^2\eta(x^{10})^2[p]+[y^2 = x(x^2+x-1)][p] = 0$$

のような関係が成立していることが解ります。例えば p = 17 の場合は Legendre symbol および対応する $x(x^2+x-1) \bmod 17$ の列は

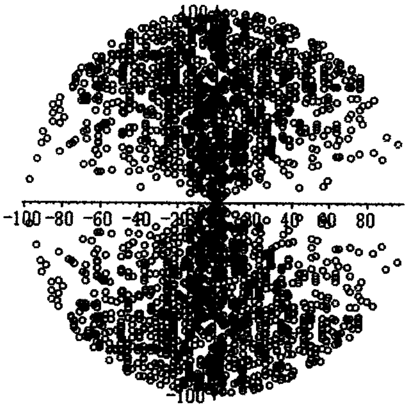
$$[0, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1]$$
$$[0, 1, 10, 16, 8, 9, 8, 11, 7, 2, 2, 13, 7, 7, 2, 15, 1],$$

であり、x = 5 では $x(x^2+x-1) \bmod 17 = 9$ で(9/17) = 1(1+9 = 10 番の元 1)として

$$[0, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1]$$

です。-1 のもの 5 個、1 のもの 11 個で 11-5 = 6 の符号を変えた$-6x^{17}$が得られています。

$$a_p = [y^2 = x(x^2+x-1)][p],\ x^2-a_px+p = 0,\ p = 3 \sim 9973$$



今の場合は 24 = 2+2+10+10 のような分割[2,2,10,10]でしたが少し一般の場合の例を記しておきましょう。

η 級数の 4 個の積の場合

$$[n,m,h,k],\ n \leqq m \leqq h \leqq k,\ n+m+h+k = 24$$

を満足する 4 重対(4-tuple)は全体で 108 個存在する。

$$\eta[n,m,h,k](x) = \eta(x^n)\eta(x^m)\eta(x^h)\eta(x^k)$$

は x の整級数である。

$\eta[n,m,h,k](x)$

[n,m,h,k]		(related)elliptic curves	distribution
[6,6,6,6]	$\eta(x^6)^4$	$y^2 = x^3+1$	$Z(\sqrt{-3})$
[4,4,8,8]	$\eta(x^4)^2\eta(x^8)^2$	$y^2 = x(x^2 \pm 1)$, $y^2 = x(x^2+6x+1)$	$Z(\sqrt{-1})$
[4,4,4,12]	$\eta(x^4)^3\eta(x^{12})$	$y^2 = (x-2)(x^2+2x-7)$	$Z(\sqrt{-1})$, $Z(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$
[3,3,9,9]	$\eta(x^3)^2\eta(x^9)^2$	$y^2 = x^3+2$	$Z(\sqrt{-3})$
[3,3,6,12]	$\eta(x^3)^2\eta(x^6)\eta(x^{12})$		$Z(\sqrt{-6})$
[3,3,3,15]	$\eta(x^3)^3\eta(x^{15})$		$Z(\sqrt{-15})$
[2,2,10,10]	$\eta(x^2)^2\eta(x^{10})^2$	$y^2 = x(x^2+x-1)$	$\sin^2(\theta)$
[2,2,4,16]	$\eta(x^2)^2\eta(x^4)\eta(x^{16})$	$y^2 = (x+2)(x^2-2x+10)$	$Z(\sqrt{-6})$
[2,2,2,18]	$\eta(x^2)^3\eta(x^{18})$	$y^2 = x(x^2 \pm 4)$	$Z(\sqrt{-3})$
[2,4,6,12]	$\eta(x^2)\eta(x^4)\eta(x^6)\eta(x^{12})$	$y^2 = (x+1)(x^2-x+7)$	$\sin^2(\theta)$
[1,1,11,11]	$\eta(x)^2\eta(x^{11})^2$	$y^2 = x^3-12x+38$	$\sin^2(\theta)$
[1,2,7,14]	$\eta(x)\eta(x^2)\eta(x^7)\eta(x^{14})$	$y^2 = (x+11)(x^2-11x+46)$	$\sin^2(\theta)$
[1,3,5,15]	$\eta(x)\eta(x^3)\eta(x^5)\eta(x^{15})$	$y^2 = (x+7)(x^2-7x+46)$	$\sin^2(\theta)$
[1,1,1,21]	$\eta(x)^3\eta(x^{21})$	$y^2 = (x+7)(x^2-7x+14)$	$Z(\sqrt{-7})$

2. Example of η-products

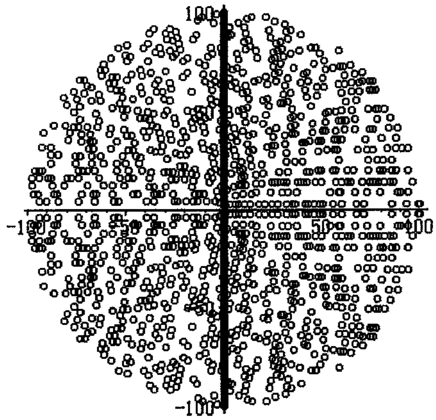
例 1. $\eta(x)^4\eta(x^2)^2\eta(x^4)^4$

$$\eta(x)^4\eta(x^2)^2\eta(x^4)^4 = \eta[1,1,1,1,2,2,4,4,4,4](x)$$

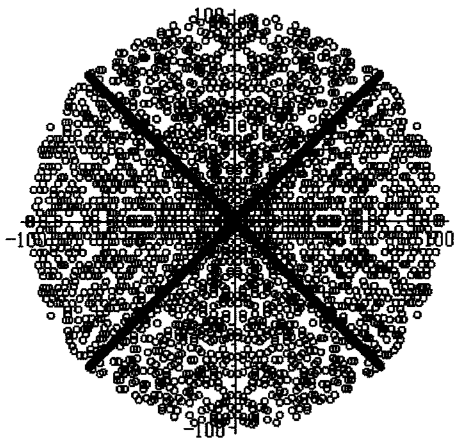
$$x-4x^2+16x^4-14x^5-64x^8+81x^9+56x^{10}-238x^{13}+256x^{16}+322x^{17}-324x^{18}-224x^{20}$$
$$-429x^{25}+952x^{26}+82x^{29}-1024x^{32}-1288x^{34}+1296x^{36}+2162x^{37}+896x^{40}-3038x^{41}$$
$$-1134x^{45}+2401x^{49}+1716x^{50}-3808x^{52}+2482x^{53}-328x^{58}-6958x^{61}+4096x^{64}$$
$$+3332x^{65}+5152x^{68}-5184x^{72}+1442x^{73}-8648x^{74}-3584x^{80}+6561x^{81}+12152x^{82}$$
$$-4508x^{85}-9758x^{89}+4536x^{90}-1918x^{97}-9604x^{98}+\cdots$$

$$a_p = \eta(x)^4\eta(x^2)^2\eta(x^4)^4[p]$$

$$p^{3/2}x^2+a_px+p^{5/2} = 0.\ p = 3\sim9973$$



$$px^4+a_px^2+p^3 = 0.\ p = 3\sim9973$$



これらの複素数根の偏角に分布は点分布と一様分布の和です。具体的には

$$x^4+a_px^2+p^4 = 0$$

p mod 4 = 1 では $Z(\sqrt{-1})$で完全分解している。また、p mod 4 = -1 では $a_p = 0$ であり、偏角は、1 の原始 8 乗根$(\pm1\pm\sqrt{-1})/\sqrt{2}$ の偏角±45° の点分布です。
以下では p mod 4 = 1 の部分のみ記す : $I = \sqrt{-1}$

$$[5, (x-4+3I)(x-4-3I)(x+4+3I)(x+4-3I)],$$
$$[13, (x+12-5I)(x+12+5I)(x-12-5I)(x-12+5I)],$$
$$[17, (x+8+15I)(x+8-15I)(x-8-15I)(x-8+15I)],$$

このように、p = ±1 mod 4 に応じて Pythagoras・Gauss 分解を与えています。

$$(x-a-bI)(x-a+bI)(x+a-bI)(x+a+bI) = x^4+2(b^2-a^2)x^2+(a^2+b^2)^2$$

であるから、

$$x^4+a_px^2+p^4 = x^4+2(a^2+b^2)x^2+(a^2+b^2)^2 = 0$$

は

$$p^2 = a^2+b^2,\ a_p = 2(b^2-a^2) = 2(p^2-2a^2).$$

例えば、p = 5 では $a_5 = 14 = 2(5^2-2*3^2)$, $5^2 = 3^2+4^2$ のようである。

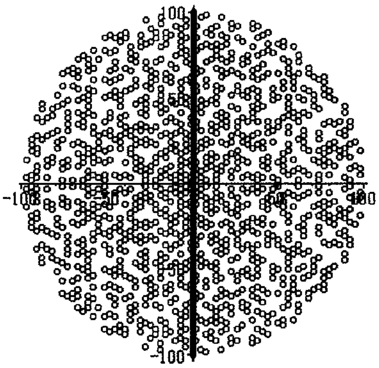
例 2. $[\eta(x^3)^3\eta(x^{15}), \eta(x^5)^3\eta(x^9), \eta(x^6)]$

これは、4 重対の

$$[2, 2 ,2 ,18], [3, 3, 9, 9], [6, 6, 6, 6]$$

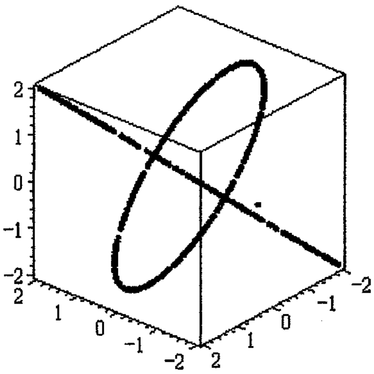
間の唯一つの 1 次元相関 triplet である。

$$\eta(x^2)^3\eta(x^{18}) =$$
$$x-3x^3+5x^7-7x^{13}-x^{19}+12x^{21}-5x^{25}-4x^{31}-x^{37}-6x^{39}+8x^{43}+18x^{49}-24x^{57}$$
$$-13x^{61}+11x^{67}+17x^{73}+15x^{75}-13x^{79}-35x^{91}+12x^{93}+5x^{97}-7x^{103}+\cdots$$
$$\eta(x^3)^2\eta(x^9)^2 =$$
$$x-2x^4-x^7+5x^{13}+4x^{16}-7x^{19}-5x^{25}+2x^{28}-4x^{31}+11x^{37}+8x^{43}-6x49-10x^{52}-x^{61}$$
$$-8x^{64}+5x^{67}-7x^{73}+14x^{76}+17x^{79}-5x^{91}-19x^{97}+10x^{100}-13x^{103}+\cdots$$
$$\eta(x^6)^4 =$$
$$x-4x^7+2x^{13}+8x^{19}-5x^{25}-4x^{31}-10x^{37}+8x^{43}+9x^{49}+14x^{61}-16x^{67}-10x^{73}-4x^{79}-$$
$$8x^{91}+14x^{97}+20x^{103}+\cdots$$
$$a_p = \eta(x^6)^4[p],$$
$$x^2+a_px+p = 0,\ p = 3\sim9973$$



$[\eta(x^2)^3\eta(x^{18})[p]/p^{1/2},\ \eta(x^3)^2\eta(x^9)^2[p]/p^{1/2},\ \eta(x^6)^4[p]/p^{1/2}]$

$p = 3\sim9973$



相関関係式は

$$x = y = z$$

$$x+y+z = 0,\ x^2+y^2+z^2 = 6 \text{ or } xy+yz+zx = -3$$

である。この triplet は 1 の原始 3 乗根 ω を含む美しい結晶体です。

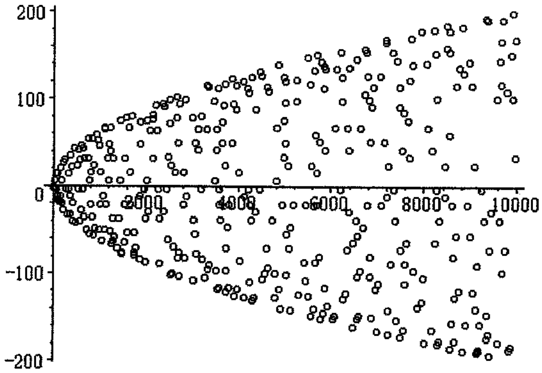
$$\eta(x^2)^3\eta(x^{18})[p]^2+\eta(x^3)^2\eta(x^9)^2[p]^2+\eta(x^6)^4[p]^2 = 6p$$

それらを 3 根とする 3 次多項式の定数項を k(p)とする：

$$(t-\eta(x^2)^3\eta(x^{18})[p])(t-\eta(x^3)^2\eta(x^9)^2[p])(t-\eta(x^6)^4[p]) = x^3-3px+pk(p)$$

このとき、[p, k(p)]を描いたものが次の図です。

$[p, k(p)],\ p = 3\sim9973$



このグラフから明確に読み取れるのは

$$|k(p)| < 2p^{1/2}$$

という Hasse の不等式である。具体的な最初の部分の数値は次のようである。

[7, -20/7], [13, 70/13], [19, -56/19], [37, -110/37], [61, -182/61], [67, 880/67], [73, -1190/73], [79, -884/79], [97, 1330/97], [103, -1820/103], [139, -2576/139], [151, -1748/151], [163, 3400/163], [181, -3458/181], [193, 1150/193], …

さて、p mod 6 = 1 の素数で

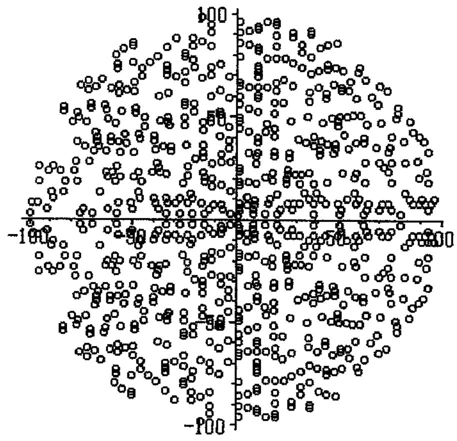
$$\eta(x^2)^3\eta(x^{18})[p]^2+\eta(x^3)^2\eta(x^9)^2[p]^2+\eta(x^6)^4[p]^2 = 6p$$

を満たす素数は,その 2/3 の確率で現れる。これらの素数に対して方程式

$$x^2+k(p)x+p = 0$$

は実数解をもたない。複素数解を図示したものが次の図である。

$x^2+k(p)x+p = 0$, $p = 3\sim9973$



偏角の分布は一様分布である。具体的には Z(√-3)での分解を与えています。

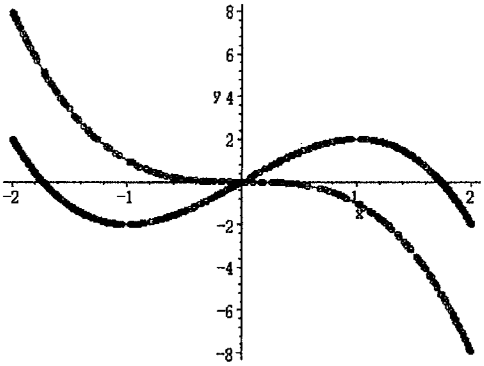
そこで、自然な方向としては、η の 4 個の積との関係を調べることですが、結果は、(当然か驚きか)この生成関数とだけ共通の相関関係をもつ。それが次の図

です。

$$k(p) = \tau([\eta(x^2)^3\eta(x^{18})[p]/p^{1/2},\ \eta(x^3)^2\eta(x^9)^2[p]/p^{1/2},\ \eta(x^6)^4[p]/p^{1/2}])$$

$$[\eta(x^2)^3\eta(x^{18})[p]/p,\ k(p)]/p^{1/2} = [\eta(x^3)^2\eta(x^9)^2[p]/p,\ k(p)]/p^{1/2} =$$

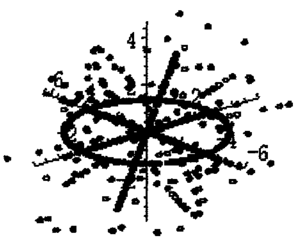
$$[\eta(x^6)^4[p]/p,\ k(p)]/p^{1/2} = \{y = -x^3,\ y = -x(x^2-3)\},\ p = 3\sim 9973$$



上記の代数的な相関図は p を素数(prime number)に制限したものですが、一般の自然数の範囲で考えた場合を記しておきましょう。

$$[\eta(x^2)^3\eta(x^{18})[n]/n^{1/2},\ \eta(x^3)^2\eta(x^9)^2[n]/n^{1/2},\ \eta(x^6)^4[n]/n^{1/2}]$$

$$p = 3,4,5,6,\cdots,5000$$



このように、素数という制限を除くと、多くの、曲線群や点の群れが現れる。

例 3. $[\eta(x)^2\eta(x^2)\eta(x^5)^2\eta(x^{10}),\ \eta(x^3)^5\eta(x^6)^2,\ \eta(x^4)^6]$

これは 6-tuple の 3-tuple(triplet)

$$[1,1,2,5,5,10],\ [3,3,3,3,6,6],\ [4,4,4,4,4,4]$$

に関するものです。

$$\eta(x)^2\eta(x^2)\eta(x^5)^2\eta(x^{10}) =$$

$$x-2x^2-2x^3+4x^4+x^5+2x^7-9x^9-6x^{10}+8x^{12}+12x^{13}+10x^{15}-16x^{16}-8x^{17}+2x^{18}+4x^{20}-22x^{23}$$

$$-19x^{25}+48x^{26}+4x^{27}-8x^{28}+42x^{29}-32x^{32}-32x^{34}-10x^{35}-36x^{36}+12x^{37}+64x^{40}-18x^{41}$$

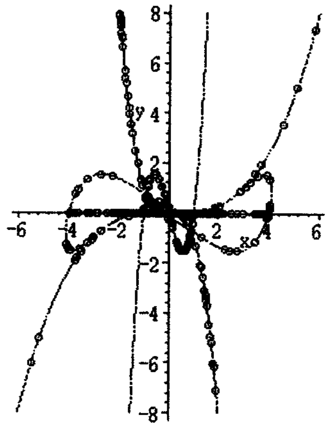
$$+16x^{42}+38x^{43}-9x^{45}+2x^{47}+32x^{48}-49x^{49}-66x^{50}+48x^{52}-28x^{53}-20x^{58}-40x^{60}+22x^{61}$$
$$+14x^{63}+64x^{64}+132x^{65}-58x^{67}-32x^{68}-64x^{72}-48x^{73}+48x^{74}-50x^{75}-16x^{80}+81x^{81}-44x^{82}$$
$$+38x^{83}-88x^{85}+44x^{87}-78x^{89}+134x^{90}+88x^{92}+72x^{97}+82x^{98}-76x^{100}-\cdots$$
$$\eta(x^3)^5\eta(x^6)^2 =$$
$$x-4x^4+16x^{10}-10x^{13}-16x^{16}+39x^{25}-32x^{34}-70x^{37}+64x^{40}+49x^{49}+40x^{52}-80x^{58}$$
$$-2^*x^{61}-64x^{64}+110x^{73}+160x^{82}-128x^{85}-130x^{97}-156x^{100}+112x^{106}+\cdots$$
$$\eta(x^4)^6 =$$
$$x-6x^5+9x^9+10x^{13}-30x^{17}+11x^{25}+42x^{29}-70x^{37}+18x^{41}-54x^{45}+49x^{49}+90x^{53}$$
$$-22x^{61}-60x^{65}-110x^{73}+81x^{81}+180x^{85}-78x^{89}+130x^{97}-198x^{101}-\cdots$$

これらの値を根とする3次多項式

$$(x-\eta(x)^2\eta(x^2)\eta(x^5)^2\eta(x^{10})[p]/p)(x-\eta(x^3)^5\eta(x^6)^2[p]/p)(x-\eta(x^4)^6[p]/p)$$
$$= x^3+ax^2+bx+c$$

の係数の 3 重対[a,b,c]の全体像は(1 つの視点からではあるが) 下の紐飾りのような図形である。

$$[a,c],\ p = 3\sim4999$$
$$y = -x^3,\ y = 4x(x^2-1),\ y = x^3/27,$$
$$4913y^2-376x^3y+4216yx+16x^6-288x^4+528x^2-256$$
$$= (2^8(x^2-17)(13x^2+17)^2+(17^3y-2^2\cdot 47x^3+2^2\cdot 31\cdot 17x)^2)/17^3 = 0$$



リボン(ribbon)の部分のやや複雑な式の由来は次のようです。

元の3次元図形では $4x^2+y^2 = 4$ の条件付で[x, y, z], z= ±y, 0 のように表示できる点に着目して見ましょう。最初の楕円の表示で[x, y] = [-1, 0]を選んで助変数 t で表示すると、例えば、[x, y, y]の場合は

$$x = -(t^2-4)/(4+t^2),\ y = 8t/(4+t^2),\ z = 8t/(4+t^2)$$

と表示できる。$s = x+y+z$, $r = xyz$ はそれぞれ[x, y, z]を根にもつ3次多項式の2次の係数と定数項です。

$$s-(x+y+z),\ r-xyz$$

に x, y, z を代入すると、

$$[(4s+st^2-4+t^2-16t)/(4+t^2),\ (64r+48rt^2+12rt^4+rt^6-256t^2+64t^4)/(4+t^2)^3]$$

が得られます。s, r の関係としてはこれらの分子から t を消去すればよい訳です。ⓣとして変数 t に関する終結式(resultant)としますと

$$4s+st^2-4+t^2-16t ⓣ 64r+48rt^2+12rt^4+rt^6-256t^2+64t^4$$
$$=2^{18}(4913r^2-376s^3r+4216rs+16s^6-288s^4+528s^2-256)$$

が得られます。

最初、「甘く見て」簡単に「目の子」で方程式を探し、リボンの紐解きに「やや手こずる」ことがあって、「こら元からやり直さなあきまへん」と思ったこともあってここに記しました。要するに手探りには少し「複雑過ぎた」と反省した訳です。

以下の図は、素数次の 3 重対の空間表示です：

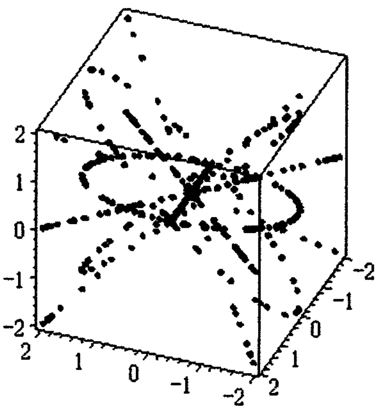
$$[x, y, z] = [\eta(x)^2\eta(x^2)\eta(x^5)^2\eta(x^{10})[p],\ \eta(x^3)^5\eta(x^6)^2[p],\ \eta(x^4)^6[p]]/p$$

とすると

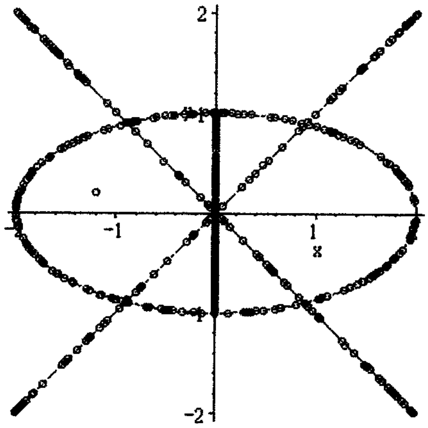
$$4x^2+y^2 = 4,\ y(y+z)(y-z) = 0$$

が成立する。xyz-空間の曲面の交わり、つまり、曲線(1 次元)の集合上に分布しています。

$$[\eta(x)^2\eta(x^2)\eta(x^5)^2\eta(x^{10})[p],\ \eta(x^3)^5\eta(x^6)^2[p],\ \eta(x^4)^6[p]]/p,\ p = 3\sim4999$$



$[\eta(x)^2\eta(x^2)\eta(x^5)^2\eta(x^{10})[p],\ \eta(x^3)^5\eta(x^6)^2[p]]/p,\ p = 3\sim4999$



ここで知られた関係には二組の(twin)六つ子(sestet, 6-tuplet, hexa-tuplet)が存在していたことです。2019.11.26.09.49

[[4,4,8,8], [4,4,4,12], [1,1,2,5,5,10],
[4,4,4,4,4,4], [3,3,3,3,6,6], [1,1,1,1,2,2,4,4,4,4]]

および

[[3,3,9,9], [6,6,6,6], [2,2,2,18], [1,1,1,3,9,9], [2,2,2,6,6,6], [3,3,3,3,3,3,3,3]]

の二組です。現実には、二つの最後のピース(piece)が見つかったときには「"ヤッパ" こんなのもあるんだ」といった感じであった。[1,1,1,3,9,9]を yappa, [1,1,2,5,5,10]を atta と名付ける。

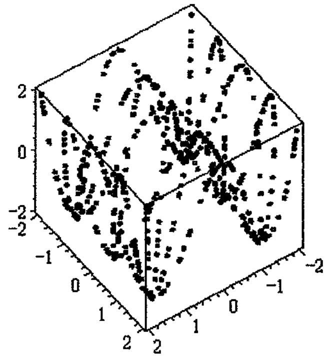
みつよついつつ　むつみなれにし　みはなだひも
かがみのつまに　ときつむすびつ
(見つ依つ居つつ　睦み慣れにし　水標紐　鑑の端に　解きつ結びつ)

上組は Z($\sqrt{-1}$)(ガウス整数,Gaussean Integer)に関係し、下組は Z($\sqrt{-3}$)(アイゼンスタイン整数, Eisenstein Integer)に関係しています。つまり、1 の原始 4 乗根と原始 3 乗根です。

上記の組の何れの場合も、その中のどの 3 個を取り出しても必ず 1 次元の代数的な相関関係(R^3 の独立な x,y,z の 2 つの関係式がある)、あるいは、その組全体にわたる 1 つの変数 t に関する助変数表示(parametric representation)が可能です。

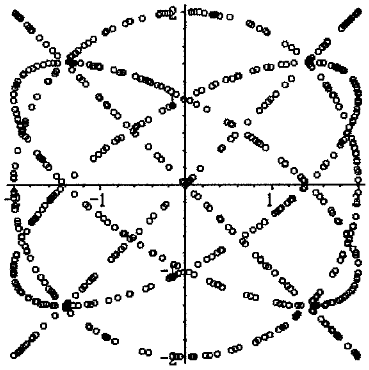
例 4.　[4,4,8,8], [4,4,4,12], [1,1,1,1,2,2,4,4,4,4]

$[\eta(x^4)^2\eta(x^8)^2[p]/p^{1/2}, \eta(x^4)^3\eta(x^{12})[p]/p^{1/2}, \eta(x)^4\eta(x^2)^4\eta(x^4)^4[p]/p^2]$, p = 3~9973



$[\eta(x^4)^2\eta(x^8)^2[p]/p^{1/2},\ \eta(x^4)^3\eta(x^{12})[p]/p^{1/2}],\ p = 3\sim 9973$

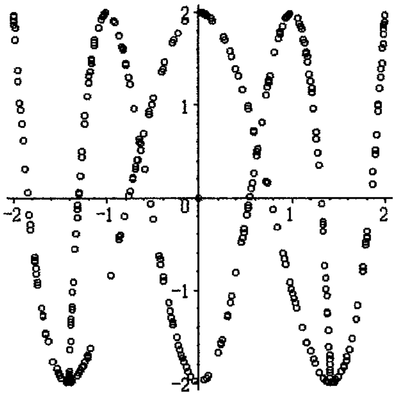
$(x+y)(x-y)(x^2+y^2-4)(4x^2-4xy+2y^2-4)(4x^2+4xy+2y^2-4)$



この場合の相関関係は

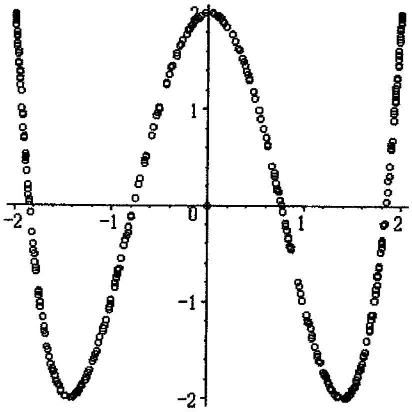
$[\eta(x^4)^3\eta(x^{12})[p]/p^{1/2},\ \eta(x)^4\eta(x^2)^4\eta(x^4)^4[p]/p^2],\ p = 3\sim 4999$

$(2-4x^2+x^4-y)(2-8x^2+4x^4+y)$



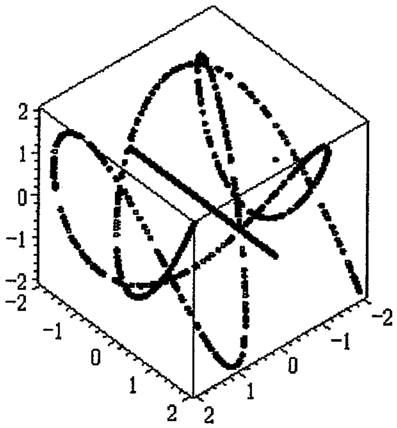
$[\eta(x^4)^2\eta(x^8)^2[p]/p^{1/2},\ \eta(x)^4\eta(x^2)^4\eta(x^4)^4[p]/p^2],\ p = 3\sim 4999$

$2-4x^2+x^4-y$



例 5. [2,2,2,18], [1,1,1,3,9,9], [3,3,3,3,3,3,3,3]

$[\eta(x^2)^3\eta(x^{18})[p]/p^{1/2},\ \eta(x)^3\eta(x^3)\eta(x^9)^2[p]/p,\ \eta(x^3)^8[p]/p^{3/2}]$, $p = 3\sim9973$



例 6. 二つの(極大?)三つ子

これは、

[3,7,7,7], [1,1,1,21], [1,1,1,7,7,7]

[3,3,3,15], [5,5,5,9], [3,3,3,5,5,5]

の triplet の双子(twin)です。

$$\eta(x^3)\eta(x^7)^3 = \eta[3,7,7,7](x) =$$

$$x-x^4-x^7-3x^8+3x^{11}+3x^{14}+x^{16}+6x^{22}-3x^{23}-5x^{25}-5x^{28}-3x^{29}+4x^{37}-$$
$$2x^{43}+3x^{44}+6x^{46}+7x^{49}+3x^{53}-12x^{58}-7x^{64}-4x^{67}+9x^{71}-12x^{74}-$$
$$9x^{77}+8x^{79}+6x^{86}+12x^{88}+9x^{92}+5x^{100}-12x^{106}-9x^{107}+4x^{109}+\cdots$$

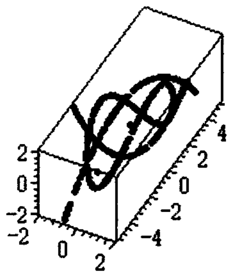
$$\eta(x)^3\eta(x^{21}) = \eta[1,1,1,21](x) =$$

$$x-3x^2+5x^4-7x^7+9x^{11}-11x^{16}+12x^{22}+3x^{23}-5x^{25}+7x^{28}-15x^{29}-9x^{32}+28x^{37}$$

$$-14x^{43}+3x^{44}-24x^{46}+7x^{49}+15x^{50}-9x^{53}+21x^{56}-6x^{58}-13x^{64}-4x^{67}+15x^{71}$$
$$-21x^{77}+8x^{79}+42x^{88}-27x^{92}-21x^{98}-25x^{100}+30x^{106}-3x^{107}+28x^{109}+\cdots$$

$$\eta(x)^3\eta(x^7)^3 = \eta[1,1,1,7,7,7](x) =$$
$$x-3x^2+5x^4-7x^7-3x^8+9x^9-6x^{11}+21x^{14}-11x^{16}-27x^{18}+18x^{22}+18x^{23}+25x^{25}-35x^{28}$$
$$-54x^{29}+45x^{32}+45x^{36}-38x^{37}+58x^{43}-30x^{44}-54x^{46}+49x^{49}-75x^{50}-6x^{53}+21x^{56}$$
$$+162x^{58}-63x^{63}-91x^{64}-118x^{67}+114x^{71}-27x^{72}+114x^{74}+42x^{77}-94x^{79}+81x^{81}$$
$$-174x^{86}+18x^{88}+90x^{92}-147x^{98}-54x^{99}+125x^{100}+18x^{106}+186x^{107}+106x^{109}+\cdots$$

$$[\eta(x^3)\eta(x^7)^3[p]/p^{1/2},\ \eta(x)^3\eta(x^{21})[p]/p^{1/2},\ \eta(x)^3\eta(x^7)^3[p]/p],\ p = 3\sim9973$$



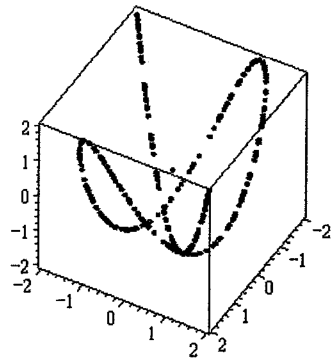
この図は見てのとおり、[-2,2]^{3}の中に収まってない。3 個の連結成分から成っている。

$$\eta(x^3)^3\eta(x^{15}) = \eta[3,3,3,15](x) =$$
$$x-3x^4+5x^{10}-x^{16}-4x^{19}-5x^{25}+8x^{31}+10x^{34}-5x^{40}-20x^{46}+7x^{49}+2x^{61}$$
$$+13x^{64}+12x^{76}-16x^{79}-10x^{85}-20x^{94}+15x^{100}+10x^{106}+14x^{109}+\cdots$$

$$\eta(x^5)^3\eta(x^9) = \eta[5,5,5,9](x) =$$
$$x-3x^6-x^{10}+3x^{15}+5x^{16}-x^{19}+3x^{24}-5x^{25}-7x^{31}-5x^{34}+7x^{40}+x^{46}+7x^{49}+6x^{51}$$
$$-9x^{60}+5x^{61}+x^{64}-12x^{69}-18x^{76}+5x^{79}+11x^{85}+4x^{94}+9x^{96}+13x^{106}-x^{109}+\cdots$$

$$\eta(x^3)^3\eta(x^5)^3 = \eta[3,3,3,5,5,5](x) =$$
$$x-3x^4-3x^6+9x^9+5x^{10}-15x^{15}+5x^{16}-22x^{19}+21x^{24}+25x^{25}+2x^{31}-14x^{34}-27x^{36}$$
$$-35x^{40}+34x^{46}+49x^{49}+42x^{51}-27x^{54}+45x^{60}-118x^{61}+13x^{64}-102x^{69}+66x^{76}$$
$$+98x^{79}+81x^{81}-70x^{85}+45x^{90}-14x^{94}-99x^{96}-75x^{100}-86x^{106}-22x^{109}+\cdots$$

$$[\eta(x^3)^3\eta(x^{15})[p]/p^{1/2},\ \eta(x^5)^3\eta(x^9)[p]/p^{1/2},\ \eta(x^3)^3\eta(x^5)^3[p]/p],\ p = 3\sim9973$$



この図は見てのとおり$[-2,2]^3$の中に収まっている。

例 7. 一次元代数的 triplet が(今のところ私には)見当たらない場合

$$[1,1,2,20],\ [4,5,5,10]$$

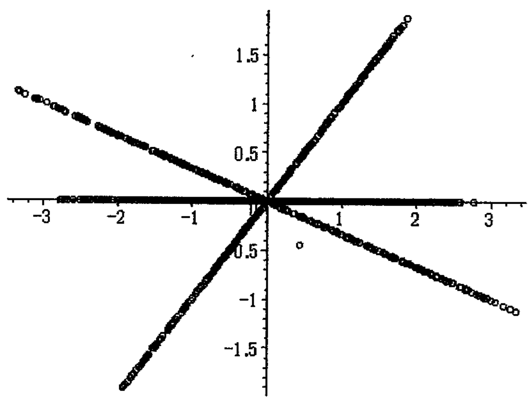
$$\eta(x)^2\eta(x^2)\eta(x^{20}) = \eta[1,1,2,20](x) =$$

$$x-2x^2-2x^3+4x^4+x^5+2x^6-2x^7-4x^8-x^9-4x^{10}+6x^{11}+6x^{14}+4x^{15}-4x^{16}-4x^{17}+2x^{18}-6x^{19}$$
$$-6x^{21}+4x^{22}+2x^{23}-4x^{24}+3x^{25}+8x^{27}+8x^{28}-2x^{30}-4x^{31}+4x^{33}-12x^{34}-12x^{35}-4x^{36}+12x^{37}$$
$$-4x^{38}+8x^{40}+4x^{42}+6x^{43}-x^{45}-6x^{46}-6x^{47}+8x^{48}+x^{49}+14x^{50}-12x^{51}-8x^{53}-8x^{54}-2x^{55}$$
$$+12x^{56}-4x^{57}+18x^{59}-16x^{60}+6x^{61}-8x^{62}+2x^{63}-8x^{64}+12x^{66}-6x^{67}-16x^{68}+6x^{69}+2x^{70}$$
$$+12x^{71}+4x^{72}-4x^{73}+12x^{74}+14x^{75}-12x^{77}+4x^{79}+4x^{80}-5x^{81}-14x^{83}-24x^{85}-6x^{86}$$
$$-8x^{88}+6x^{89}+4x^{90}-8x^{92}+8x^{93}+18x^{94}+2x^{95}+16x^{96}+4x^{97}-2x^{98}-6x^{99}+12x^{100}+\cdots$$

$$\eta(x^4)\eta(x^5)^2\eta(x^{10}) = \eta[4,5,5,10](x) =$$

$$x-x^5-2x^6-x^9+2x^{10}-2x^{11}+2x^{14}+2x^{15}+4x^{16}+2x^{19}-4x^{20}+2x^{21}-4x^{24}-x^{25}-2x^{30}$$
$$-4x^{31}-4x^{34}+2x^{35}+4x^{40}+8x^{44}+x^{45}-2x^{46}+x^{49}+4x^{50}+4x^{51}+8x^{54}-6x^{55}-4x^{56}$$
$$-6x^{59}-2x^{61}-8x^{64}+4x^{66}-2x^{69}-6x^{70}+12x^{71}-12x^{74}-4x^{75}-8x^{76}+4x^{79}+4x^{80}$$
$$-5x^{81}+8x^{84}+4x^{85}+6x^{86}+6x^{89}-2x^{90}+6x^{94}+6x^{95}+2x^{99}-8x^{101}+\cdots$$

$$[\eta(x)^2\eta(x^2)\eta(x^{20})[p]/p^{1/2},\ \eta(x^4)\eta(x^5)^2\eta(x^{10})[p]/p^{1/2}],\ p = 3\sim 9973$$



$$y(x-y)(x+3y)$$

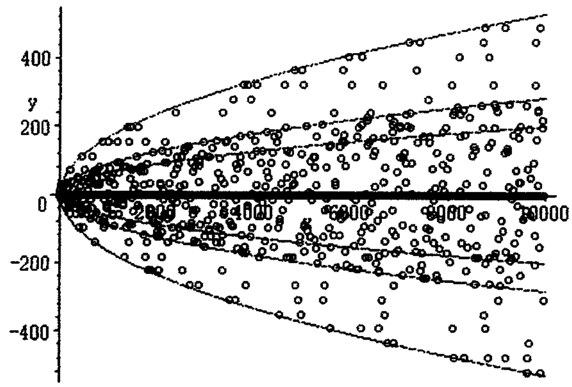
3.　$\eta(x)^3\eta(x^{21}) = \eta[1,1,1,21](x)$の話

以下の話は、例を$\eta(x)^3\eta(x^{21})$にとった場合の係数の分布に関するものです。$\eta(x)^3\eta(x^{21})$のx^pの係数a_pを

$$a_p = \eta(x)^3\eta(x^{21})[p]$$

のように略記する。$[p, a_p]$を 10000 の範囲の素数 p について表示したものが次の図である。

$$[p, a_p] = [p, \eta(x)^3\eta(x^{21})[p]],\ p = 3 \sim 9973$$
$$y^2 = 4x,\ 8x,\ 28x$$



この図からも、複数の双曲線を境界線として分布の濃度が変化しているのが分ると思う。少し唐突なのだけれども

$$[x^2+a_px+p,\ x^2+a_px+2p,\ x^2+a_px+7p]$$

は$p \bmod 7 = 1, 2, 4$のとき、つまり、p が 7 での平方(剰余)のとき、上記の 3 多項式の唯一つが$Z(\sqrt{-7})$で分解する。言い換えれば判別式を-7 で割ったものが平方数であること、$4p = a_p{}^2+7b^2$ が整数解、あるいは$b^2 = (4p-a_p{}^2)/7$ が(平方)整数解をもつことである。現実には$Z(\sqrt{-1},\sqrt{7})$と$Z(\sqrt{-7})$での分解で既約でない素数を 500 までの範囲で求めてみると次のようである。

$$x^2+a_px+p$$
$$u_1 = [67, 79, 127, 163, 277, 373, 421, 463]$$
$$x^2+a_px+2p$$
$$u_2 = [7, 11, 23, 29, 53, 71, 107, 113, 137, 149, 179, 191, 197, 233, 239,$$
$$263, 277, 281, 317, 347, 359, 373, 389, 401, 431, 443, 449, 491]$$
$$x^2+a_px+7p$$
$$u_3 = [37, 43, 109, 151, 193, 211, 331, 337, 379, 457, 487, 499]$$

この場合、x^2+a_px+p, x^2+a_px+2p が同時に分解する場合、$p = 277, 373$ がある。

$$[p,\ 4p-a_p^2,\ 8p-a_p^2,\ 28p-a_p^2]$$

$$[277,\ 2^4\cdot 3^2\cdot 7,\ 2^2\cdot 23^2,\ 2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 29],\ [373,\ 2^4\cdot 3^2\cdot 7,\ 2^2\cdot 5^4,\ 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 83)]$$

この場合、$8p-a_p^2$ 自身が平方数になっている場合である。しかし、これは

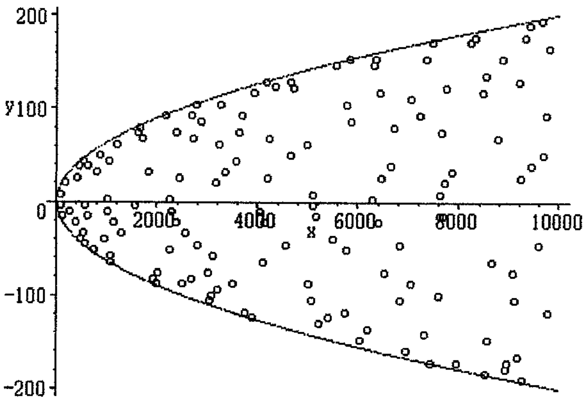
$$Z(\sqrt{-1},\ \sqrt{7}),\ Z(\sqrt{-7})$$

での分解で差のでる場合、つまり、$Z(\sqrt{-1})$ですでに分解する場合である。

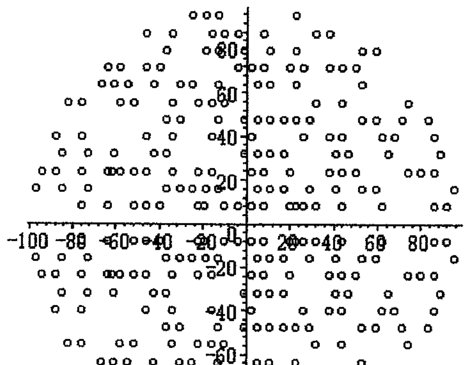
$$[(4p-a_p^2)/7,\ (8p-a_p^2)/7,\ (28p-a_p^2)/7]$$

の唯一つが成立するという場合分けである。

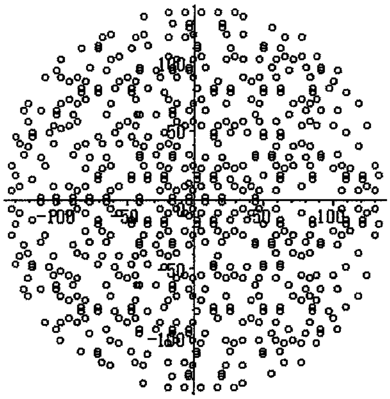
$4p = a_p^2+7b^2$, $[p,a_p]$, $p = 67, 79, 127, \cdots < 10000$



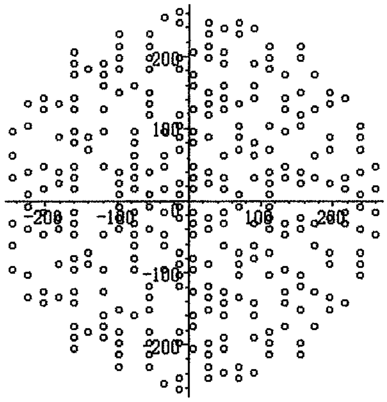
$4p = a_p^2+7b^2$, $x^2+a_px+p = 0$, $p = 67, 79, 127, \cdots < 10000$



$8p = a_p^2+7b^2$, $x^2+a_px+2p = 0$, $p = 7, 11, 23, 29, \cdots < 10000$



$28p = a_p^2+7b^2, x^2+a_p x+7p = 0, p = 37, 43, 109, \cdots < 10000$

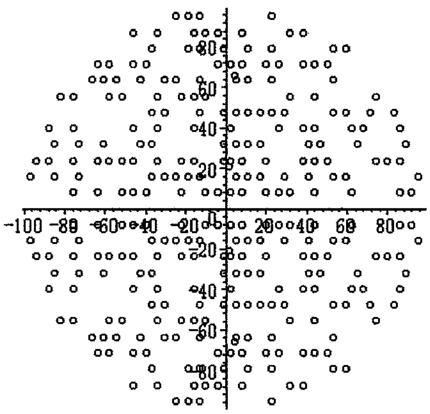


これらのすべての偏角の分布はすべて一様分布である。また、個別に

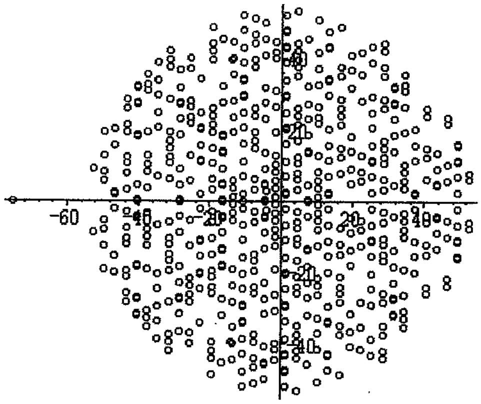
$$b_p = \eta(x^3)\eta(x^7)^3[p]$$

とするとき、

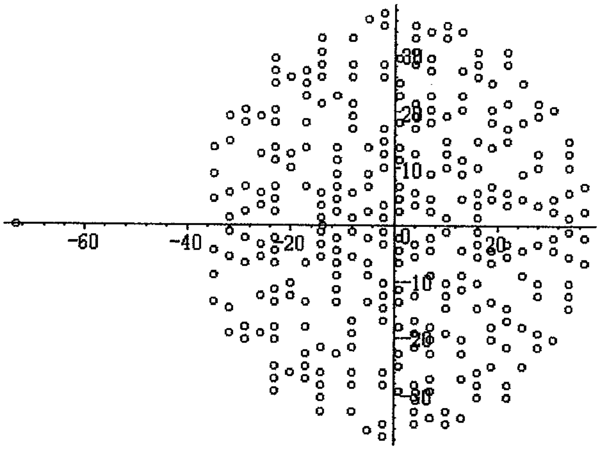
$4p = a_p^2+7b^2, x^2+b_p x+p = 0, p = 67, 79, 127, \cdots < 10000$



$8p = a_p^2+7b^2, x^2+b_p x+2p/7 = 0, p = 7, 11, 23, 29, \cdots < 10000$

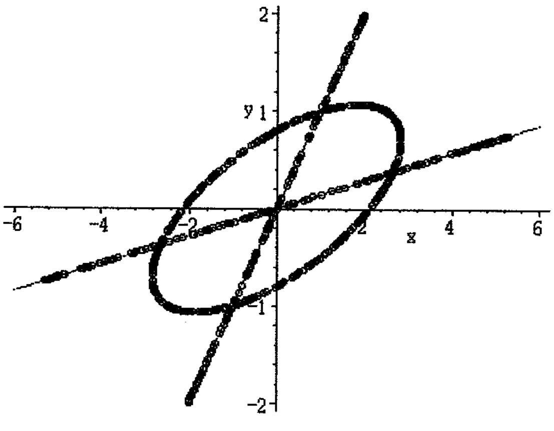


$28p = a_p^2+7b^2, x^2+b_px+p/7 = 0, p = 37, 43, 109, \cdots < 10000, p \neq 7001$

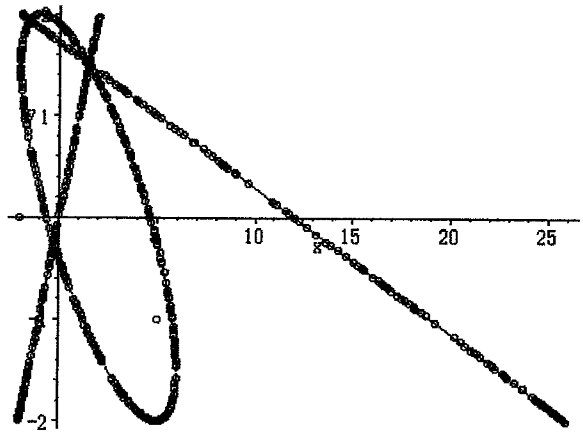


$[x, y] = [\eta(x)^3\eta(x^{21})[p]/p^{1/2}, \eta(x^3)\eta(x^7)^3[p]/p^{1/2}], p = 3\sim9973$

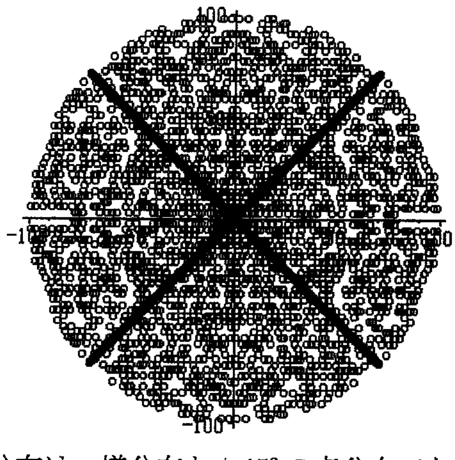
$(x-y)(7y-x)(2x^2-7xy+14y^2-9) = 0$



$$[x, y] = [\eta(x)^3\eta(x^{21})[p]/p^{1/2},\ \eta(x)^3\eta(x^7)^3[p]/p]$$
$$[2-x^2, y],\ p = 3\sim 9973$$
$$(y-x)(12-x-7y)(x^2+3xy+4y^2-4x-6y-3)$$



$$t^4-\eta(x)^3\eta(x^7)^3[p]t^2+p^2 = 0,\ p = 3 \sim 9973$$



この複素数の偏角の分布は一様分布と±45° の点分布である。以上の考察は特性方程式の複素根の偏角の分布が本質的には一様分布のものに限られたものである。当然のことであるがより一般の偏角の場合に拡張が望まれている。

References

[1] 難波完爾: Dedekind η 関数と佐藤 sin²-予想, 第 16 回 数学史シンポジウム(2005), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 27, 2006, pp.95-140

[2] 難波完爾: 楕円曲線と整級数算術幾何平均について, 第 29 回 数学史シンポジウム(2018), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 40, 2019, pp.49-68