『孫子算経』「今有物不知其數三三之剰二五五數之剰三七七數之剰二問物幾何」はどのようにヨーロッパに伝播し，西洋の数学に影響を与えたか？

宮田　義美

神奈川県横浜市上末吉 2-11-16

yoshimi5@sf.netyou.jp

2019 年 9 月 26 日

目 次

第1章　序論

古代中国の数学の問題とその解法が中国からヨーロッパに伝播し，現代の数学に影響を与えた『孫子算経』の「物不知数」が「中国剰余定理」,「孫子の剰余定理」等として初等整数論に登場することがある．この「中国剰余定理」,「孫子の剰余定理」等は，不定解析，合同式の理論として知られる．ここでは「中国剰余定理」と名称を統一することにする．

この「中国剰余定理」がヨーロッパで認知されるようになった経緯を考察することにする．この「中国剰余定理」がヨーロッパに知られるようになったきっかけは清国がアヘン戦争に敗北し，イギリス人宣教師のアレキサンダー・ワイリーがその問題と解法をヨーロッパに伝えたことである．古代中国の数学書の問題とその解答が，現代の数学へ影響を与えた稀有な例でないかと考えられる．

銭宝　編「中国数学史」には

> 1842 年アヘン戦争に敗北すると，清朝政府はイギリス侵略軍あと南京条約を結び，上海，広州などの五つの沿海都市を通商港として開放し，雍正元年以来の鎖国政策を終熄させた　．イギリス人は上海などの開港場を基地として，中国人民にたいして経済的略奪をほしいままにし，かさねて文化的侵略にもたずさわった．ワイリー偉烈亜力(Alexander Wylie 1815-1887 年) は，1847 年に上海にいたり，墨海書館を経営する．かれは中国の言語文字に習熟するや，漢文をもって＜＜数学啓蒙＞＞二巻を撰し [1853年]，当時西洋で行われていた算術代数知識を中国に紹介した．そこには対数や数字方程式の解法のホーナー法が含まれている．[1]

> さてヨーロッパの十八世紀には，オイラー [L.Euler1707-1782 年] やラグランジュ[J.Lagrange1736-1813 年] などが一次合同式の研究に従事した．ついでドイツの数学者ガウス [K.F.Gauss,1777-1855 年] が 1801 年に出版の＜＜算術探求＞＞において，はっきりと上述の定理を記した．当時，ヨーロッパの数学者たちは中国古代数学にたいしていくばくの知識もなく，ガウスなどが独自な研究をへて自らの成果に到達したことはいうまでもない．だが 1852 年に，イギリス人宣教師アレキサンダー・ワイリー偉烈亜力（Alexander Wylie 1815-1887 年) が＜＜孫子算経＞＞ ”物不知数 ”題の解法をヨーロッパに伝え，1874 年に，マッティセン [L.Matthissen] が孫子の解法とガウスの定理の符合を指摘するや，欧文の数学史ではこの定理を ”中国剰余定理 ”(Chinese Remainder Theorem) と通称している．[2]

---

[1]銭宝　編　川原秀城訳　「中国数学史」1990 年 2 月 20 日印刷　1990 年 2 月 28 日発行　みすず書房　p334
[2]銭宝　編　川原秀城訳　「中国数学史」1990 年 2 月 20 日印刷　1990 年 2 月 28 日発行　みすず書房 p85

1.1　李迪著　「中国の数学通史」の『孫子算経』

李迪の「中国の数学通史」には

> 現存する『孫子算経』三巻は，おそらく祖冲之(そちゅうし)より前に書かれた．本書の序文には数学の用途について記してあって，数学が天文・測量・度量衡などの用いられていると認めている他方，数学は「神祇天の神と地の神の所在を採り，成敗の符験証拠を極める」と述べているが，これは一種の迷信思想である．
>
> 『孫子算経』の内容は『九章算術』のように豊富でしかも深奥なものでない．その多くは初歩的内容で，たとえば位取り，九九口訣，四則演算などが詳しく記述してある．各種の食糧交換の比例問題などがあるが，これは『九章算術』から採り入れたものである．本書の大部分は日常生活の応用問題に属する内容であるから，啓蒙的な算術入門書といってよい．そして，最も価値ある内容は，籌算法 [算木計算方法] と”物不知数 ” [物の数をしらない] 問題である．
>
> 『孫子算経』は詳細に籌算法を記述した書で，巻上に「凡そ算の法といえば，先ずその位を識す．一は縦十は横，百は立て千は僵(たお)す．千と十は相望み，万と百は相当する」と，算木の置き方について述べている．同時に，算木による乗法と除法の手順を詳細に記述している．これらの算木計算については，第 1 章で述べたので重複をさけての述べない．[3]

1.2　ジョゼフ・ニーダム著「中国の科学と文明」第 4 巻数学

ジョゼフ・ニーダム著「中国の科学と文明」第 4 巻数学には次のようにある．

> (4)　不定解析および不定方程式
>
> 中国の数学の文献の調査では，しばしば不定解析について言及されている．n 個より多くの変数を含む n 個の方程式が与えられたとき，無限個の解の集合が考えられる．もちろん，問題によっては，解として正の整数のみが要求される場合が起こるかもしれない．不定解析は，少なくとも＋ 4 世紀ごろから常に中国の顕著な数学的関心であった.『孫子算経』には次の問題が記されている．
>
> いくつかの品物がある．しかし，その確かな数はわからない．それらを 3 個ずつかぞえれば 2 個余り，5 個ずつ数えれば 3 個余る．また，7 個ずつ数えれば 2 個余る．品物の数はいくらあるか？
>
> 今有物，不知其数，三三數之．剩二．五五數之，剩三．七七數之．剩二．　問物幾何 [孫子算経，巻下，十葉裏]
>
> 孫子は ’用数 ’70，21 および 15 をきめた．これらは，それぞれ $5 \times 7, 3 \times 7, 3 \times 5$ の倍数であり，またそれぞれ，3,5,7 で割ると 1 余る数である．和 $2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233$

[3] 李迪著　大竹茂雄・陸人瑞(りくじんずい)訳「中国の数学通史」2002 年 6 月 28 日第 1 版第 1 刷発行　森北出版 p106-107

を得る．これは，孫子の記したただひとつの問題であった．現代の記号を使えば次のように表わされるだろう．

$$N \equiv 2(mod \quad 3), \equiv 3(mod \quad 5), \equiv 2(mod \quad 7)$$

不定解析は数学史家から多くの注意を引いた．ワイリー (Wylie,4) はそれについて数頁さいているし，また李厳と銭宝　の論文は最良の論文である．[4]

この「中国剰余定理」の記述は，コーヘンの『連続体仮説』「§７．原始帰納関数」に登場する．また上野健爾著『代数入門１』[5]等にある．

[4]ジョゼフ・ニーダム著　東畑精一/薮内清監修　芝原茂/吉沢保枝/中山茂/山田慶児訳「中国の科学と文明」第 4 巻数学　1991 年 8 月 20 日新版第 1 刷発行　思索社　p131

[5]岩波講座　現代数学への入門２『代数入門１』1995 年 11 月 6 日発行　岩波書店　p28-34

第 2 章　『孫子算経』とは

2.1　『史記』「孫子・呉起列伝第五の孫子」

日本では,「孫子」といえば「孫子の兵法」として知られる孫武のことであるが,『孫子算経』の「孫子」とは別人である．

『史記』「孫子・呉起列伝第五」には

> 孫子—-孫武は，斉の人である．兵法にすぐれているということで呉王闔廬に謁見した．そのとき，闔廬が言った．
>
> 「そなたの著した十三篇の書は，ことごとく読んだ．ちょっと試しに実際に練兵してみせてくれるか」
> 「結構です」
> 「兵は婦人でもよいか」
> 「はい」
> そこで，闔廬は練兵をおこなわせることにして，宮中の美女百八十人をかりだした．孫子はそれを二隊にわけ，王の寵愛している姫二人を隊長とし，一同に戟をもたせて，命令して言った．[1]

とある．

2.2　数学史における 孫子

李厳著『支那数学史』には

> 21.　孫子算経
>
> 孫子は孫子算経三巻（隋書経籍志は二巻に作る）を著したが，何時頃の人であるか明白でない．清朝の戴震は，その記事に長安と洛陽との距離や佛書二十九章の語があるので，漢明帝以後の人の作と断定している．阮元は記事に基盤の面が十九道とあるので，亦漢以後の人に擬している．籌位については縦横布算の意味を審らかにしている．また九九は，九九に始まり一一に終わっている．下巻には「物不知数」なる問題を記しているが，之は大衍求一術の起源で，何れも他書のまだ及ばない所である．
>
> 古い数学書の中，周髀算経，九章算術を除いては，孫子算経が最古とすべきである．敦煌石室算経一巻并序の内に「萬々を億，萬々億を兆，萬々兆を京と曰い，此等より上

[1]『史記』（中）中国古典文学大系全 60 巻　1969 年 10 月 5 日初版第 1 刷発行　1994 年 3 月 18 日初版第 21 刷発行　訳者　野口定男　平凡社　p174

> は，順次に，該，梓(し)，譲，溝，澗，政，載，極と曰う．みな孫子の数と称している」とある．夏侯陽算経序にも「五曹，孫子など, 著作ますます多い」とあり，張丘建算経序にも「夏侯陽の方倉，孫子の蕩杯(とうはい)」なる語があるから，孫子なる人は晩くとも夏侯陽，張丘建の前である．[2]

銭宝　編は「中国数学史」で

> 唐の初年に ”算学 ”の教科書に採用された＜＜孫子算経＞＞，＜＜夏侯陽算経＞＞，＜＜張丘建算経＞＞の三冊は，四, 五世紀の数学書である．考証資料があまりにも少ないので，これらの三冊の作者の履歴や著作年代はいずれもはっきりしない．[3]

以上の事から『孫子算経』の著者である「孫子」は，生没年代は明らかでないが少なくとも四, 五世紀頃に生存していたと考えられている.『史記』「孫子・呉起列伝第五」に記されている「孫子」は戦国時代・紀元前 5 世紀ごろの人である.

さて,『孫子算経』どのように伝えられてきたのか？

中国歴代王朝では漢代からその王朝の歴史書を編纂する伝統があり，その最初に位置するのが, 漢の司馬遷が編纂した『史記』がある.『史記』は全百三十巻（「本紀」十二巻,「表」十巻,「書」八巻,「世家」三十巻,「列伝」七十巻）である.

李厳の「支那数学史」からみることにする.

2.3　李厳『支那数学史』から

> 28.**甄鸞(けんらん)撰注の算経**
>
> 甄鸞撰注の数学書には，大たい九章，孫子，五曹，張邱建，夏侯陽，周脾，五経，記遺，三等数，海島，甄鸞算術などの数種がある．各書に載せている所は相互に詳略があるが，古代の数学書は，彼の注釈を経て始めて定本となったのである．
>
> 甄鸞の字(あざな)は，叔遵(しゅくじゅん)と云い，夏侯陽算経に解法不同を言って，梁の大同元年（535）に之を校したと謂っている．隋書律歴志巻上には甄鸞算術を引用して玉升一升に対し官斗では一升三合四勺にあたると云っている．此の玉升は周の保定五年（565）に頒行(はんこう)したものである．隋書律歴志には，周武帝の時に天和暦を作ったとあり，その経籍志には，又周天和年暦一巻があって，甄鸞が天和元年 (566) に定めた暦書である．甄鸞は仏教を信じたが，周武帝は道教を崇拝し，建徳三年（573）に三教の先後を弁じ，仏教を後とした．甄鸞の信奉する仏教は当時の人が重んじなくなった．その後また名を聞かない．その官職は，法苑珠林に笑道論三巻を引いて，周武帝が前司隷毋極伯の甄鸞に敕して撰せしめたとある．その撰注の各書は次の如くである．出典によって多少の異同がある．[4]

---

[2]李厳著　島本一男・薮内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社　p18-19
[3]銭宝　編　川原秀城訳　「中国数学史」1990 年 2 月 20 日印刷　1990 年 2 月 28 日発行　みすず書房 p82
[4]李厳著　島本一男・薮内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社　p26

2.3.1　『孫子算経』に関する部分

孫子
孫子算経〇巻，甄鸞注　　（一切経音義）
孫子算経三巻　甄鸞撰注　　（旧唐書）
孫子算経三巻　甄鸞撰　李淳風注　（新唐書，通志略）

その他の数学書　九章，五曹，張邱建，夏侯陽，周脾，五経，記遺，三等数，海島算経，甄鸞算術

30．隋唐の数学
隋唐流伝の数学書で隋唐経籍志に載せられているもの．

孫子算経二巻
旧唐書芸文志　孫子算経三巻（甄鸞撰注）
新唐書芸文志　甄鸞孫子算経三巻

此れより以前，九章算術などの諸書の注釈は甚だ乱雑であったが，李淳風が梁述，王眞儒等と詔(みこと)を受けて算経十書に註を施し，顕慶丙辰年(けんけいひのえたつどし)(665）に国学で使用せしめてから，始めて流伝が広くなった．[5]

29. 近古時代の数学
近古時代の数学は，唐より宋元にいたる，凡そ西紀 600 年より 1367 年迄にあたる．上は漢魏を承け，下は明朝に接し，支那数学の黄金時代である．今唐及び宋元を以て近古数学の前後両期の代表とする．唐代には数学の考試制度を行い数学書を制定し，前代にみなかった隆盛さであった．当時印度の暦算が輸入され，支那の名声が亦西域に及び，その国外にあっては日本にまで流伝した．下って宋代になると唐代の考試制度を襲い，また国学より数学書を精刻して世に行った．

隋書経籍志　　孫子算経二巻
旧唐書芸文志　孫子算経三巻（甄鸞撰注）
新唐書芸文志　五曹孫子算経二十巻，甄鸞孫子算経三巻

李淳風注の算経十部
李淳風の註を施したもので，今に残っているものは
九章算経九巻，孫子算経三巻，五曹算経五巻，張邱建算経三巻，周脾算経二巻，海島算経一巻，緝古算経四巻

此のほかに祖沖之綴術(そちゅうしてつじゅつ)五巻に註したが，今は失われてしまった[6].

[5]李厳著　島本一男・薮内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社　p28-29

[6]李厳著　島本一男・薮内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社　p28-32

2.4　『孫子算経』は日本へも流伝している

35. **唐代数学　日本に輸入さる**

支那と日本は地域が接近しており，日本の欽時天皇十五年（554）以後に，支那数学は始めて朝鮮を経て間接に伝わった．此の年に百済の易博士王道良，暦博士王保孫が始めて支那暦を日本に輸入した．隋代になっては，直接に使を通じたのであって，日本書紀推古天皇十五年七月庚戌の條に「聖徳太子は小野妹子と通事鞍作福利をして隋に使ひせしめた」と記されている．隋書煬帝紀に「大業四年（即ち推古天皇十六年）三月壬辰に，百済，倭，赤土，加羅国がみな使を遣わして方物を貢した」というのが是である．大宝二年（702）に日本は学校を立て，数学を教えた．採用した算経十書は周脾，孫子，六章，三開，重差，五曹，海島，九司，九章，綴術であり，天文博士，暦博士及び天文暦正各十人，算正三十人を置いた．大宝，養老年間の令義解には「凡そ算経は，孫子，五曹，九章，海島，六章，綴術，三開，重差，周脾，九司各々一経とし，学生は経を分かちて業を習え．凡そ算学生は術理を弁明して然る後に通ぜりとせよ．九章は三條，海島，周脾，五曹，九司，孫子，三開，重差各一條を試みよ．九問の中，全通を甲，六問に通ずるを乙とせよ．もし九章に落第せば，六問に通ずるも不第とせよ．綴術，六章の試験を受くるものは，前に准じ，綴術六條，六章三條とせよ．もし九章と綴術及び六章と海島などの六経を以て，試験を受けようとする者も，亦同じく聴許せよ．九問を試験して全通を甲，六問を通ずるを乙とせよ．もし経に落つる者は（即ち六章がすべて通ぜざるもの），六問を通ずるとも不第とせよ」と称している．即ち全く唐代の数学試験制度を採用している．[7]

2.5　銭宝　編　川原秀城訳　「中国数学史」

＜＜孫子算経＞＞巻下の最も著名な問題といえば，”いま物があり，その数はわからない．これを三ずつ数えると二あまり，五ずつ数えると三あまり，七ずつ数えると二あまる．問う，物の数はいくらか ””答えていう，二十三 ”―これである．この問題は，整数論の合同式の符号を使って表せば，$N \equiv 23$ である．＜＜孫子算経＞＞の解法 ”術にこういう．三ずつ数えるのに対しては百四十をおき，五ずつ数えるると三あまるのには六十三をおき，七ずつ数えると二あまるのには三十をおく．これらを加え合わせて二百三十三を得，この値から二百十を引くと求める値である．およそ，三ずつ数えて一あまるのにたいしては七十をおき，五ずつ数えて一あまるのには二十一をおき，七ずつ数えて一あまるのには十五をおく．それらの和が百六以上であれば，百五（の倍数）を引き，求める値を得る，と．術文の前半によれば，この問題の解は

$$N = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 2 \times 105 = 23 \tag{2.1}$$

また術文の後半部によれば，一次合同式

[7]李厳著　島本一男・薮内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社　p36-p37

$$N \equiv R_1 (mod3) \equiv R_2(mod5) \equiv R_3(mod7)$$

の解は

$$N = 70R_1 + 21R_2 + 15R_3 - 105p \qquad p \in Z$$

と表すことができる.

孫子のかかる ”物不知数 ”の問題にはすこぶる謎解きの趣があり，なおかつその解法も非常に巧妙である．そこで後世に流伝すると，”秦王暗点兵(しんおうあんてんへい) ””剪管術(せんかんじゅつ)[8] ”鬼谷算 ””韓信点兵 ”などの名称が生じ，人民のレクレーションの一つになっている.

孫子の ”物不知数 ”題の解法を一般化すれば，次のごとき定理となる．すなわち

いま $a_1, a_2, ..., a_h$ を二つずつ互いに素な h 個の除数，$R_1, R_2, ..., R_h$ をそれぞれ余数とし，$M = a_1 a_2 a_h, N \equiv R_i(moda_i), i = 1, 2, 3, ..., h$ としよう．そのとき $k_i = \frac{M}{a_i} \equiv 1(moda_i)$ を満たす k_i を探すことができれば,

$$N \equiv \Sigma k_i \frac{M}{a_i} R_i(modM)$$

さてヨーロッパの十八世紀には，オイラー [L.Euler,1707-1783 年] やラグランジュ[J.Lagrange 1736-1813 年] などが一次合同式の研究に従事した．ついでドイツの数学者ガウス [K.F.Gauss 1777-1855 年] が 1801 年に出版の＜＜算術探求＞＞において，はっきりと上述の定理を記した．当時，ヨーロッパの数学者たちは中国古代数学にたいしていくばくの知識がなく，ガウスなどが独自の研究を経て自らの成果に到達したことはいうまでもない．**だが，1852 年に，イギリス人宣教師アレキサンダー・ワイリー偉烈亜力** [Alexander Wylie,　1815-1887 **年）が＜＜孫子算経＞＞ ”物不知数 ”題の解法をヨーロッパに伝え，**1874 **年に，マッティセン** [L.Matthiessen] **が孫子の解法とガウスの定理との符合を指摘するや，欧文の数学史では，この定理を ”中国剰余定理 ”**(Chinese Remainder Theorem) **と称している．**

2.5.1　マッティセン [L.Matthiessen] の Chinese　Rremainder Theorem

インターネット上に,「A History of Da-Yan Qiu-Yi Shu in the West」を発見した.
『孫子算経』に関する部分を閲覧可能であった．以下に引用する.

A History of Da-Yan Qiu-Yi Shu in the West

WANG XIAOQIN
Insutisute for the History of Natural Sciences
Chainese Academy of Sciences

Introduction

It was not easy for Qin Jiushao's Da-Yan Qui-Yi Shu to be understood in the West. In 1852,Alexander Wylie published in North-Chaina Herald a famous paper

[8] 関孝和が「括用算法」で用いた用語

titled ”Jottings on the Science of Chineas:Arithmetic” in which explained the solution of Sun Zi's famous remainder problem and the first problem of Shu-Shu Ji-Zhang by means of Da-Yan Shu.He did this without showing explicitly how to find the Cheng Lu,i.e., the solution of the congruence $ax \equiv 1(\text{mod b})$. In transration this paper, the German scholar K.L.Biermatzki misunderstood the Da-Yan Shu, confusing the Cheng Lu with the Ji, which is the least positive residue of a(mod b). So did the French Mathematician Olry Terequem in translating Biernatzki's paper.

中略

The Chinese Remainder THeorem in elementary number theory is as follows: if k, satisfies

$$K_i\frac{M}{m_i}(mod \quad m_1) \equiv 1(i = 1, 2, , n)$$

where $M = m_1, m_2, m_M, m_1, m_m$ are relatively prime in pairs, then the solution for the system of the congruence of the first degree

$$N \equiv r_i(modm_i)(i = 1, 2, , n)$$

work put to an end of the history of interpreding the $Da - YanQui - YiShu$ in the west

2.5.2　西洋へ『孫子算経』の ”物不知数 ”の問題と解法を伝えたアレキサンダー・ワイリーとは

アレキサンダー・ワイリーは中国に渡ったイギリスのロンドン宣教会宣教師でシノロジストとしても名高い人物である．1815 年 4 月ロンドンの生まれで，父親はスコットランドからロンドンに移り住んで絵の具を販売していた．ワイリーは中等教育を終えて指物師をしていたがそのかたわに中国に渡りたいと考え，漢訳聖書などにより中国語を独習した．ロンドン伝道会が上海に創設した出版社墨海書館の経営に任じられ 1847 年に中国上海に渡って伝道につとめた．その間，中国の古典や数学・天文学・言語・歴史・地理などの分野の研究に励んだが，過労のために失明し，1877 年に帰国，ロンドン北部のハムステッドに住んだが 1883 年 1 月 6 日に亡くなっている．[9]

2.5.3　『中国数学史』のアレキサンダー・ワイリー

1842 年にアヘン戦争に敗北すると，清朝政府はイギリス侵略軍と南京条約を結び，上海，広州など五つの沿海都市を通商港として開放し，雍正元年以来の鎖国政策を終熄させた．イギリス人は上海などの開港港を基地として，中国人民にたいして経済的略奪をほしいままにし，かさねて文化的侵略にもたずさわった．ワイリー偉烈亜力 (Alexander Wylie 1815-1887 年）は，1847 年に上海

[9] イギリス人宣教師アレキサンダー・ワイリーについては, 京都ノートルダム女子大学人間文化学科　岡村敬二教授 ”戦前期「外地」で活動した図書館員に関する総合的研究 ”の中で ”衛藤利夫「本を盗まれた話」再録にあたって ”

にいたり，墨海書館を経営する．かれは中国の言語文字に習熟するや，漢文をもって＜＜数学啓蒙＞＞二巻を撰し [1853 年]，当時西洋で行われていた算術代数知識を中国に紹介した．そこには対数や数字方程式の解法のホーナー法が含まれている．[10]

2.6　中国における教会の数学教育

2.6.1　李厳「支那数学史」より

清末の数学教育は始めに教会に由って提唱された．道光十九年（1839）にブラウン博士（Dr.R.S.Broun) が一学校を澳門（マカオ）に設け支那人の子弟に教えた．此の後道光二十五年にはアメリカ聖公会の主教文氏が学校を上海に立て，後に約翰書院と名付けた．同治十年（1871）には又一校を武昌に立て，後に文華書院と称した．同治三年にアメリカの狄考文（Rev.Calvin W.Mateer）が文会館を山東省登州に設け，同治五年には英国の侵礼会が廣徳書院を青州に設け，後に二校は合併して廣文学堂としい縣に改設した．同治十三年には英国総領事麥華陀と傅蘭雅 (Dr.John Freyer) が格致書院を上院を上海に設けた．後に両校は合併して燕京大学とした．

光緒七年にアメリカ監理会の林楽知が中西書院を上海に設けた．その会は又光緒二十三年に中西書院を蘇州に設け，二十七年にはその他の博習書院と合併して東呉大学とした．アメリカ長老会は光緒十一年より，廣州，澳門の各地に学校を建設し，その格致書院は二十七年に嶺南学校と改め，三十年に至って嶺南大学と改めた．以上が英米耶蘇教士が最近世期に学校を設けた大要である．

天主教士の方は，毎教区に天主教の蒙啓学校 (Ecoles de Catechumen) を設立した．道光三十年には徐匯公学 (Callege de St.Igrance de Zi-ka-Wei) を設け，又聖芳済学校 (Callege de Francis Xavier) を設けた．光緒二十九年には，京師訳学館が戊戌（1898）の政変で閉鎖になっていたので，蔡元培らが申請協議し，耶蘇会が震旦学校 (Universite Laurore）を上海で創めた．学校が初めて立てられた当時は，教科書が欠乏していたので，英米仏の教士は自ら教科書を編纂して需要に応じた．それ等の書は以下の如くである．[11]

2.6.2　耶蘇教士の編訳本

心算初学六巻　　登州の哈師娘撰
心算啓蒙十五章一巻　アメリカ那夏禮輯譯　1886 年上海美華書館鉛印本
西算啓蒙　1885 年譯印本
数学啓蒙　英国偉烈亜力撰　1853 年偉烈亜力序刻本
筆算数学三冊　アメリカ狄考文，鄒立文同撰，1892 年狄考文自序鉛印本
代数備旨十二巻　　アメリカ狄考文，鄒立文，生福維同訳，1891 年　美華書館鉛印本

[10] 銭宝　編　川原秀城訳　「中国数学史」1990 年 2 月 20 日印刷　1990 年 2 月 28 日発行　みすず書房 p334
[11] 李厳著　島本一男・藪内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社　p213-214

代数備旨下巻十一章　アメリカ狄考文遺著，范震東校定，1902 年會文編輯社石印本
形学備旨十巻　アメリカルーミス (Loomis) 原撰　狄考文，鄒立文，劉永錫同訳
八線備旨四巻　アメリカルーミス原撰，潘愼文撰 (Rev.A.P.Parker) 撰訳　謝洪賚校録　1893 年潘愼文序　美華書館鉛印本
円錐曲線　アメリカルーミス原撰　潘愼文撰　謝洪賚校録，1893 年美華書館鉛印本
格致須知即ち量法須知（1887），代数須知（1887)，三角須知 (1888)，微積須知（1888），曲線須知 (1888) は英国の傅蘭雅の撰である．
（二）天主教士の編訳本
課算指南　天主教啓蒙学校の用書で，今は既に絶版である．
課算指南教授法　同じ学校の用書で，今は既に絶版である．
代数学　Carlo Bourlet 撰　雲翔撰　1928 年同じ書館の第二版あり．
幾何学（平面）　Carlo Bourlet 撰　戴運江撰　1913 年同じ書館の鉛印本

教育大辞書によると，キリスト教徒は光緒三年（1887) に宣教士大会及び学校教科書を組織する委員会を催し，その十六年にはまた支那教育会を上海に創設し，各種の教科書を編訳出版し，支那の一般教育問題を討論解決した．当時新しい教育事業には多くの教士が関係した．即ち同文館の管長は丁イ良博士 (Dr.W.A.P.Martin) であり，又光緒二十四年（1896）にはアメリカ人の李佳白，狄考文が総学堂を設立することを建議し，京師大学設立の先駆となった．そして天津の北洋大学及び上海の南洋公学が初めて設立されたときは，みな西洋人の助力に頼っている．[12]

2.7　キリスト教徒のよる西洋文明の紹介とその評価

上記のように，キリスト教徒による数学書の編訳本が出版されたが，中国においての影響については，薮内清が「中国の科学文明」で次のように指摘している．ヨーロッパに近代科学が起こった原因を述べた後，中国の科学技術が立ちおくれた原因については

中国が立ちおくれた原因

これに対し，過去の中国に入ってきた外来の文明は．きわめて貧弱なものであり，ヨーロッパの文明を取り入れた明末清初のそれでさえも，中国社会をゆりうごかすことはできなかった．過去の中国はほとんどすべてのものを，自国の中で創造してきた．五千年の歴史を持つ漢民族は，ほとんど自力で以て，きわめて高い文明をつくり上げた．しかし自力には一定の限界があることは，否定できない．さらに不幸なことは，中国の文明が一つの民族によって形成されたことである．過去においては，このこともために，独特の文明が形成されたのであるが，しかしヨーロッパに近代科学が起こるころになると，この独特な文明が伝統としての強制力を持ち，社会の変革を妨げた．この点で，ヨーロッパはまことに恵まれていた．中国よりはるかに狭い地域の中に，伝統を異にし，言語習慣の違った民族が割拠した．戦争その他の理由によって一国の科

[12]李厳著　島本一男・薮内清訳「支那数学史」昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社　p214-215

学研究が停滞した時，別の国がその任務を担当した．ガリレオを生んだイタリア，ケプラーが活躍したドイツが，戦争のために科学研究ができなくなると，科学研究の舞台はイギリスに移り，さらにフランスがその主導権をにぎった．ヨーロッパが一団となり，ヨーロッパの近代科学をつくりあげた．[13]

過去の中国は，砂漠や山脈，さらに海にさまたげられ，外国の侵略を許さない自然環境の中に安住することができた．国民の大部分を占める漢民族は，自らすぐれた文明を保持しつづけた．恒常的な発展を示してきたといえ，そこにはヨーロッパ社会のような変革は起こらなかった．十六世紀になって，ヨーロッパに近代科学が勃興し，十七世紀の科学革命が行われるようになると, 中国とヨーロッパの差は決定的となった．それも，イギリスをはじめとする列強の中国進出がまだ積極的でなかった時代は，伝統に安住し，古い体制の中で中華帝国の夢をむさぼることができた．しかし，アヘン戦争は，この古い中国に，最初に与えたはげしいアッパーカットであった．中国の封建社会は，一路崩壊への道をたどるのである．しかし高い伝統文明を持った中国の近代化の道は，きわめてきびしいものであった．日本の場合，列強の圧力によって開港が行われてから，明治維新まではほぼ二十年しか経過していない．いま同じ時期として南京条約の締結から民国革命までとると，じつに七十年に及んでいる．民国革命の後といえども, 明治維新後ほど順調な近代化は行われていない．西洋文明との対決の中で，貪欲な列強の侵略を受け，中国のながい苦悩はつづいたのである．[14]

科学書翻訳の推移外国語の漢訳事業は，日清戦争前後から次第に増加した．その翻訳も，外国人に頼るだけでなく，外国留学から帰った中国人の手で行われるようになった．もちろんその中には日本書も多く，化学の場合とちがって，日本でつくられた多数の科学用語が，逆に中国で使用された．科学という言葉自体も，日本から伝わったもので，同じく漢字を使用した日本語はそのまま中国語にとり入れるのに好都合であった．いま—ruby 周昌寿しゅうしょうじゅの訳刊科学書籍考略という論文によって，漢訳書のあらましを述べておこう．この論文には咸豊三年 (1853) から宣統三年（1911，清朝最後の年）まで訳述された欧米の科学書四百六十八部を，次の六項目に分け，年次別に分類している．まず項目ごとの部数を引用しよう．

総論及び雑著	四十四部	理化	九十八部
天文・気象	十二部	博物	九十二部
数学	百六十四部	地理	五十八部

これをみると数学書が圧倒的に多い．数学が科学技術の基礎となることはいうまでもなく，洋務派の人々が数学の重要性を強調するのも理由のないことではないが，数学書の比重はやや重きにすぎる．むかしから中国人が数学を好み，清末になっても数学者が多かったことが，この数字に反映していると解釈できよう．[15]

日本では，吉田光由の『塵功記』に「第十三　百五げんといふ事」となって登場する．

[13]薮内清著「中国の科学文明」1970 年 8 月 20 日　第 1 刷発行　岩波新書（青版）759　岩波書店　p181-182
[14]薮内清著「中国の科学文明」1970 年 8 月 20 日　第 1 刷発行　岩波新書（青版）759　岩波書店　p183
[15]薮内清著「中国の科学文明」1970 年 8 月 20 日　第 1 刷発行　岩波新書（青版）759　岩波書店　p200-201

2.8　『新編塵功記』の「第十三　百五げんといふ事」

岩波文庫『塵功記』吉田光由著　大矢真一校注[16]に以下のようにある．

第十三　百五げんといふ事

半ばかりを聞きゝてかづを云う事なり．先七づゝ引時，二つ残ると云．また五つひく時，一つ残ると云．又三づゝ引時，二つ残ると云時に，此半ばかり聞て惣数を知る．

惣数八十六あるというなり．

先七づゝ引時の半一つを，十五づゝのさん用に入，三十とおき，又五づゝ引時の半一つを，二十一と入て置．又三づゝの時の半を，一つを七十づゝのさん用にして百四十と入て，三口合百九十一有時，百にあまる時には百五はらい，のこ八十六ありといふなり．

大矢真一の注

（一）　『孫子算経』に，

今，物あり，その数を知しらず，三・三とこれを数うれば，あまり二．五・五とこれを数うれば，あまり三．七・七とこれを数うれば，あまり二．問ふ，物幾何．
術に曰く，三・三とこれを数ふるときのあまり二に百四十を置き，五五とこれを数ふるときのままり三に六十三を置き，七七とこれを数ふるときのあまり二に三十を置き，これをあわせて二百四十を得．二百一十をもってこれを減ずれば，すなわち得．
およそ三・三とこれを数ふるときのあまり一ならば，すなわち二十一を置き，七・七とこれを数ふれときのあまり一ならばすなわち十五を置き，一百六以上は一百五をもって減ずればすなわち得るなり．

（二）　三・三と数えるも，三ずつ引くも同じこと，三で割って余りを求めるのである．七で割った時の余りを a，五で割ったときの余りを b，三で割ったときの余りを c とする．いま，

$$15a + 21b + 70c$$

という数を作ると，これを 7 で割れば，第二項と第三項は割り切れ，第一項からは a という余りが出る．また，5 で割れば，第一項と第三項は割り切れ，第二項から b という余りが出る．また，これを 3 で割れば，第一項と第二項は割り切れ，第三項から c という余りがでる．すなわち，この式で表される数は要求を満足する．この数から $3 \times 5 \times 7 = 105$ を増減しても，余りが出る性質は変わらないから，このような数の最小を求めるには，この式で表される数から 105 の倍数を引けるだけ引けばよい．これがここの説明の意味で,「百五減」の名もこれから出ている．

2.9　竹之内脩著『関孝和の数学』より

竹之内脩著『関孝和の数学』に「翦管術 3」として「百五減算の解」が次のように解説されている．

[16]1977 年 10 月 17 日　第 1 刷発行　岩波書店　p228-229

今物有り，総数を知らず．只云う，3 にて除すれば余り２箇，５にて除すれば余り１箇，７にて除すれば余り５箇．総数幾何問う．
答えて曰く，総数　26 箇
術に曰く，３で割った余りに７０を掛け，５で割った余りに２１を掛け，７で割った余りに１５掛けて加える．

$$2 \times 70 + 1 \times 21 + 5 \times 15 = 236$$

105 を引いていくと，余り 26．これが総数である．
解に曰く　逐約の術に依って，3,5,7 皆約さず
◯ $5 \times 7 = 35$ と剰一の術により 70 を得る．これを 3 で割った余りに掛ける．
◯ $3 \times 7 = 21$ と 5 で剰一の術により 21 を得る．これを 5 で割った余りに掛ける．
◯ $3 \times 5 = 15$ と 7 で剰一の術により 15 を得る．これを 7 で割った余りに掛ける．
これらを加え，$3 \times 5 \times 7 = 105$ の倍数を引く．

[解説]　剰一の式

$$35x - 3y = 1 \text{ から}, x = 2, 35x = 70$$

$$21x - 5w = 1 \text{ から，}\ \mathrm{z} = 3, 7z = 21$$

$$15u - 7v = 1 \text{ から}, u = 1, 15u = 15$$

[17]

4.1.9 剰一
剰とは余り．これは一次不定方程式

$$Ax - By = 1$$

の解を求める方法を論ずるものである．
A,B が互いに素な数のとき互助法をやっていくと最終的に 1 が得られ，それから逆算すれば，$Ax - By = 1$ の解に到達することができる．1 組の解が見つかれば，x には B の倍数を加え，y には A の同じ倍数を加えることによっていくらでも解が得られるわけだから，そのような x の最小のものが見つかればよい．[18]

次に『孫子算経』を東北大学付属図書館からダウンロードした『孫子算経』を見ることにする．この『孫子算経』の注には以下のようにある．

『孫子算経』（唐）李淳風等奉勅註　乾隆 42 年刊　巻 12　 5 冊 目録注記等　3 巻付 9 巻　倣汲古閣影宋鈔本重離（付 9 巻の明細）

とある．

[17]竹之内脩著『関孝和の数学』2008 年 6 月 25 日初版第 1 刷発行　共立出版社　p47-48
[18]竹之内脩著『関孝和の数学』2008 年 6 月 25 日初版第 1 刷発行　共立出版社　p40

2.10　『孫子算経』下巻「物知数

今有物不知其數二三數之賸二五五數之賸三七七數之賸問物幾何.

答曰二十三

術曰三三數之賸二置一百四十五五數之賸三置六十三七七數之賸二置三十并之得二百三十三以二百一十減之即得凡三三數之賸一則置七十五五數之賸一則置二十一七七數賸一則置十五一百六以上以一百五減之即得.

2.11　P・J・コーヘン著『連続体仮説』の「中国剰余定理」

この『孫子算経』の「物知数」の解法は，銭宝　が「中国数学史」で指摘したように,「1852 年に, イギリス人宣教師アレキサンダー・ワイリー偉烈亜力 [Alexander Wylie, 1815-1887 年）が＜＜孫子算経＞＞ ”物不知数 ”題の解法をヨーロッパに伝え，1874 年に，マッティセン [L.Matthiessen] が孫子の解法とガウスの定理との符合を指摘するや，欧文の数学史では，この定理を ”中国剰余定理 ”(Chinese Remainder Theorem) と称している.」とある.

この「中国剰余定理」を実際に言及している書籍がある．それはＰ・Ｊ・コーエンの『連続体仮説』にある.

「§7．原始帰納関数」の節にある.

2.11.1　§7．原始帰納関数

次の主題は体系 Z_2 更に詳しく考察することである．すでに述べたように，すべての ”正規 ”な組み合わせ理論的な議論は体系 Z_2 で展開される．そこでは，大部分の証明が有限集合の上の帰納法の原理だけ使うからである．このことを明らかにするために，どの**関数**が Z_2 で表現されるかを決定する問題を考えてみよう．まず，原始帰納関数といわれ，整数（または整数の作る n 項列）の上で定義せされ，しかも整数値をとる関数を定義する．これらの関数は Z_1 または Z_2 のような形式体系の対象ではなく，数学の ”実在 ”の対象であることを強調しておく．実際，われわれの主な仕事はこれらの関数が Z_1 と Z_2 の内部で表現されることを示すことである.

定義１．　整数の列に整数を対応させる関数 $f(n_1,\ \cdots, n_k)$ が次の規則によって構成されるとき，これを**原始帰納関数**と言う：

）　ある定数 c に対して，$f(n_1, \cdots, n_k) = c$ であれば，$f(n_1, \cdots, n_k)$ は原始帰納である.

）　$f(n_1, \cdots, n_k) = n_i(1 \quad ik)$ は原始帰納である.

）　$f(n) = n + 1$ は原始帰納である.

）　$f(n_1, \cdots, n_k)$ と $g_1, . \cdots, g_k$ が原始帰納であるとき，$f(g_1, . \cdots, g_k)$ はまた原始帰納である.

）　$f(0, n_2, \cdots\cdot, n_k)$ が原始帰納で，原始帰納関数 $g(m, n_1, \cdots\cdot, n_k)$ に対して，$f(n + 1, n_2, \cdots, n_k) = g(f(n, n_2, \cdots\cdot, n_k), n, n_2, \cdots, n_k)$ であれば,$f(n_1, \cdots, n_k$ はまた原始帰納である.

整数についての初等関数の大半は原始帰納である．たとえば，加法，乗法，冪，階乗，n 番目の素数は共に原始帰納である．原始帰納関数の重要性は，それらが具現的に計算可能なること，すなわち規則　）—　）を使った原始帰納関数の定義と整数 $n_1, \cdots n_k$ が与えられた時，その定義の中に現れる帰納図式を使って,（十分時間があれば）$f(n_1, \cdots, n_k)$ が計算されることである．

ある型の一般帰納関数は存在しないことを証明する次の定理を挙げて，この節の終わりにする．

定理 2 $f_1(x,y), f_2(x,y)$ を整数についての関数で，$x+y$ が $f_1(x,y)$ で，$x \cdot y$ が $f_2(x,y)$ で定義されるとき，Z_1 の定理が成立するものとする．このとき，得られる Z_1 のモデルが通常の演算 $+, \cdot$ に関する整数と同型であるか，f_1 または f_2 が一般帰納でないかいずれかである．

証明

M を f_2 で定義されたモデルとする．またそれらが機能的であると仮定する．M が普通ののモデルと同型でなければ，$a_n = f_1(a_{n-1}, b)$ と置く．ただし，b は M の中の ”1 ”である．このとき，a_n は ”標準 ”の整数である．M は標準でないから，ある Cc がすべての a_n より大でなければならない．すなわち各 n に対して，$c = f_1(x, a_n)$ となる x が存在する．ところで，Z_1 において非帰納的な帰納可算集合 S を直接的に定義できる．M の中で実行するとき，この定義の集合 $S \subseteq M$ を与える．また，モデル M における第 n 番目の素数を P_n とする．このとき，**中国剰余定理（**Chainese remainder therom) は M において真だから，M の元 y で，すべての $n < c$ に対して $n \in S'$ であるか $\sim n \in S'$ であるかに応じて，$y \equiv 0$ または 1（modp_n) であるものが存在する．

さて，任意の ”標準 ”の整数 n に対して，$n \in S'$ であるか $\sim n \in S'$ であるかを帰納的に述べるかを説明しよう．すなわち，まず p_n を M の中で固定する．次に，$p_n \cdot Z$ が y に等しいか $y-1$ に等しいかを知るために，M のすべての元を順次調べる．第 1 の場合 $n \in S'$ で，第 2 の場合 $\sim n \in S'$ である．f_1, f_2 は帰納的であるから，これは帰納的な手続きである．しかしながら，N が ”標準 ”な整数の集合を表すとき，$N \cap S' = S$ であるということをできないので，まだ矛盾は起こらない．S が特定の原始帰納関数 f の値域として定義されるとき常に $N \cap S' \supseteq S$ であることに注目せよ．$n \in S$ であるとき，$f(m) = n$ で，この方程式がまた M において成立するような N の元 m が存在するからである．次の補題 1 で，二つの帰納的加算集合 S, T で，$S \cap T = 0$ が同時に成立しないものが存在する．$S \cap T = 0$ は Z_1 において証明可能であるから，$S' \cap U' = 0$ である．ところで，すでに述べたように $S' \cap N = U$ は帰納的で，$T' \supseteq T$ から $S \subseteq U, U \cap T = 0$ が得られる．よって証明が完成する．

2.12　李儼著　島本一男・藪内清訳　「支那数学史」

59　近古期の数論[19]

宋秦九韶（しんきゅうしょう）の数書九章巻一，巻二の「大衍類」は相合の理論及び相合式の解法に論及している．その「大衍総術」の内には，先ず有理数を分かって元數（すなわち整数），収數（小数），通數（分数），複數（10^n 倍の整数）などの數種となしている．次の「両々連環求等」は最小公倍数を求めるもので，諸數を互いに素な數に還元している．$A, B, C, D, \cdots$ という「問數」があれば，先ず

[19]昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社

互いに素な數即ち「定数」$A', B', C', D' \cdots$ を作る．問數 $A, B, C, D, \cdots\cdot$ の最小公倍数を即ち衍母(えんぼ)を θ とすると,「定数」$A', B', C', D', \cdots$ の連乗積も亦 θ となるべきである．今「定数」を持って「衍母」を除し，その結果を「衍數」と称する．例えば，$Y_1 = \frac{\theta}{A'}, Y_2 = \frac{\theta}{B'}, Y_3 = \frac{\theta}{C'}$ などがそれである．次にこれらの「衍數」$Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$ からそれぞれ「定母」$A', B', C', D', \cdots$ の整数倍を取り去って，その残りを「奇」$G_1, G_2, G_3, G_4, \cdots$ という.「奇」と「定母」から,「大衍求一」を用いて計算し,「乗率」を求める．これらの大衍求一の計算はユークリッドの法式と全く一致する．この種の算法による $G_1 x \equiv 1(mod A')$ なる相合式の解法は次の如くである

$$A' = q_1 G_1 + r_1 \text{これに対して } a_1 = a_0 q_1 = q_1 \text{とする.}$$

次に，順次

$$G_1 = q_2 r_1 + r_2 \qquad a_2 = a_1 q_2 + 1$$

$$G_2 = q_3 r + r_3 \qquad a_3 = a_2 q_3 + a_1$$

$$\cdots\cdots\cdot \qquad \cdots\cdots$$

$$r_{n-1} = q_n r_{n-1} + r_n \qquad a_n = a_{n-1} q_n + a_{n-2}$$

となり，r_n が 1 となるまで計算を行い，$r_n = 1$ に対する $a_n = a$ とすれば

$$aG_1 \equiv 1(mod \quad A')$$

となる．

今同じようにして $G_1 x \equiv 1(mod \quad A'), G_2 x \equiv 1(mod \quad B'), G_3 x \equiv 1(mod \quad C') \ldots$ に対する解を夫々$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ とすれば，これらを乗率と称する．そして $\alpha Y_1, \beta Y_2, \gamma, Y_3 \ldots$ などを「泛(はん・ほう)用」と称する．もし「泛(はん・ほう)用」の中から衍母の整数倍が取り出せるなれば，その残りを「正用」と称する．もし $aY = aY_1' + m\theta \equiv 1(mod \quad \theta)$ であれば,$aY_1' \equiv 1(mod \quad \theta)$ を得ることが出来る．この $\alpha Y_1', \beta Y_2', \gamma, Y_3' \ldots$ などを「正用」と称する．

終わりにその応用を示そう．例えば某数 N を $A', B', C', \ldots$ でそれぞれ除し，その余りが $a, b, c, \ldots$ であったとする．この余り $a, b, c, \ldots$ を以って「泛(はん・ほう)用」$\alpha Y_1, \beta Y_2, \gamma Y_3 \ldots$ に乗じ，その結果を合わせ,「衍母」の整数倍だけ取り去る．その余すところが,

$$
\begin{aligned}
N &\equiv a(mod \quad A') \\
&\equiv b(mod \quad B') \\
&\equiv c(mod \quad C') \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

なる一連の相合式の答えとなる．即ち R を整数として

$$a\alpha Y_1 = a\alpha B_1'C'\ldots \qquad b\beta Y_2 = b_\beta A'C'\ldots$$

$$c\gamma Y_3 = c\gamma B'C'\ldots \qquad \ldots$$

$R\theta = RA'B'C'\ldots$
となるが故に

$$b\beta_2 \equiv 0(mod \quad A') \qquad c\gamma Y_3 \equiv 0(mod \quad B')$$

$$R\Theta \equiv 0(mod \quad A') \qquad a\alpha Y_1 \equiv 0(mod \quad A')$$

となり，したがって

$$N = \Sigma a\alpha Y_1 - R\theta = a\alpha Y_1 \equiv a(mod \quad A')$$

同様にして

$$N = \Sigma a\alpha Y_1 - R\theta = a,\ \mathrm{b}, c, \ldots (mod \quad A', B', C', \ldots)$$

となる．

孫子算経巻下に「今有物不知其数」という一問があり，実に大衍求一術の起源である．その問題は下の如くである．

「今物があって，其の数がわからない．それを三個づつ数えると二個あまり，五個づつ数えると三個あまり，七個づつ数えると二個あまる．物の数を問う．答え　23」

秦九韶の法によれば，孫子の問題は

A, B, C	元数	3,5,7	衍母 =105
Y_1, Y_2, Y_3	衍数	35,21,15	
G_1, G_2, G_3	奇数	2,1,1	
α, β, γ	乗率	2,1,1	
$\alpha Y_1, \beta Y_2, \gamma Y_3$	泛（はん）用（ほう）	70,21,15	
a, b, c	余数	2,3,2	
$a\alpha Y_1, b\beta Y_2, c\gamma Y_3$	余数	2,3,2	

$N = \Sigma a\alpha Y_1 - R\theta = 23$
となる．それ故に孫子算経に

「術に曰く，三個づつ数えて二を余せば百四十を置き，五個づつ数えて三個余せば六十三を置き，七個づつ数えて二を余せば三十を置き，此数を合せ，二百三十三を得る．二百一十を減ずればそれが答えである．

一体三個づつ数えて一を余せば七十を置き，五個づつ数えて一を余せば二十一を置き，七個づつ数えて一を余せば十五を置き，その和一百六より一百五を減ずれば，それが答えである」と見えている．

宋周蜜の志雅堂雑鈔(しがどうざつしょう)巻下には，此の法を鬼谷算(きこくさん)と称している．宋揚輝(そうようき)の続古摘算法(ぞくこてきさんぽう)には翦管術(せんかんじゅつ)と称している．[20]

2.12.1　「支那数学史」の「孫子算経」の「今有物不知其数」を解く

秦九韶の法によれば，次のように解く

A,B,C 元数 (定母)　　3，5，7　　衍母 (最小公倍数)　$3\times5\times7=105$

ある与えられた整数　3,5,7（問数）

Y_1, Y_2, Y_3　衍数

$$\frac{105}{3}=35,\qquad \frac{105}{5}=21,\qquad \frac{105}{7}=15$$

素数を最小公倍数で割る

G_1, G_2, G_3　奇数=衍数ー n 定母

35 ー (3 × １１=33) ＝ 2

21 ー（5 × 4 ＝ 20）＝ 1

15 ー（7 × 2 ＝ 14）＝ 1

α, β, γ 乗率　2,1,1

$\alpha Y_1, \beta Y_2, \gamma Y_3$　泛用(はんよう)（乗率×泛用）　$\alpha Y_1 = 2\times 35 = 70$

$\beta Y_2 = 1 \times 21 = 21$

$\gamma Y_3 = 1 \times 15 = 15$

a, b, c　余数　2,3,7

，その貴工場　$a\alpha Y_1, b\beta Y_2, c\gamma Y_3$　用数

余数×乗率×衍数＝用数　$a\alpha Y_1 = 2\times 2\times 35 = 140$

$b\beta Y_2 = 3 \times 1 \times 21 = 63$

[20] 李儼著　島本一男・籔内清訳　「支那数学史」 昭和 15 年 10 月 16 日印刷　昭和 15 年 10 月 20 日発行　生活社 p100-103

$$c\gamma Y_3 = 2 \times 1 \times 15 = 30$$

$$N = \Sigma a\alpha Y_1 = Rq = 23$$

第3章　ガウス『整数論』から

3.1　緒言

この書物の内容をなすさまざまな研究は，整数を考察の対象とする，数学のあの特定の領域—そこでは一般に分数は除外され，無理数はつねに排除されている—に属している．いわゆるディオファントス解析とは，不定問題を満足する無限に多くの解の中から，整数解，或いは少なくとも有理数解を（たいていの場合，正という付加条件のもとで）選び出す方法を教える学問である．だが，不定解析は数学における上記の特定の領域そのものというわけでなく，むしろその非常な特殊な一部分である．そうしてその特定の領域に対して，方程式の還元を行ってこれをとく技術（代数学）が全解析学に対するのと，ほとんど同様の振る舞いを示すのである．**解析学**の守備範囲のももとには，およその量の一般的性質をめぐって企図しうる限りのあらゆる研究が所属する．まさしくそのように，整数（および整数を通じて定められる限りでの分数）というものはなるほど ”アリトメティカ ”の固有の対象を形作っている．だが普通，アリトメティカの名をもって数えられている事柄は，記数法と計算の技術（すなわち，数を適当な記数法，たとえば十進法で書き表すこと，また，アリトメティカんい関連するさまざまな演算を遂行すること）をほとんど越えることがない．そこにはなお若干の事柄が付け加えられる．それらのあるものは（対数の理論のように）アリトメティカとは全く関係のない事柄であり，またあるものは，少なくとも整数に固有というわけでなく，あらゆる量に対して開かれている事柄であったりする．このような次第であるから，アリトメティカの二つの領域を区別して，上記のアリトメティカは初等的アリトメティカの枠内に入れ，整数に固有の諸性質に関する一般的研究はことごとくみな高等的アリトメティカの手にゆだねることにするのがよいのではないかと思われる．ここでは高等的アリトメティカのみが語られるであろう．[1]

3.1.1　訳者後記

『整数論』の成立

カール・フリードリッヒ・ガウスは 1777 年 4 月 30 日にドイツのブラウンシュヴァイク（同名の公国の首府）で生まれ，1855 年 2 月 23 日，ゲッチンゲンにおいて世を去った数学者である．生家は煉瓦職だったが，比類のない学問的資質に恵まれ，ブラウンシュヴァイク公国の君主カール・ヴィヘルム・フェルディナント公 (1735–1806）の庇護のもとに勉学を続け，数学の研究に心を傾けた．1798 年にはゲッチンゲン大学を卒業し，その後の 1801 年,『整数論』が出版された．ガウスの数学的天才の最初の具体的発露であるとともに，ガウスの全数論（あるいはさらに，ガウス以降の 19 世紀の数論史）のいしずえとなった重要な作品である．冒頭にはフェルディナント公への献詞が掲げられ，その末尾には「1801 年 7 月」という日付が記されている．だが，ガウスの心にこ

[1]数学史叢書『ガウス整数論』高瀬正仁訳　1995 年 6 月 20 日初版第 1 刷　朝倉書店 p3

の書物の構想が芽生えた日時については，もとよりずっと以前にさかのぼって考えなければならない.『整数論』第 131 条に書き残したメモ，すなわち

1795 年 3 月，帰納的な道筋をたどって基本定理を発見した.

という覚書のおけげで，われわれは,『整数論』へと向かう第一歩が生まれた時期を 1795 年 3 月に特定することができるのである．なぜなら，ここに謂われている基本定理，すなわち平方剰余相互法則こそは『整数論』の根幹をなす生命線であり，この著作の成立の可能性は，基本定理の発見を俟って初めて具体的に開かれるからである．1795 年といえば，ゲッチンゲン大学入学 (1795 年 10 月）の半年も前のことである．満 18 歳の誕生日を間近にしつつ，ガウスはまだ 17 歳にすぎなかった．[2]

3.2　第 1 章　数の合同に関する一般的な事柄

合同な数，法，剰余と非剰余

1. もし数 a が数 b, c の差を割り切るならば，b と c は a **に関して合同**であるといい，もしそうでなければ，**非合同**であるという．a 自身は**法**という名で呼ぶことにしよう．前者の場合，数 b, c の各々はもう一方の数の**剰余**と呼ばれるが，後者の場合には**非剰余**と呼ばれる．これらの概念は正と負[3]のあらゆる整数に適用されるが，分数にまで及ぼしてはならない．たとえば-9 と+16 は法 5 に関して合同である．-7 は法 11 に関して+15 の剰余だが，法 3 に関しては非剰余である．また，どのような数も 0 を割り切るから，あらゆる数は任意の法に関して自分自身と合同であると考えなければならない.

上記の例の計算　(-9)-(+16)=25(mod 5),　(-7)-(+15)=-22,　22/11=2,　22/3=7+1

２．与えられた数 a の法 m に関するあらゆる剰余は，式 $a + km$ のもとに包括されている．ここで k は不定整数を表す．我々が後ほど語る諸命題のうち，比較的やさしいもののいくつかは，このことから労せずして証明することが可能である．だが，それらの正しさは，いずれも一瞥するだけで容易に見て取ることができるであろう.

以後，数の合同を記号 $\equiv$ によって明示し，法が必要な場合には，それを括弧に入れて $-16 \equiv 9(mod.5), -7 \equiv 15(mod.11)$ というふうに表記することにしよう．[4]

3. **定理** 連続する m 個の整数

$$a, a+1, a+2, \cdots\cdot, a+m-1$$

と，もう一つの整数 A が提示されたとしよう．そのとき，これら m 個の整数のうちの一つと，しかもただ一つのみが，法 m に関して A と合同である．なぜなら，もし $(a-A)/m$ が整数ならば，$a \equiv A$ である．もしこの数が分数ならば，それよりも大きくてそれに最も近い整数（あるいは，この分数が負のときは，符号を考慮にいれないものとしたうえで，それよりも小さくて最も近い整数）を $= k$ としよう．すると $A + km$ は a と $a + m$ の間にある．それゆえ，それが捜し求められ

[2]数学史叢書『ガウス整数論』高瀬正仁訳　1995 年 6 月 20 日初版第 1 刷　朝倉書店 p511

[3]明らかに法は絶対的にとらなければならない．すなわち，いかなる符合もつけずに取らなければならない

[4]我々はこのき記号を等式と合同式の間に認められる大きな類似性の故に採用した．同じ理由から，ルヒャンドルはこれからしばしば言及されるであろう著作の中で，合同式にたいしても等号をそのまま採用した．しかし我々はあいまいさが発生するかもしれないことを恐れて，それを模倣する気持ちにはなれなかったのである.

ている数である．そうして明らかに，すべての商 $(a-A)/m, (a+1-A)/m, (a+2-A)/m, , , , ,$ は $k-1$ と $k+1$ の間にある．それ故，そのうち整数であるものは高々1 個でしかありえない．

最小剰余

4.　従って，どの数も，あるいは系列 $0, 1, 2, , m-1$ の中に，またあるいは系列 $0, -1, -2, , -(m-1)$ の中に剰余を持っている．それらを最小剰余と呼ぼう．すると 0 が剰余になるのでは無い限り，いつでも二つの最小剰余が与えられることは明らかである．それ等のうち，一つは正であり，もう一つは負である．もしそれらの大きさが等しくなければ，一方は $< m/2$ である．しかもそれらの大きさが等しいのならば，符合を考慮しないことにするとき，両方とも $m/2$ である．これによって，どの数も法の半分を超えない大きさの剰余を持つことは明らかである．それは絶対剰余と呼ばれるであろう．たとえば 13 は法 5 に関して正の最小剰余 2 を持ち，それは同時に最小剰余であると同時に絶対最小剰余でもある．

合同に関する基礎的諸命題

5.

諸概念が確立されたので，一目で分かる合同な数の性質をまとめて提示しよう．

合成数に関して合同な諸数は，その合成数のどの約数に関してもまた合同である．もしいくつかの数がある同一の法に関してある同一の数と合同であるならば，それらは（同じ法に関して）互いに合同である．このように法が一貫して同一のままに保たれているという状勢が認められる場合には，以下の諸命題の中でも適宜省略を補って理解しなければならない．

合同な諸数は同一の最小剰余をもつが，非合同な諸数は合い異なる最小剰余をもつ．

6.

もしどれほどでも多くの数 $A, B, C,$ と，ある法に関してそれらと合同な他の同個数の数 $a, b, c,$ があるとするならば，すなわち

$$A \equiv a, B \equiv b \equiv, \ldots$$

とするならば

$$A + B + C + \ldots \equiv a + b + c + \ldots$$

である．

もし $A \equiv a, B \equiv \mathrm{b}$ ならば, $A - B \equiv a - b$ でもある．

7.

もし $A \equiv a$ ならば, $kA \equiv ka$ でもある

もし k が正の数ならば，これは前条の命題において $A = B = C = \ldots$ と置くときに得られる特別の場合にすぎない．もし k が負ならば，$-k$ は正である．よって $-kA \equiv -ka$ であり，これにより $kA \equiv ka$ となる．

もし $A \equiv a, B \equiv b$ ならば, $AB \equiv ab$ である．なぜなら, $AB \equiv Ab \equiv ba$ であるから

8.

もしどれほどおおくの数 $A, B, C, \ldots$ と，それらと合同な他の同個数の数 $a, b, c, \ldots$ があるとするならば，すなわち $A \equiv a, B \equiv b, \ldots$ となるとするならば，これら二つの系列の各々の諸数の積は合同である．すなわち $ABC \ldots \equiv abc \ldots$ となる．

前条から，$AB \equiv ab$ となる．そうして同じ理由から，$ABC \equiv abc$ となる．同様にして，さらに他の因子をどれほどでも多く付け加えていくことが可能にである．

もし数 $A, B, C, \ldots$ がすべて等しく，対応する数 $a, b, c, \ldots$ もまた等しいと仮定するならば，$A \equiv a$ とし，k は正整数とすると，$A^k \equiv a^k$ となる，という定理が得られる．

9.

X は不定量 x の $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$ という形の代数関数としよう，ここで $A, B, C, \ldots$ は任意の整数を表し，$a, b, c, \ldots$ は非負整数を表わす．このとき，もし不定量 x に，ある任意の法に関して合同な諸値が与えられるならば，そのようにして生じる関数 X の諸値は合同である．

f, g を合同な値としよう．そのとき，前条から，$f^a \equiv g^a$ および $Af^a \equiv Ag^a$ となる．

同様にして，$Bf^b \equiv Bg^b \equiv \ldots$ となる．よって

$$Af^a + Bf^b + f^c + \ldots \equiv Ag^a + Bg^b + Cg^c + \ldots$$

となる．

さらに，この定理をいっそう多くの不定量をもつ関数に拡張する方法を理解するのは容易である．

10.

従って，連続して次々と現れるあらゆる整数値を x に代入し，[そのようにして得られる] 関数 X の諸値をそのつど最小剰余に還元していくと，それらの値は，m 個の項からなる区域に続いて（m は法を表わす）再び同一の諸項が繰り返し登場するという系列を構成する．言い換えると，この系列は無限に反復して繰り返される m 項周期から形成される．たとえば $X = x^3 - 8x + 6$ および $m = 5$ としよう．そのとき，$x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して，X の諸値は正の最小剰余 $1, 4, 3, 4, 3, 1, 4, \ldots$ を与える．ここでは初めの五つの数 $1, 4, 3, 4, 3$ が無限に繰り返されている．そうして，もしこの系列を逆方向に延長していけば，すなわち，x に負の値を与えていけば，同じ周期が項の順序が逆転された状態で現れる．それゆえ，この周期を構成する諸項以外の数は，系列全体の中に占めるべき場所をもち得ないことは明らかである．

11.

この例では，X は $\equiv 0 (mod.5)$ とも $\equiv\ 2$（$mod.5$) ともなりえないのであるから，もとより $= 0$ でも $= 2$ でもありえない．こうして方程式 $x^3 - 8x + 4 = 0$ は整数を用いて解くことはできないこと，従って，周知のように，有理数を用いても解けないことが明らかになる．一般に，X は

$$x^n + Ax^{n-1} + B^x n - 2 + \ldots + N$$

ここで $A, B, C, \ldots$ は整数，n は正の整数，という形の未知数 x の関数とするとき（あらゆる代数方程式はこのような形状に帰着されることが知られている），もし合同式 $X \equiv$ が何かある法に関

して満足されないとするなら，そのとき方程式 $X \equiv$ は有理根をもたないことは明らかである．ここにおのずと姿を現すこの判定基準については，第 8 章においていっそう詳細に究明されるであろう．ともあれこの例から，確かに，このような研究の有用さをめぐって何らかの認識を形作ることができるのである．

若干の応用

普通，算術で教えられる習わしになっている多くの事柄，たとえば，提出された数が $9, 11,$ あるいはまたそのほかのさまざまな数によって割り切れるか否かを知るための諸規則は，この章で説明された諸定理に基づいている．数 10 のあらゆる冪は**法** 9 **に関して 1** と合同である．それ故，もし提出された数が $a + 10b + 100c + \ldots$ という形をもつならば，それは法 9 に関して $a + b + c; \ldots$ と同一の最小剰余を与える．よって，もし十進法で表示された数の個々の数字を，それらが占める位置にかまわずに加えると，その和は明らかに提出された数と同一の最小剰余を与える．特に，もし前者が 9 で割り切れるならば，後者も 9 で割り切れる．その逆も正しい．除数 3 に関しても，同じ事柄が成立する．**法** 11 **に関して** $100 \equiv 1$ であるから，一般に $10^{2k} \equiv 1, 10^{2k+1} \equiv 10 \equiv -1$ であり, $a + 10b + 100c + \ldots$ という形の数は法 11 に関して $a - b + c - \ldots$ と同一の最小剰余を与える．こうしてただちに，あのすでに知られている規則が導出されるのである．同じ原理から，これらと類似のあらゆる規則が容易に引き出される．

さらにまた，上述の事柄の中には，一般の算術の計算の検証のために推奨されている諸規則の根拠が見出される．もう少し詳しく言うと，もしいくつかの与えられた数から加法，減法，乗法を通じて，あるいはまた冪を作ることによってそのほかの数を導出しなければならないというのであれば，与えられた諸数の代わりに，何かしら任意の法（普通は 9 または 11，というのは，先ほど示したように，我々の十進法のシステムでは，これらの数に関する剰余を見つけることは容易だからである）に関するそれらの最小剰余を代入するのである．そのようにして生ずる数は，提出された諸数から導出された数と合同でなければならない．もしそのようにならないとするならば，計算に誤りがあるという結論が下されることになる．

だが，これらの事柄やそのほかの類似の事柄は十分よく知られているのであるから，長々とかかわりあう必要はないであろう．

以上は『ガウス　整数論』[5]より．

3.3　第 2 章　一次合同式

13.

定理　ある与えられた素数よりも小さな二つの正の数の積は，その素数で割り切れない．

p は素数とし，a は正の数 $< p$ としよう．そのとき p よりも小さい正数 b で，$ab \equiv 0(mod,$p) という性質をもつものは存在しない．

証明

もし [この定理] が否定されるなら，どれもみな p よりも小さい数 $b, c, d, \ldots$ で，$ab \equiv 0, ac \equiv 0, ad \equiv 0, \ldots$ という性質のもつものが存在することになる．これらの数のうち，最も小さいもの

[5]数学史叢書『ガウス整数論』高瀬正仁訳　1995 年 6 月 20 日初版第 1 刷　朝倉書店 p8-12

を b とすると，b よりも小さないかなる数もここで言われている性質をもたない．明らかに $b > 1$ である．なぜなら，もし $b = 1$ であれば,（仮定によって）$ab = a < p$ となり，これは p で割り切れないことになってしまうからである．それ故，p は素数なので b を割り切ることはできないが，隣り合う二つの倍数 mb と $(m+1)b$ の間にある．$p - mb = b^{'}$ とすると，$b^{'}$ は正の数であり，しかも b より小さい．さて，我々は $ab \equiv 0(mod.p)$ と」仮定したのであるから,（第 7 条によって）$mab \equiv 0$ ともなる．そこでこれを $ap \equiv 0$ から引くと，$a(p - mb) = ab^{'} \equiv 0$ となる．すなわち $b^{'}$ は数 $b, c, d, \ldots$ のうち最小のものより小さいにもかかわらず，それらのひとつとみなさなければならないことになってしまうのである．Q.E.A.[これは不合理である]

14.

もし a も b も素数 p で割り切れないならば，積 ab もまた p で割り切れない

数 a, b の法 p に関する正の最小剰余を α, β とすると,（仮定によって）それらはどちらも 0 ではない．さて，もし $ab \equiv 0(\mathrm{mod}.p)$ ならば，$ab \equiv \alpha\beta$ より，$\alpha\beta \equiv$ でもあるが，これは先ほどの定理と両立することはできないのである．

この定理の証明はすでにユークリッド『原論』，第　巻，32．において報告されている．だが我々はこれを省きたくなかった．それというのも，一つには，近年多くの人々は証明の代わりに漠然とした計算を行ったり，そうでなければこの定理を全く顧みることがなかったからである．また一つには，我々がこれからここで用いられた方法をはるかに奥深い場所に隠されている事柄を解明するために利用するつもりだが，その方法の本質的性格はここでのいっそう簡単な場合を通じて容易に把握することができるからである．

第4章　上野健爾『代数入門１』

３世紀後半に著された中国の数学書，いわゆる『孫子算経』に次のような問題と問題の解答が与えられている．

例題 2.7　品物があるがその確かな数は分からない．それを 3 個ずつ数えれば 2 箇余り，5 個ずつ数えれば 3 個余る．また 7 個ずつ数えれば 2 個余る．品物の数はいくつか．
[解]　70,21,15 を考えると，これらの数はそれぞれ 5×7，3×7，3×5 の倍数であり，またそれぞれ 3,5,7 で割ると 1 余る数である．すると

$$2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233$$

はこの問題の解の一つであることが分かる．$3 \times 5 \times 7$ を可能な限り引く（余りが正整数であるように引く）と，最小の解 23 を得る．

この問題を合同式を使って書き直してみよう．品物の数を x 個とすると，

$$x \equiv 2 \quad (mod \quad 3), \quad x \equiv 3 \quad (mod \quad 5), \quad x \equiv 2 \quad (mod \quad 7) \qquad (2.12)$$

が成り立つ．したがって，上の問題は (2.12) を満足する数 x を求めよということになる．
解の方は何を行っているのであろうか．数 70,21,15 に関して主張していることは

$$70 \equiv 0 \quad (mod \quad 5 \times 7), \quad 70 \equiv 1 \quad (mod \quad 3)$$

$$21 \equiv 0 \quad (mod \quad 3 \times 7), \quad 21 \equiv 1 \quad (mod \quad 5)$$

$$15 \equiv 0 \quad (mod \quad 3 \times 5), \quad 15 \equiv 1 \quad (mod \quad 7)$$

である．この事実と (2.12) より数

$$233 = 2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15$$

を考えると，21,15 は 3 の倍数であるので

$$233 \equiv 2 \times 70 \equiv 2 \quad (mod \quad 3)$$

を得る．同様の考えで

$$233 \equiv 3 \times 21 \equiv 3 \quad (mod \quad 5)$$

$$233 \equiv 2 \times 15 \equiv 2 \quad (mod \quad 7)$$

であることが分かる．したがって $x = 233$ は合同式 82.12) を満足することが分かる．
ところで $x = d_1, x = d_2$ がともに (2.12) を満足すれば，合同式

$$d_1 \equiv 2 \quad (mod\ 3),\ d_1 \equiv 3 \quad (mod\ 5),\ d_1 \equiv 2 \quad (mod 7)$$

$$d_2 \equiv 2 \quad (mod\ 3),\ d_2 \equiv 3 \quad (mod\ 5),\ d_2 \equiv 2 \quad (mod 7)$$

より

$$d_2 - d_1 \equiv 0 (mod 3), \quad d_2 - d_1 \equiv 0 (mod 5) \qquad d_2 - d_1 \equiv 0 (mod 7)$$

が成り立つ．したがって，$d_2 > d_1$ とすれば $d_2 - d_1$ は 3,5,7 の最小公倍数 $3 \times 5 \times 7 = 105$ の倍数であることが分かる．

逆に $x = d_1$ が (2.12) を満足すれば $d_2 = d_1 + 105m$ も (2.12) どの満足することが分かる．

以上の論法で大切だったのは，実は 3,5,7 のどの 2 つも互いに素であるという事実であり，3,5,7 が素数であることは重要ではない．

(2.12) のような連立の合同式を満足する整数を求める問題は『孫子算経』のあとを受けて，8 世紀に秦九韶が著書『数書九章』の中で詳しく論じた．このことにちなんで，次の定理はヨーロッパでは**中国の剰余定理** (Chinese remainder theorem) と言われることが多いが，本書では現代中国で使われている呼称，**孫子の剰余定理**[1]と呼ぶことにする．

定理 2.18（孫子の剰余定理」）　正整数 $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ はどの 2 つも互いの素であると仮定する．このとき，任意の整数 $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ に対して，

$$a \equiv a_1 \quad (mod \quad m_1), \quad a \equiv a_2 \quad (mod \quad m_2) \quad , \ldots, \quad a \equiv a_k \quad (mod \quad m_k) \qquad (2.13)$$

を満足する整数 a が存在する．整数 a は $m_1 \cdot m_2 m_k$ を法として一意的に定まる．したがって，特に上の合同式を満足し，

$$0 < a < m_1 m_2 \ldots m_k$$

を満足する正整数 a はただ 1 つ存在する．

上野健爾『代数入門１』[2]より

---

[1]孫氏の剰余定理となっているが「孫子」の誤植であろう

[2]岩波講座　現代数学への入門２　「代数入門１」1995 年 11 月 6 日発行　岩波書店　p31–33

第5章　竹之内脩著『関孝和の数学』より

関孝和は『括要算法』享巻で「翦管術」として整数論を論じている．ここでは，竹之内脩著『関孝和の数学』より見ることにする．

5.1　『括要算法』享巻

『括要算法』享巻（第2巻）は，二つの部分から成り，最初の部分では諸約之法として整数問題の一般を扱い，後の部分では，翦管術が扱われている．

約という字は，つづめると読んで割るの意味でも使われるが，一般に計算法を約と呼んでいる．

4.1　諸約之法

4.1.1　互約

二つの自然数の最小公倍数を変えずに，互いに素な2数にすること．これは，次の逐約とともに，後の翦管術解の中で，活用される．

以下では，二つの数に対して，その最大公約数を，ユークリッドの互助法で求める．このことを互いに減ずるといっている．例えば，30と84の場合だと，

$$84 - 30 = 54, \quad 54 - 30 = 24, \quad 30 - 24 = 6$$

として，減算を繰り返すことにより，互助法が実行される．このことにより互いに減ずるといっているのであろう．また，得られた最大公約数を等級と呼んでいる．

◆ 6, 8を互いに約す. 6 $\longrightarrow$ 3, 8は約さず

6と8を互いに減ずると最大公約数2を得る．この2で6を約し, 3とする.

3と8を互いに減ずると最大公約数1を得る. 1になったらそのままおいておく.

○又の術. 8と6を互いに減ずると最大公約数2を得る.

この2で8を約すと4．4と6を互いに減ずると最大公約数2を得る.
この2で4に因して8,6を約して3.

[註　これは面白い関係である.
すなわち，6=2 × 3，8=2 × 4で, 最大公約数2で約して3,8とすればさらに公約数は出ないが, 6,4とすると，また公約数2が出てしまう．そこで，6のほうを2で割り，4を2倍するのである．このように，うまくやれば1回で互いに素な関係に到達することもあるが，次の例ではどちらでやってもうまくいかない．苦心のあるところである．

◆ 36 と 48 を互いに約す．　$36 \longrightarrow 9$，$48 \longrightarrow 16$

36 と 48 を互いに減ずると最大公約数 12 を得る．
この 12 で 3 6 を約すと 3
この 3 を 3 に因して 9,48 を約して 16
○又の術，48 と 36 を互いに減ずると最大公約数 12 を得る．
この 12 で 48 を約すと 4.4 と 48 を互いに減ずると最大公約数 4 を得る．
この 4 で 4 に因して 16．36 約して 9.

◆ 30 と 54 を互いに約す．$30 \longrightarrow 5$，54 は約さず

30 と 54 を互いに減ずると最大公約数 6 を得る．
この 6 で 54 を約すと 9．9 と 30 を互いに減ずると最大公約数 3 を得る．
この 3 で 9 に因して 27．30 を約して 10.

4.1.2　逐約

◆ 105,112,126 を逐約する．

$$105 \longrightarrow 5, \quad 112 \longleftrightarrow 16, \quad 126 \longrightarrow 63$$

105 と 112 は，互約の術で，15 と 112 になる．
15 と 126 は，互約の術で，5 と 126 になる．
112 と 126 は，互約の術で，16 と 63 になる．

◆ 105,112,126,168 を逐約する．

$$105 \longrightarrow 5,\ 112 \longrightarrow 16, \quad 126 \longrightarrow 9,\ 168 \longrightarrow 7$$

105 と 112 は，互約の術で，15 と 112 になる．
15 と 126 は，互約の術で，5 と 126 になる．
5 と 168 は，互約の術で，皆約さず．
112 と 126 は，互約の術で，16 と 63 になる．
16 と 168 は，互約の術で，16 と 21 になる．
63 と 21 は，互約の術で，9 と 7 になる．
以下略
以下では方法の題名だけにする．

4.1.3　齋約

これは，最小公倍数を求めることである．

4.1.4　遍約

いくつかの自然数をそれらの最大公約数で約すこと．

4.1.5　増約 増数が 1 を超えるものには極数はない

ここでは，無限等比級数の和（極数）を扱っている．初項を原といい，公比を増数という．

4.1.6　損約増数が $\frac{1}{2}$ を超えるものには極数はない．

これは，初項 a, 損比 r に対して，

$$a - ar - ar^2 - ar^3 -$$

の計算である．この和は，

$$a(1 - \frac{r}{1-r}) = a\frac{1-2r}{1-r}$$

となるが，$r < \frac{1}{2}$ ならば値が負になるので，極数無しとしているであろう．

4.1.7　零約

零というのは余りのことである．ある数を書いたとき，それがそれでおしまいでなく，そのあとに続くものがあるとき，それを零という．ここでの零約というのは，そういうものがあるとき，それを分数表示しようということである．

4.1.8　遍通

これは，分数の通分である．

◆分数 $\frac{5}{6}$ と $\frac{3}{8}$ を遍(あまね)く通す．$\frac{5}{6} \longrightarrow \frac{20}{24}, \frac{3}{8} \longrightarrow \frac{9}{24}$

分母の 6 と分母の 8 から，齏約の術により，同分母とする．各分子を之に乗じ各分母で之を約し，答えが得られる．

4.1.9　剰一

剰とは余り．これは，一次不定方程式

$$Ax - By = 1$$

の解を求める方法を論ずるものである．

A, B が互いに素な数のとき，互除法でやっていくと最終的に 1 が得られ，それから逆算すれば，$Ax - By = 1$ の解に到達することができる．1 組の解が見つかれば，x には B の倍数を加え，y には A の同じ倍数を加えることによっていくらでも解が得られるわけだから，そのような x の最小のものが見つかればよい．

このことを論ずるわけであるが，2 例挙げられている．以下，現代的記法で解説する．

◆ $19x - 27y = 1$ の解を求める．　$19x = 190$

27 ÷ 19 = 1　余り　8　… 甲

19 ÷ 8（甲余り）= 2　余り　3　… 乙

8（甲余り）÷ 3（乙余り）= 2　余り　3　… 丙

3（乙余り）÷ 2（丙余り）= 1　余り　1　… 丁

余りが 1 になったところでやめる.

（甲商）×（乙商）+1 = 3　…· 子
（子）×（丙商）＋（甲商）= 7　…· 丑
（丑）×（丁商）＋（子）= 10　…· $= x$
$19x = 190$

4.2.3　翦管術 3（百五減算の解）

今物有り，総数を知らず．只云う，3 にて除すれば余り 2 箇，5 にて除すれば余り 1 箇，7 にて除すれば余り 5 箇．総数幾何と問う．

答えて曰く，総数 26 箇．

術に曰く，3 で割った余りに 70 を掛け，5 で割った余りに 21 を掛け，7 で割った余りに 15 を掛けて加える．

$$2 \times 70 + 1 \times 21 + 5 \times 15 = 236$$

105 を引いていくと，余り 26．これが総数である．

この部分については既に述べたので以下は省略する．

5.2　『算数書』の互除法

『算数書』の竹簡は 1984 年湖北省江陵県（現在　荊州荊州区）張家山 246 号墓から 1200 枚余りが発掘された．その中に『算数書』と題される数学書があった．同時に発掘された歴譜の最後の年は呂后二年（紀元前 186 年）となっていた．従って，この『算数書』の成書年代は紀元前 186 年以前に書かれていたことになる．[1]

この『算数書』の中に「ユークリッドの互除法」と同様な問題がある．

> 約分　約分術曰：以子除母（母）亦除子,（子）母數交等者，即約之矣有（又）曰,
> 約分朮（術）曰：可半,（半）之，可令若干一,（若干一）其一朮（術）曰：以分子除母
> 少（小）以母除子（子）母等以為法，子母各如法而成一
> 不足除者可半,（半）母亦半子
> 二千一十六分之百六十二　約之百一十二分之九[2]

城地　茂「『算数書』日本語訳」『和算研究所紀要』4（2001）：p26 には

> 7. 約分
> 約分術に言う．分子で分母を割る．また分母（の余り）で，分母を割る．分子と分母（の相互の割り算）を数回繰り返して等しくなったら，それを約せばよい．
> また言う．約分術に言う．半分にする．(明確な約数が）分かるものはそれで割る．

[1]彭浩著「張家山漢簡『算数書』註釋」北京：科学出版社 2001 年 7 月第一版　p1-2
[2]彭浩著「張家山漢簡『算数書』註釋」北京：科学出版社 2001 年 7 月第一版　p43

もう一つの術に言う．分子で分母を割る．少ない（＝余りの）分母で，分子を割る．分子と分母が等しくなったら，それを「法」とし，分子，分母をそれぞれ「法」で割る．割らなくても，半分にできるものは，分母も分子も半分にする．

$$\frac{162}{2016}\text{は，約分すると}\frac{9}{112}\text{となる}$$

第６章　『算数書』成立年代について

『孫子算経』の「今有物不知其数三三之剰二五五数之剰三七七数剰二　問物幾何」の問題とその解法の起源は「互除法」にあると思われる．
上野健爾著『代数入門１』でもそのことは述べられている．この「互除法」は古代中国では上記の『算数書』の「約分」で記述されている．この「互除法」の記述された年代が**紀元前** 186 **年以前**に書かれていたことになる．これは数学史の中では稀有なことである．古代中国の数学書の成立年代は殆ど不明であったが，同時に発掘された竹簡によってその成立年代が明らかになったのである．

『算数書』,『数』,『算術』という数学書が中国で相次いで発掘され，その成立年代が明らかになっている．これらの数学書の発掘された意義はそれまでは成立年代が不明のため，推測に過ぎなかった成立年代が明らかになるとで，古代中国における数学の体系化の年代が特定できたことである．

『孫子算経』の「今有不知其数」の問題とその解法はキリスト教徒によって西洋に伝えられ，西洋の数学で「中国剰余定理」として現代まで伝えられている稀有な例であろう．