友愛数の平行移動

飯高 茂, (放送大学学生, 学習院大学名誉教授)

1　友愛数

友愛数はピタゴラスの時代にすでに知られていた.

$\sigma(a)$ は自然数 a の約数の総和を示す. $s(a) = \sigma(a) - a$ とおくとき $b = s(a), b = s(a), b \neq a$ を満たす (a, b) を友愛数という.

ピタゴラスの時代に 最小の友愛数 (220,284) が知られていた. とくに 220 が友情を示す数として旧約聖書にもでているという説もある.

$220 = 10 * 22 = 2^4 * 5 * 11$ について ,

$\sigma(220) = 7 * 6 * 12 = 504, b = s(a) = 504 - 220 = 284 = 4 * 71,$

$\sigma(b) = 7 * 72 = 504, b = 504 - 284 = 220$

計算は簡単ではない. それにもかかわらず 古代の東方世界で (220,284) が友愛を示すということが知られていたそうである.

近年になって, 友愛数を大量に生産するアルゴリズムも工夫され, それを使ったプログラムにより 1 晩で 100 万個もの友愛数がみつかることもあるという. それにもかかわらず, 友愛数が無数にあることの証明はできていない.

2019 年 5 月現在では 10 億個以上発見されているそうである. (Total known amicable pairs: 1,223,393,792 By wiki).

定義 1 $F_k(a) = s(a) + k$ とおく. $b = F_k(a), a = F_k(b), a \neq b$,(a, b) を $k-$ 友愛数という.

あるいは (a, b) を 平行移動 k の友愛数と呼んでもいい.

k が小さい場合は先行研究がある.

- $k = 0$ のとき (a, b) を (元祖) 友愛数
- $k = -1$ のとき (a, b) を婚約数. (婚約したが破談).
- $k = 1$ のとき (a, b) を結婚数. (友情から結婚にいたって 1 子誕生).

表 1: $k = 0$ すなわち友愛数

a	素因数分解	型	b	素因数分解
284	$2^2 * 71$	A	220	$2^2 * 5 * 11$
6368	$2^5 * 199$	A	6232	$2^3 * 19 * 41$
18416	$2^4 * 1151$	A	17296	$2^4 * 23 * 47$
66992	$2^4 * 53 * 79$	D	66928	$2^4 * 47 * 89$
76084	$2^2 * 23 * 827$	D	63020	$2^2 * 5 * 23 * 137$
123152	$2^4 * 43 * 179$	D	122368	$2^9 * 239$
153176	$2^3 * 41 * 467$	D	141664	$2^5 * 19 * 233$
176336	$2^4 * 103 * 107$	D	171856	$2^4 * 23 * 467$
180848	$2^4 * 89 * 127$	D	176272	$2^4 * 23 * 479$
203432	$2^3 * 59 * 431$	D	185368	$2^3 * 17 * 29 * 47$
365084	$2^2 * 107 * 853$	D	280540	$2^2 * 5 * 13^2 * 83$
389924	$2^2 * 43 * 2267$	D	308620	$2^2 * 5 * 13 * 1187$
399592	$2^3 * 199 * 251$	D	356408	$2^3 * 13 * 23 * 149$
455344	$2^4 * 149 * 191$	D	437456	$2^4 * 19 * 1439$
514736	$2^4 * 53 * 607$	D	503056	$2^4 * 23 * 1367$
669688	$2^3 * 97 * 863$	D	600392	$2^3 * 13 * 23 * 251$
686072	$2^3 * 191 * 449$	D	609928	$2^3 * 11 * 29 * 239$
691256	$2^3 * 71 * 1217$	D	624184	$2^3 * 11 * 41 * 173$
712216	$2^3 * 127 * 701$	D	635624	$2^3 * 11 * 31 * 233$
796696	$2^3 * 53 * 1879$	D	726104	$2^3 * 17 * 19 * 281$
901424	$2^4 * 53 * 1063$	D	879712	$2^5 * 37 * 743$
980984	$2^3 * 47 * 2609$	D	898216	$2^3 * 11 * 59 * 173$
1043096	$2^3 * 23 * 5669$	D	998104	$2^3 * 17 * 41 * 179$

これらの素因数分解を観察すると次のことが見て取れる.
A 型 (すなわち素因数分解が $2^e p$), D 型 (素因数分解: $2^e qr$) のペアが多い.
D 型 と D 型のペアもある. 奇数 (H 型) 同士のペアも散見する.
A 型 と D 型 のペアは有限個しかないようだ. これらを決定出来たら面白い.
偶数 と奇数のペアが存在しないことは奇数の完全数の不存在問題と同様の難問らしい.
奇数の友愛数は 3 の倍数が多いが, 6 で割れないが 5 の倍数の例はある.

友愛数の素因数分解の表を詳しく検討した結果 $a = 2^e r, b = 2^f pq$ という形の解を求めてみたいという気になった.

$e = f$ の場合はオイラーにより深く研究されていた.
850 年頃にサービト・イブン＝クッラの法則が発見された.(Wiki の日本語版にはとんでもない印刷ミスがある)

$$p = 3 * 2^{n-1} - 1, q = 3 * 2^n - 1, r = 9 * 2^{2n-1} - 1,$$

ここで (p, q, r) は素数) $A = 2^n pq, B = 2^n r$ は友愛数.

2 Euler の結果

Euler は友愛数について次の結果をえていた. ただし $co\sigma(a) = \sigma(a) - a$ とおく.

定理 1 (p, q, r) は次式で定義された素数とする. ここで $n, m (n > m)$ は自然数.
$K = 2^{n-m} + 1$ とおくとき $p = 2^m K - 1, q = 2^n K - 1, r = 2^{n+m} K^2 - 1$.
$A = 2^n pq, B = 2^n r$ について, $co\sigma(A) = B$. さらに $co\sigma(B) = A$.
すなわち (A, B) は友愛数.

Euler は偶数の完全数 a について, $a = 2^n p, (p = 2^{n+1} - 1$:メルセンヌ素数) と書けることを示していた.
私は定年退職後, 放送大学の学生として登録し東京多摩学習センターに所属しほぼ毎日通学している.
放送大学の学生活動として, 数学クラブを学習センターに立ち上げサークル活動をしている. 年度初めにはサークルの勧誘を行う.
数学クラブでは, 友愛数, 結婚数, 婚約数などを説明します, とアナウンスすると女子学生を含む新入生が参加てしてきた.
そこで友愛数についてその平行移動を調べることにした.

定年後の仕事として, 私はいくつかのカルチャースクールで少人数の希望者と数学のゼミのようなことをしている.
実際には朝日カルチャーのほか, 京王永山駅のそばのマンションで, 毎日カルチャースクールに登録し参加者の (小学生) 梶田君と, 中高年 2 人を含めた 4 人で数学の学習と研究をしている.

そこで友愛数を取り上げ詳しく検討し数学クラブでの友愛数の紹介に備えることにした.

手始めに Euler の研究を取り上げた.

$A = 2^n pq, B = 2^n r$　について, $co\sigma(A) = B$ を計算で確かめることになった. 4 人で議論しながら計算したが複雑な計算に時間を取られ時間内にできなかった.

帰宅してから時間をかけて計算しようやくできた. それが次の証明である.

$N = 2^{n+1} - 1$ とおくとき

$co\sigma(A) = co\sigma(2^n pq) = N(p+1)(q+1) - 2^n pq.$

$p + 1 = 2^m K, q + 1 = 2^n K, pq = 2^{n+m}K^2 - K(2^n + 2^m) + 1$ に注意する.

$$
\begin{aligned}
N(p+1)(q+1) - 2^n pq &= N(2^{n+m}K^2) - 2^n(2^{n+m}K^2 - K(2^n + 2^m) + 1) \\
&= (2^{n+1} - 1)(2^{n+m}K^2) - 2^n(2^{n+m}K^2 - K(2^n + 2^m) + 1) \\
&= 2^{2n+m+1}K^2 - 2^{n+m}K^2 - 2^n(2^{n+m}K^2 - K(2^n + 2^m) + 1) \\
&= 2^n(2^{n+m}K^2 - 2^m K^2 + K(2^m + 2^n) - 1) \\
&= 2^n X.
\end{aligned}
$$

$r = 2^{n+m}K^2 - 1$ を用いると, $X = 2^{n+m}K^2 - 1 - 2^m K^2 + K(2^m + 2^n) = r + L$ となる.

ここで, $L = -2^m K^2 + K(2^m + 2^n) = KL_0$ とおくと

$L_0 = -2^m K + (2^m + 2^n) = -(2^m + 2^n) + (2^m + 2^n) = 0.$

したがって, $co\sigma(A) = N(p+1)(q+1) - 2^n pq = 2^n r = B$. よって, $co\sigma(A) = B$

同様にして $co\sigma(B) = A$ も示される.

私は計算の確認が終わったころ, 小学 5 年生の梶田光君から証明ができたとのメールがあり添付ファイルに見事な証明が書かれていた.

2.1　$co\sigma(B) = A$, 梶田君の証明

$A = 2^n pq, B = 2^n r$　について,$\sigma(A) - A = co\sigma(A) = B$ は示されたので $\sigma(A) = A + B$. $\sigma(B) = A + B$ を示せばよい.

上記にある証明で $co\sigma(A) = B$ はできている. $\sigma(A) = N(p+1)(q+1) = N(r+1) = \sigma(B)$ が成り立つから, $\sigma(B) = \sigma(A) = A + B$.

3　オイラーの式の導出

オイラーの式は複雑ではあるが計算してみると味わいのある式である.

オイラーは次の 2 つの解

1).$B = 284 = 2^2 * 71, A = 220 = 2^2 * 5 * 11$,

2). $B = 18416 = 2^4 * 1151, A = 17296 = 2^4 * 23 * 47$

をもとに友愛数の例を与える式を作った, という仮説のもとで議論を進める.

Proof

$A = 2^n pq, B = 2^n r$　について, $co\sigma(A) = B$, $co\sigma(B) = A$ が成り立つと仮定する.

$B = co\sigma(A) = \sigma(A) - A, A = co\sigma(B) = \sigma(B) - B$ により, $\sigma(A) = A + B = \sigma(B)$.

$N = 2^{n+1} - 1$ とおくとき $\sigma(A) = N(p+1)(q+1)$,$\sigma(B) = N(r+1)$ により,$N(p+1)(q+1) = N(r+1)$. 整理して, $(p+1)(q+1) = (r+1)$.

例 2 について試みる. $p = 23, q = 47, r = 1151$ なので

$p+1 = 24 = 2^3 * 3, q+1 = 48 = 2^4 * 3, r+1 = 1151+1 = 2^7 * 3^2$.

$(p+1)(q+1) = r+1$ により, $p+1, q+1$ は偶数なので, 奇数 K_1, K_2 を用いて $p+1 = 2^n K_1, q+1 = 2^m K_2$ としてみると $r+1 = (p+1)(q+1) = 2^{n+m} K_1 K_2$.

$2^n pq = A = co\sigma(B) = \sigma(B) - B = N(r+1) - 2^n r = 2^n r + N - r$ により

$r = 2^n r + N - 2^n pq = 2^n(r - pq) + N$.

ゆえに $r = N + 2^n(r - pq)$.

$r+1 = (p+1)(q+1) = 2^{n+m}K^2$, $r = 2^{n+m}K^2 - 1$.

ここで, p, q の式の対称性により $n \geq m$ を仮定する.

$2^n pq = A = co\sigma(B) = \sigma(B) - B = N(r+1) - 2^n r = 2^n r + N - r$ により

$r = 2^n r + N - 2^n pq = 2^n(r - pq) + N$. ゆえに $r = N + 2^n(r - pq)$.

$p = 2^n K - 1, q = 2^m K - 1, r = 2^{n+m}K^2 - 1$ によって, $r - pq = -2 + K(2^n + 2^m)$.

$$\begin{aligned}2^{n+m}K^2 - 1 &= r \\ &= N + 2^n(r - pq) \\ &= N + 2^n(-2 + K(2^n + 2^m)) \\ &= -1 + 2^n K(2^n + 2^m)).\end{aligned}$$

ゆえに $2^{n+m}K^2 = 2^n K(2^n + 2^m)$.

$2^m K = 2^n + 2^m$ によって,$K = 2^{n-m} + 1$. これで証明が完了.

$p = 2^n K_1 - 1, q = 2^m K_2 - 1, r = 2^{n+m} K_1 K_2 - 1$ によって,

$r - pq = -2 + (2^n K_1 + 2^m K_2)$.

2^n を掛けると $2^n(r - pq) = -2^{n+1} + 2^n(2^n K_1 + 2^m K_2)$.

$r = N + 2^n(r - pq), -2^{n+1} = -N - 1$ を用いて

$r - N = 2^n(r - pq) = -2^{n+1} + 2^n(2^n K_1 + 2^m K_2) = -1 - N + 2^n(2^n K_1 + 2^m K_2)$.

それゆえ

$$r + 1 = 2^n(2^n K_1 + 2^m K_2).$$

一方 $r+1=(p+1)(q+1)=2^{n+m}K_1K_2$ により,

$$2^{n+m}K_1K_2=2^n(2^nK_1+2^mK_2).$$

よって, $2^mK_1K_2=2^nK_1+2^mK_2$. これより $2^mK_2(K_1-1)=2^nK_1$.

$n\geq m$ を用いて式を整理し $K_2(K_1-1)=2^{n-m}K_1$.

ここで K_1-1,K_1 は互いに素なので整数 α により $(K_1-1)\alpha=2^{n-m}$ と書ける.

とくに $\alpha>1$ なら α は偶数.

$K_2(K_1-1)=2^{n-m}K_1$ によって, $K_2=\alpha K_1$. α 　は奇数となるので $\alpha=1$.

$(K_1-1)\alpha=2^{n-m}$ によると　 $K_1-1=2^{n-m}$. ゆえに $K_1=2^{n-m}+1$.

$K_2(K_1-1)=2^{n-m}K_1$ を用いると $K_2=K_1$.

End.

$m<n<40$ の範囲でオイラーの式の与える友愛数をパソコンで求めたところ, $(n,m)=(2,1),(4,3),(7,6),(8,1)$ のときのみ (p,q,r) は素数.(がっかりさせられる)

表 2: $k=0$ 友愛数,Euler の式で (p,q,r) 素数の場合

$m=1,n=2$	素因数分解		素因数分解
220	2^2*5*11	284	2^2*71
$m=3,n=4$			
17296	$2^4*23*47$	18416	$2^4*1151(Fermat)$
$m=6,n=7$			
9363584	$2^7*191*383$	9437056	$2^7*73727(Descartes)$
$m=1,n=8$			
2172649216	$2^8*257*33023$	2181168896	$2^8*8520191$

4　婚約数と結婚数の素因数分解

偶数 と奇数のペアばかりらしい.

偶数 と奇数のペアばかりらしい. しかも素因数分解の型が複雑なのでわからないまま H 型にしてある.

表 3: $k=-1$ 婚約数

a	素因数分解	型	b	素因数分解
75	$3*5^2$	H	48	2^4*3
195	$3*5*13$	H	140	2^2*5*7
75495	$3*5*7*719$	H	62744	$2^3*11*23*31$
2295	3^3*5*17	H	2024	$2^3*11*23$
16587	$3^2*19*97$	H	8892	$2^2*3^2*13*19$
20735	$5*11*13*29$	H	9504	2^5*3^3*11
1925	5^2*7*11	H	1050	$2*3*5^2*7$
1648	2^4*103	A	1575	3^2*5^2*7
6128	2^4*383	A	5775	$3*5^2*7*11$

表 4: $k=1$ すなわち結婚数

a	素因数分解	型	b	素因数分解
11697	$3*7*557$	H	6160	$2^4*5*7*11$
16005	$3*5*11*97$	H	12220	$2^2*5*13*47$
28917	3^5*7*17	H	23500	2^2*5^3*47
76245	$3*5*13*17*23$	H	68908	$2^2*7*23*107$
339825	$3*5^2*23*197$	H	249424	$2^4*7*17*131$
570405	$3*5*11*3457$	H	425500	$2^2*5^3*23*37$
871585	$5*11*13*23*53$	H	434784	$2^5*3*7*647$
697851	$3^2*7*11*19*53$	H	649990	$2*5*11*19*311$
678376	$2^3*19*4463$	D	660825	$3^3*5^2*11*89$

以前のスーパー完全数の研究において m だけ平行移動を考えた．その結果 $m=-18,-58,-14$ などの場合に解としてスーパー双子素数が組織的な形を取りながら現れた．

これは私にとって大きな成功体験であった．そこで k 友愛数の k をいろいろ変えながら分かりやすい形の解を探してみた．

$k=-16$ のとき特に美しい結果が出てきた．これは望外の成功であった．

5　$k=-16$ でのスーパー双子素数解

ここで主な解として $a=4p, b=12q, (p,q)$:奇素数, の解が多いことに注意する．

$F(a)=F_{-16}(a)$ とおくとき $F(a)=\sigma(a)-a-16$ となる．

$a=4p, b=12q, (p,q$:奇素数$)$ を解と仮定する．

$a=4p$ のとき　$F(a)=\sigma(a)-a-16=7(p+1)-16=3p-9=b=12q$ により $p-3=4q$.

表 5: $k=-16$

	a	素因数分解	b	素因数分解
$k=-16$				
	92	2^2*23	60	2^2*3*5
	124	2^2*31	84	2^2*3*7
	188	2^2*47	132	2^2*3*11
	284	2^2*71	204	2^2*3*17
	316	2^2*79	228	2^2*3*19
	508	2^2*127	372	2^2*3*31
	604	2^2*151	444	2^2*3*37
	668	2^2*167	492	2^2*3*41
	764	2^2*191	564	2^2*3*47
	956	2^2*239	708	2^2*3*59
	1436	2^2*359	1068	2^2*3*89
	1724	2^2*431	1284	$2^2*3*107$
	1756	2^2*439	1308	$2^2*3*109$
	1084	2^2*271	804	2^2*3*67
	2396	2^2*599	1788	$2^2*3*149$
	2428	2^2*607	1812	$2^2*3*151$
	2524	2^2*631	1884	$2^2*3*157$
	2876	2^2*719	2148	$2^2*3*179$
	2908	2^2*727	2172	$2^2*3*181$
	1912	2^3*239	1672	$2^3*11*19$
	664	2^3*83	580	2^2*5*29
	1106	$2*7*79$	798	$2*3*7*19$
	2390	$2*5*239$	1914	$2*3*11*29$

次に $p-3=4q$ を用いると $b=12q$ のとき　$F(b)=28(q+1)-12q-16=16q+12=4(4q+3)=4p=a$ となる.

定理 2 (a,b) は -16 友愛数とする. $F(a)=F_{-16}(a)=\sigma(a)-a-16$ とおくとき $b=F(a), a=F(b), a\neq b$ と仮定する.

そこで解は $a=2^e p, b=2^e qr, (p,q,r<q$:奇素数$)$ の形になると仮定すると, $e=2, r=4, a=4p, b=12q$ さらに $p=4q+3$ を満たす.

ここで $(q,p=4q+3)$ を満たすので (q,p) はスーパー双子素数.

今度はより一般な場合を扱ってみよう.

(a,b) は k 友愛数とする.

$F(a)=F_k(a)=s(a)+k$ とおくとき $b=F(a), a=F(b), a\neq b$ となる.

解は AD 型 と仮定する. すなわち $a=2^e p, b=2^e qr, (p,q,r<q$:奇素数$)$ の形になると仮定する.

$a=2^e p$ について, $N=2^{e+1}-1$ とおいて $F(a)=\sigma(a)-a+k=N(p+1)-2^e p+k=Np-2^e p+N+k=2^e p-p+N+k.$

$F(a)=b=2^e qr$ により, $2^e p-p+N+k=2^e qr.$

ゆえに $2^e p=p-N-k+2^e qr.$

整理して $(2^e-1)p=-N-k+2^e qr.$

$b=2^e qr$ について, $\Delta=q+r$ とおくと

$$
\begin{aligned}
F(b) &= \sigma(b)-b+k \\
&= N(q+1)(r+1)-2^e qr+k \\
&= Nqr-2^e qr+k+N(\Delta+1) \\
&= 2^e qr-qr+N(\Delta+1)+k \\
&= a \\
&= 2^e p.
\end{aligned}
$$

ゆえに $2^e qr-qr+k+N(\Delta+1)=2^e p$ を得る.

$2^e p=p-N-k+2^e qr$ を代入して

$$2^e qr-qr+k+N(\Delta+1)=p-N-k+2^e qr.$$

これより

$$p=2^e qr-qr+k+N(\Delta+1)-(-N-k+2^e qr)=2k-qr+N\Delta+2N.$$

$p=2k-qr+N\Delta+2N$ を $(2^e-1)p=-N-k+2^e qr$ に代入すると

$$(2^e-1)(2k-qr+N(\Delta+2)=-N-k+2^e qr.$$

$2k(2^e-1)-(2^e-1)qr+(2^e-1)N(\Delta+2)=-N-k+2^e qr$

$-(2^e-1)qr$ を移項して

$$2k(2^e-1)+(2^e-1)N(\Delta+2)=-N+16+2^e qr+(2^e-1)qr=-N+-k+Nqr.$$

$2k(2^e-1)=2k(2^e-1)=k(N-1)$ と直すと

$$k(N-1)+(2^e-1)N(\Delta+2)=-N-k+Nqr.$$

N を除して

$$k+(2^e-1)(\Delta+2)=-1+qr.$$

$\Delta = q + r$ によって,$\eta = 2^e - 1, q_0 = q - \eta, r_0 = r - \eta,$ とおくと, $k + 1 + \eta(\Delta + 2) = qr.$

$$q_0 r_0 = qr - \eta\Delta + \eta^2 = \eta^2 + 2\eta + k + 1.$$

$\Theta = \eta^2 + 2\eta + k + 1 = (2^e - 1)(2^e + 1) + k + 1 = 2^{2e} + k$ とおくとき $q_0 r_0 = \Theta$. これを基本等式という.

6 $\Theta = 0$ の場合

指数 $e > 1$ に対して $k = -2^{2e}$ とおく. $\Theta = 0$ になり基本等式は $q_0 r_0 = \Theta = 0.$. ここで $q > r$ と仮定しておく. $r_0 = 0; r = \eta = 2^e - 1$. q_0 はとくに定まらないが $q = q_0 + \eta > r = \eta$ は素数だけ確認する. さらに $b = 2^e \eta q = 2^e(2^e - 1)q$.

$a = 2^e p, b = 2^e rq$ であるが公式 $p = 2k - qr + N\Delta + 2N$ により p が決定される.

$$p = 2k - qr + N\Delta + 2N = -2 * 2^{2e} - qr + (2^{e+1} - 1))(q + r) + 2.$$

q で整理する.

$$\begin{aligned}
p &= -2 * 2^{2e} - qr + (2^{e+1} - 1))(q + r) + 2 \\
&= -2 * 2^{2e} + (2^{e+1} - 1 - r)q + (2^{e+1} - 1)r + 2 \\
&= -2 * 2^{2e} + (2^{e+1} - 2^e)q + (2^{e+1} - 1)(2^e - 1) + 2 \\
&= -2 * 2^{2e} + 2^e q + 2^{2e+1} - 2^e + 2^{e+1} - 1 \\
&= 2^e q + 2^e - 1
\end{aligned}$$

かくして得られた式は

$$p = 2^e q + 2^e - 1.$$

$e = 1$ のとき $k = -2^2 = -4$, $p = 2q + 1$ となるが, $\eta = 2 - 1 = 1, r = 1$. これは素数ではない.

1. $e = 2$ のとき $k = -2^4 = -16$, $p = 4q + 3, b = 2^e(2^e - 1)q = 12q.$
2. $e = 3$ のとき $k = -2^6 = -64$, $p = 8q + 7, b = 2^e(2^e - 1)q = 56q.$
3. $e = 4$ のとき $k = -2^8 = -256$, $p = 16q + 15, b = 2^e(2^e - 1)q = 240q.$

念のため次の結果を示す.

命題 1 $p = 2^e q + 2^e - 1, r = 2^e - 1, k = -2^{2e}$ を満たすとき, $a = 2^e p, b = 2^e rq$ は 平行移動 $k = -2^{2e}$ の友愛数.

Proof.

$F(\alpha)=\sigma(\alpha)-\alpha+k$ とおくとき $a=2^ep, b=2^erq$ について, $F(a)=b, F(b)=a$ を示せばよい.

$N=2^{e+1}-1$ とおくとき $\sigma(a)=N(p+1)=Np+N=2^{e+1}p-p+N$.

$$\begin{aligned} F(a) &= 2^{e+1}p-p+N-2^ep+k = 2^ep-p+2^{e+1}-1-2^{2e} \\ &= (2^e-1)p+2*2^e-1-2^{2e} \\ &= (2^e-1)p-(2^e-1)^2 \end{aligned}$$

最右端の式 $(2^e-1)p-(2^e-1)^2$ を X とおく.

一方, $b=2^erq=2^e(2^e-1)q=(2^e-1)2^eq$ を変形して.

$p=2^eq+2^e-1$ に 2^e-1 を乗じて $(2^e-1)p=(2^e-1)2^eq+(2^e-1)^2$.

ゆえに,

$$X=(2^e-1)p-(2^e-1)^2=(2^e-1)2^eq=b.$$

よって, $X=b$.

End.

7 -64 だけ平行移動した場合

1. $e=1$. $\Theta=4+k$.

$k=-4$ ならば $\eta=2^e-1=1$, $q_0r_0=0, q_0>r_0$ により, $r_0=0, r=1$. r は素数なので不適.

2. $e=2$. $\eta=2^e-1=3, N=7, q_0=q-3, r_0=r-3, \Theta=16+k$.

$k=-16$ ならば $q_0>r_0$ により, $r_0=0, r=3$.

$b=6q$, $p=+2k-qr+N\Delta+2N=+2k-3q+7*(q+3)+7*2=4q+2k+35=4q+3$.

よって, $a=4p=2^2*p, b=2^2*q*r=12q$.

3. $e=3$. $\eta=2^e-1=7, N=15, q_0=q-7, r_0=r-7, \Theta=16+k$.

$k=-16$ ならば $r_0=r-7=0$. よって, $r=7, q>7$ は 素数なので $b=8qr=56q$.

Proof.

$a=2^ep$ について, $N=2^{e+1}-1$ とおいて

$F(a)=\sigma(a)-a-16=N(p+1)-2^ep-16=Np-2^ep+N-16=2^ep-p+N-16$.

$F(a)=b=2^eqr$ により, $2^ep-p+N-16=2^eqr$.

ゆえに $2^ep=p-N+16+2^eqr$.

End.

このように素因数分解の型を決めて平行移動の友愛数の決定に成功したのである．これはオイラーの友愛数の構成式を連想させるものがある.

表 6: $e=3, k=-64, a=8p, b=56q$

a	素因数分解	b	素因数分解
248	2^3*31	168	2^3*3*7
376	2^3*47	280	2^3*5*7
1528	2^3*191	1288	2^3*7*23
1912	2^3*239	1624	2^3*7*29
3064	2^3*383	2632	2^3*7*47
3448	2^3*431	2968	2^3*7*53
3832	2^3*479	3304	2^3*7*59
5752	2^3*719	4984	2^3*7*89
6904	2^3*863	5992	$2^3*7*107$
7288	2^3*911	6328	$2^3*7*113$
8824	2^3*1103	7672	$2^3*7*137$
11512	2^3*1439	10024	$2^3*7*179$
12664	2^3*1583	11032	$2^3*7*197$
14584	2^3*1823	12712	$2^3*7*227$
14968	2^3*1871	13048	$2^3*7*233$
16504	2^3*2063	14392	$2^3*7*257$
16888	2^3*2111	14728	$2^3*7*263$
18808	2^3*2351	16408	$2^3*7*293$

7.1 $k=0$ のとき

$\Theta = 2^{2e}+k = 2^{2e}$ なので $\eta = 2^e-1, q_0r_0 = 2^{2e}$. これより , $q_0 = 2^s, r_0 = 2^t, s+t = 2e$. ここで,$t > e > s$ としておく.

$q = 2^s+\eta = 2^s+2^e-1, r = 2^t+2^e-1$. $K = 2^{e-s}+1$ とおくと

$$q = 2^s+2^e-1 = 2^sK-1, r = 2^t+2^e-1 = 2^{t-e}K-1 = 2^t-2^{t-e}-1.$$

一方 $p+1 = (q+1)(r+1) = (2^s+2^e)(2^t+2^e)$ によって,$p = (q+1)(r+1)-1 = 2^sK2^{t-e}K-1 = 2^{s+t-e}K^2-1$.

結局, $K = 2^{e-s}+1$ を使うと, $q = 2^sK-1, r = 2^{t-e}K-1, p = 2^{s+t-e}K^2-1$.

これはオイラーの式である.

8 (a,b) は k 友愛数,計算例

$k=-16$ のとき,

$\Theta = \eta^2+2\eta+k+1 = (2^e-1)(2^e+1)+k+1 = 2^{2e}+k = 2^{2e}-16.$

$e=2$ なら $\eta = 2^e-1 = 3, N = 7, \Theta = 0$. よって, $q_0r_0 = 0, r = r_0+3 = 3 < q$.

表 7: $k=-16$

a	素因数分解	b	素因数分解
$k=-16$			
664	2^3*83	580	2^2*5*29
1912	2^3*239	1672	$2^3*11*19$
2390	$2*5*239$	1914	$2*3*11*29$
1106	$2*7*79$	798	$2*3*7*19$

$p=2k-qr+N(\Delta+2)=-32-3q+7(q+2)+14=3+4q.$
$(q,p=3+4q)$ はスーパー双子素数 .

$e=3$ なら $\eta=2^e-1=7, N=15, \Theta=2^{2e}-16=63-15=48=12*4.$ よって, $q_0r_0=48=12*4, r=r_0+7=4+7=11, q=q_0+7=12+7=19, b=8*11*19=1672.$
$p=2k-qr+N(\Delta+2)=-32-11*19+15(11+19+2)=239, a=2^e*p=8*239=1912$

$e=4$ なら $\eta=2^e-1=15, N=31, \Theta=2^{2e}-16=256-16=240.$ よって, $q_0r_0=48=12*4, r=r_0+7=4+7=11, q=q_0+7=12+7=19, b=8*11*19=1672.$

9　社交数

$k = 0$ について，$F_0(a) = \sigma(a) - a$ とおくとき，相異なる a, b, c について，$F_0(a) = b, F_0(b) = c, F_0(c) = a$ となるとき社交数 (sociable number) というそうだ.

これを満たす 3 つ組は知られていないが, 平行移動を入れると 3 つ組社交数はいろいろ出てくる.

$k = 2$ のとき

$a = 6 = 2 * 3, b = 8 = 2^3, c = 9 = 3^2$ が最も簡単な例である.

表 8: k 社交数

a		b		c	
$k = -10$					
48	$2^4 * 3$	66	$2 * 3 * 11$	68	$2^2 * 17$
66	$2 * 3 * 11$	68	$2^2 * 17$	48	$2^4 * 3$
544	$2^5 * 17$	580	$2^2 * 5 * 29$	670	$2 * 5 * 67$
580	$2^2 * 5 * 29$	670	$2 * 5 * 67$	544	$2^5 * 17$
$k = -9$					
288	$2^5 * 3^2$	522	$2 * 3^2 * 29$	639	$3^2 * 71$
522	$2 * 3^2 * 29$	639	$3^2 * 71$	288	$2^5 * 3^2$
$k = 2$					
6	$2 * 3$	8	2^3	9	3^2
8	2^3	9	3^2	6	$2 * 3$
$k = 4$					
920	$2^3 * 5 * 23$	1244	$2^2 * 311$	944	$2^4 * 59$
6344	$2^3 * 13 * 61$	6680	$2^3 * 5 * 167$	8444	$2^2 * 2111$
6680	$2^3 * 5 * 167$	8444	$2^2 * 2111$	6344	$2^3 * 13 * 61$
$k = 6$					
80	$2^4 * 5$	112	$2^4 * 7$	142	$2 * 71$
112	$2^4 * 7$	142	$2 * 71$	80	$2^4 * 5$
$k = 7$					
8	2^3	14	$2 * 7$	17	17
14	$2 * 7$	17	17	8	2^3
$k = 12$					
44	$2^2 * 11$	52	$2^2 * 13$	58	$2 * 29$
52	$2^2 * 13$	58	$2 * 29$	44	$2^2 * 11$