

# Paul Lévy の数学の魅力

## — 伊藤清・飛田武幸の視点から —

田中紀子 (TANAKA, Noriko)

愛知県立豊田西高等学校

Toyota-nishi High school

### Abstract

Paul Lévy (1886—1971) は確率論で豊かで深い業績を残した。筆者はブラウン運動を数学的に表現しようとしたところに、その洞察力 (直感) を感じている。伊藤清氏 (1915—2008) は「確率論と歩いた 60 年」のなかで確率論を始めるきっかけとして、Paul Lévy 氏の論文「独立確率変数の和の理論」に出会ったことを述べている。『私はこの中に新しい確率論の本質を見だし、そこに見える一筋の光の中を歩いて行こうと思ったのです。』またホワイトノイズ理論を構築した飛田武幸氏 (1927—2017) は、Paul Lévy 氏と個人的な交流もされていた。Paul Lévy の数学に魅せられた 2 人の日本人の数学者の言葉から、その魅力に迫りたい。

### 1 ブラウン運動

筆者は、アダマールのもとで関数解析を研究していた Paul Lévy が、ブラウン運動を数学的に表現しようとしたところに、その洞察力 (直観) を感じている (Lévy 自身“直感”については語っている。Paul Lévy, 1973)。

ブラウンの時代には植物の新種を求める探検が国家的事業であった。ブラウン自身も 1801 年から始まったオーストラリアとタスマニアへの探検旅行に加わり、膨大な数の新種を収集した。この整理のために大英博物館で任にあたったのがブラウンの研究生活の始まりである。そこで顕微鏡に関する観測技術を磨き、1826 年から 27 年にかけて水中におかれた花粉の微粒子が不規則な運動を行うこと—当時としては驚異的な 1 ミクロン程度の微粒子の動き—を確認した。

このような“ゆらぎ”や“ノイズ”の典型的なものでかつ重要なものはガウス型をしている。それらを記述するガウス型の確率場が与えられたとして、その汎関数を数学的に扱うこととした。微粒子の運動から生まれた数学が Paul Lévy の数学、そして伊藤氏・飛田氏の研究の流れの真ん中に位置している。

1) 「Paul Lévy の科学上の研究の新しい紹介 (1964)」(著者 : Paul Lévy, 訳者 : 木村・飛田) について

未発表の訳出論文でありここで少し紹介をしておきたい。書き出しは『この紹介の目的は 1919 年から 1963 年までの特に私の確率論の諸研究の要約を説明することである。私の科学上の他の部門の研究については、この要約に続く短い報告だけで満足しようと思う。』となっている。章立ては次である。

I 古典確率論

II 加算確率論

III 確率過程

1° 確率過程

2° 加法過程と無限分解可能な法則

3° Brown 運動

4° N次元パラメータをもつ Brown 運動

5° ラプラス過程,

6° マルコフ過程

IV 確率法則の算術

V 種々の仕事

1° 関数解析

2° 幾何学

3° 積分方程式

4° 種々の問題

なぜ Paul Lévy が Brown 運動に着目できたのか。なぜこのような不可思議な動きを数学にしようと考えたのか。この本と「一確率論研究者の

回想」には、その源が感じられる記述がある。2)で触れることとする。  
 (なお、この訳出論文に含まれる内容は「一確率論研究者の回想」  
 に含まれている部分も多い。)

## 2) Brown 運動の源

Brown 運動についての問題の解決には軌道の丹念な研究が必要である。ただ、Paul Lévy にはこの研究に対しては十分な備えがあった。彼は日頃から接線を持たない曲線があるとか、またそのような曲線を構成している屈曲路は奇妙なもので、曲線の弧が無限に伸びていなくても必然的に無限の長さを持つようになってしまう事実に興味を持っていた。Brown 運動の曲線はほとんど確実に接線を持たない曲線である。

Saint-Louis にいた 18 歳前後が、開花の時期だったと述べ、次のような例が書かれている。

『私は紙の上に太いペンで描かれている一つの曲線  $C_0$  を考えてみた。

実際には幅  $\ell$  を持つ帯  $S_0$  が描かれるわけで、 $C_0$  はその中心の曲線である。つぎに、その 10 倍細かいペンで  $S_0$  の内部に幅  $1/10$  の帯  $S_1$  を入れて、正弦曲線が二つの直線の間を振動するのと同じように、交互に  $S_0$  の縁に接してその中心線  $C_1$  が  $C_0$  を  $45^\circ$  の角で

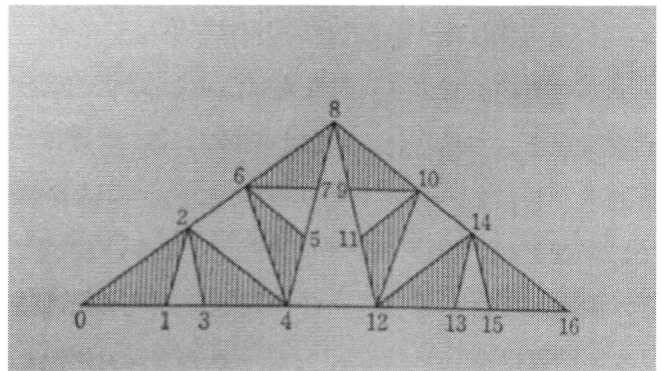


図 1 「一確率論研究者の回想」中の挿絵

切るようにする。さらに 10 倍細

いペンで同様に  $S_1$  の内部に帯  $S_2$  を入れ、このようにして限りなく続けていく。これらの線は次第に細く、次第にねじれて、極限では接線を持たない、長さ無限大の連続曲線を定義する。』

やがてこの考えを精緻化して、今日 von Koch の曲線と呼ばれる一つの曲線を定義した (1903 年)。この件について数学者であった父\*1に

\* 1 : 父親は数学のアグレジエ (教授資格 agrégé) を持った数学教授 (professeur) であり、レンヌのリセ、パリのリセ・ルイ・ル・グランで教鞭をとった。楢円函数論 (パリ, Gauthiers-Villar, 1898) の著者。1911 年フランス数学会総裁。

説明したところ、父親には“それは曲線ではない”といわれ

『それはどうしてもあきらめきれないことであったが、父には分からなかったんだと思い、その場を立ち去った。発表していれば von Koch の発表（1902年）に先んずることはなかったが Cesaro の発表（曲線がそれらの点の周期でどんな挙動をするかを問題にしたもの）には先んじていただろう』

と述べている。

von Koch 曲線については、精密な作り方によって、曲線が再度同じ点を通過することはない。Brown 運動のランダムな性格は、平面上の Brown 運動の曲線のどんな弧も無限個の2重点をもつとといった全く新しい事情を生み出している。ただ von Koch 曲線についての思索がのちの Brown 運動に関する研究の源となったことは事実である。

## 2. Paul Lévy の数学の魅力

### 1) 伊藤清氏のことばから

伊藤氏は東京帝国大学卒業後、内閣統計局に勤めながら、確率論の分野で現在「レヴィ・伊藤の定理」と呼ばれる定理に関わる最初の論文で



ある博士論文(1941年8月1日受理, 1942年 Japanese Journal of Mathematics 発表, 1945年10月3日東京帝国大学より博士号授与)を書き上げている。その頃伊藤清氏は「Compact 群上ノ Markoff Process」(1940年)や「マルコフ過程を定める微分方程式」(1942年)など数本の論文を大阪大学理学部数学教室が発行していた「全国紙上数学談話会」に掲載していた。「全国紙上数学談話会」は、月に2回程度のかかなり高い頻度で出版されており、数学のアイデアの交換に大きな影響を与えていた。

図2 伊藤清 1970(コーネル大学)

確率論に関する最初の論文を書き上げた当時のことを伊藤清氏は第十四回京都賞記念講演会挨拶文のなかで次のように語っている。

『統計力学から次第に確率論に近づいていったのですが，その頃の日本には，確率論を専門に研究している数学者は誰もいなかったばかりか，私自身も「確率論が厳密な意味で数学と言えるかどうか」という疑問を持っていたのです。』

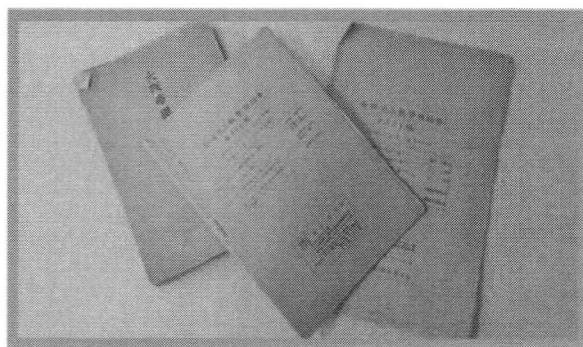


図3 全国紙上数学談話会

『確率論の内容に改めて直観的な興味を覚えたのはフランスの数学者ポール・レヴィ (Paul Lévy) が 1937 年に発表した「独立確率変数の和の理論」 (Théorie de l'addition des variables aléatoires) を読んだときです。これは微分積分学の関数に対応する確率論的概念としての確率過程の研究において大きな第一歩を踏み出したもので，私はここに新しい確率論の本質を見いだし，そこに見える一筋の光の中を歩いて行こうと思ったのです。1938 年の秋のことでした。

私は，レヴィの理論における確率過程の見本関数の中に，数学理論の名にふさわしい美しい構造を見いだしただけでなく，ウィーナー過程，ポアソン過程，独立増分過程などの確率過程をここで学びました。そして特に，この本の核をなす独立増分過程の分解定理に興味を持ちました。しかし，多くの開拓者の仕事がそうであるように，レヴィの記述は直観的な把握にもとづく部分が多く，その議論の展開を追うことが困難でした。』

また数学の研究を始めたころ，コルモゴルフの確率論の基礎概念に接し，それは確率変数を確率空間の上の関数として定義し，測度論の言葉で確率論を体系化しようという試みで，この立場に立ったとき，今まで朦朧としていたものが，霧が晴れるように明らかになり，これで確率論が現代数学の一分野と言えるかと確信したと述べている。また確率の内容について，次のようにも語っている。

『当時の研究の大部分は，統計法則の数学的解明を念頭において独立確率変数列の行動を調べるというものであった。微分積分学でいえば，級数論に相当する部分である。むしろそれよりも難しく，また内容も豊かなものであったが，数学の他の分野に較べると，貧弱に思われ，これ

に打ち込むという気は起らなかった。

確率論の内容に真に興味を覚えたのは、昭和 12 年にでたフランスの数学者ポール・レヴィの独立確率変数の和の理論を読んだ時である。・・・これなら精魂傾けて深く研究したいと思った。』(「確率論と私」伊藤清から「数学の研究を始めた頃」1984)

さらに「つれづれなるままに」(1985 年 関西確率論セミナー講演)のなかでこのようにも述べている。

『ウィーナーとレヴィだけは全然違う。つまり、確率論という新しい科学、新しい数学の文化があって、それには新しいタイプのおもしろさがあるのだ。そのおもしろさを研究するために、いろいろな他の技術を使うのである。——そういうふうに言えるようなものを、レヴィのものを読んで感じたわけです。』

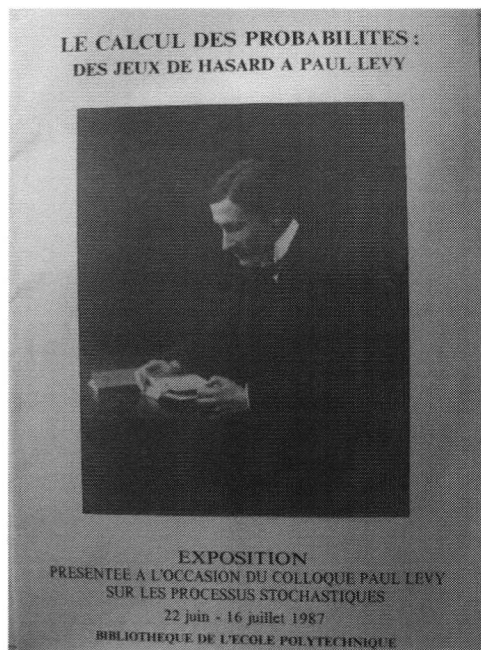
また Paul Lévy : Processus

stochastiques et mouvement brownian について、この本は伊藤氏の名古屋大学における卒業研究の大学ゼミに飛田氏がゼミ学生として参加したときに読んだ本でもあるが、伊藤清氏による書評には『本書は直感的過ぎて分かり難い

図 4 レヴィ生誕 100 年記念シンポジウム(1987)

ところもあるが著者がいかにして新しい発見をして行ったかということが窺われ、原始林を開拓していく人の楽しい姿が目に見えるようである。』と述べられている。

レヴィの本や論文は極めて難解であり、その難解さのため、フランスですら広く認められる状況ではなかった。この事情については 1987 年にレヴィ誕生 100 年を記念して開催されたシンポジウムで、彼の女婿であるシュワルツが詳しく話している。またダン・ストゥルックは、P.レヴィは伊藤という解釈者を得たという幸運により今日の名声を享受できたと述べている。伊藤清氏自身、レヴィやコルモゴロフのやっていることをよく理解したいとだけ思っていたのであって、何か新しいものをするように考えていたわけではなく、レヴィのものをきちっとやろうとした



のだと語っている。

## 2) 飛田武幸氏のことばかり

飛田氏は長年にわたり、名古屋大学において「確率論セミナー（ホワイトノイズセミナー）」を2016年3月まではほぼ毎週開講しており、筆者は最後の約3年間聴講していた。なお、ホワイトノイズはアメリカ数学会から2000年に Math. Subject Classification 60H40 を与えられている。

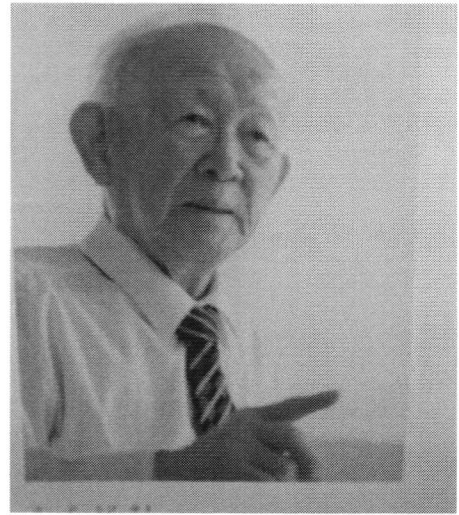


図5 飛田武幸（名古屋大学）

名古屋大学理学部・大学院理学研究科広報誌「理 philosophia」

(spring-summer2017)には最初のページに「飛田武幸博士—ホワイトノイズ解析の創始—」を掲載しており、Paul Lévyについても触れている。論文やセミナーの中で、何度も飛田氏が述べた Paul Lévy への思いとその数学の一端を紹介したい。

『P.レヴィの数学は、連続無限変数の関数解析に基づく。そこから変数をランダムにして、自然に確率解析へと導かれる。それは時空のパラメータに依存し科学の中で重要な位置を占める。』（飛田武幸，2014）

Select a 2 digit classification: **60 Probability theory and stochastic processes**

Enter a keyword, phrase or a 2-, 3-, or 5-digit classification:  **Search**

< 60Gxx | 60-XX | 60Jxx > **Clear**

<b>60-XX</b>	<b>Probability theory and stochastic processes (For additional applications, see 11Kxx, 62-XX, 90-XX, 91-XX, 92-XX, 93-XX, 94-XX)</b>
60Hxx	Stochastic analysis [See also 58J65]
60H05	Stochastic integrals
60H07	Stochastic calculus of variations and the Malliavin calculus
60H10	Stochastic ordinary differential equations [See also 34F05]
60H15	Stochastic partial differential equations [See also 35R60]
60H20	Stochastic integral equations
60H25	Random operators and equations [See also 47B80]
60H30	Applications of stochastic analysis (to PDE, etc.)
60H35	Computational methods for stochastic equations [See also 65C30]
<b>60H40</b>	<b>White noise theory</b>
60H99	None of the above, but in this section

< 60Gxx | 60-XX | 60Jxx > **Clear**

図6 Math. Subject Classification 60H40

学生時代に伊藤清ゼミで *Processus stochastiques et mouvement brownian* を読んだときのエピソードとして

『一見平易そうに見える主張も、証明はもとより、その内容の重厚さであり、著者による深い内容の記述、それらにすっかり圧倒されてしまった。レヴィにとっては当然で、しかし我々にとっては難解な主張の例が多い。今では当然と思われるブラウン運動の強マルコフ性にあたる事実がわずか 2 行で説明されている。本質的なことを見抜く直感と洞察力には敬服するのみであるが、それが人によっては誤解を招くことにもなった。』

と書かれている。

卒業後、飛田氏はレヴィに強い憧れを持ち、思い切って手紙を出したところ、お返事が来て文通が開始した。折にふれて、主として数学の話で手紙を出すと親切な返事が返ってきていた。論文の draft を送ったら数式の訂正をした返事を貰ったこともあった。（しばらく宛名は“Miss T.Hida”となっていたとのこと。レヴィは飛田氏を女性と勘違いしていた。）

1969 年 12 月 14 日のお手紙では、レヴィはご家族のことをしたためている。その手紙には、父リュシアン・レヴィの紹介や家族の紹介とともに、レヴィ自身の紹介（1935 年の Notice に含まれない部分）が書かれている。パリのリセで学びエコール・ポリテクニクでジョルジュ・アンベールに出会ったこと、物理学の教授は放射能を発見したアンリ・ベクレルで、ポアンカレは天文学の教授であった。コレージュ・ド・フランスでエミール・ピカールの講義やアダマールの講義から多大な影響を受け、博士論文のトピックスを見つけたのは

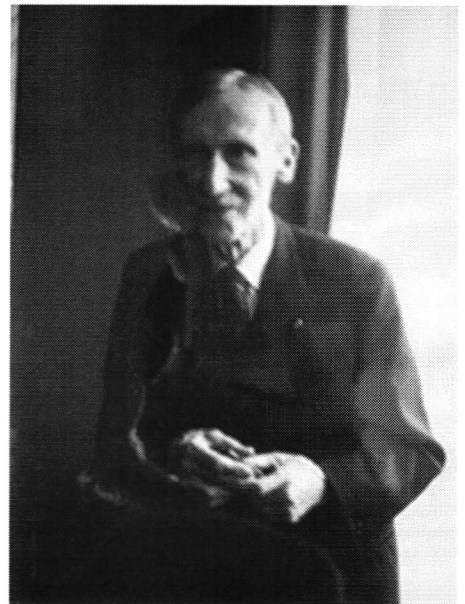


図 7 晩年の Paul Lévy (飛田氏撮影)

1910 年のアダマールの講義だったと述べている。

戦後エコール・ド・ミーヌとエコール・ポリテクニクで講義を続けたが深刻な病気によって長い中断があった（結核；1952 年に私の左の肺の半分を失い 1957-1958 に再び病にかかった。）ことなどが書かれている。



### 3 まとめ・考察

伊藤氏も飛田氏も、ブラウン運動のようなある条件を満たすクラスを、基本的な確率過程を用いて実現して研究する方向を一貫してとっている。私は、2人の数学者伊藤清氏と飛田武幸氏が直感的な記述が多いレヴィの数学に難解さを感じつつも惹かれていったのは、やはり、自然界の不思議な動きであるブラウン運動に着目し—物理学ではアインシュタインが着目したように—、その源に戻るようなまた芯を捉えるような確率的手法のよさに気付いたからではないかと考えている。

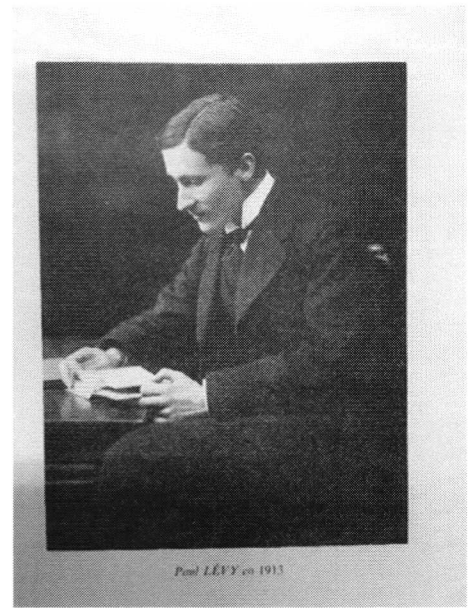


図 8 Paul Lévy 1913

Malliavin は「伊藤の方程式はランダムな世界における Newton の方程式である」としばしば述べている。

レヴィ - 伊藤の結果が示されてから半世紀以上過ぎた 1999 年にイタリアで女性数学者たちが主催した「3000 年 紀 へ 向 け て の 数 学」と題する集会が行われ、D.Mumford は「確率時代の夜明け」の表題で講演した。その中で彼の考えを反映する典型的な例として加法過程におけるレヴィ - ヒンチンの標準形について述べている。<sup>\*2</sup>

$$p(x) = e^{iax - bx^2 - c \int (e^{ixy} - 1 - \frac{ixy}{1+y^2}) du(y)}$$

また

$$x \sim a + bx_{normal} + c \sum (xi - \text{収束係数 } ci)$$

を取り上げている<sup>\*3</sup>。

\*2 それはフーリエ変換の上手な変形にあたる。レヴィは  $X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nn}$  のすべての  $n$  に分け、そのリミットを考えて、独立増分 (independent increment) ということ、そして sample path  $X(t, \omega)$  を考えている。

\*3 「確率時代の夜明け」のこの部分を読んで、飛田氏は D.Mumford 氏が確率論においても信頼できると語った。

レヴィは“私はこの建物の一つの階を築いた。これを他の人たちで続け

てほしい”と述べている。確率論を構築する過程ではその汎用性が現在のように広範に及ぶとは想定もしていなかったであろうが、ただ、その微量で不規則な変化を捉える手法としての魅力、そして古典的確率論とは違う本質を捉えることのできる可能性に魅せられたのだろう。飛田氏は常々「根本に立ち戻って考えること」の重要性を説く。それがすなわちレヴィの数学—レヴィの確率論—そのものではないかと感じている。

#### 4. 参考文献

- (1)伊藤清, 1940, Compact 群上ノ Markoff Process, 大阪大学数学教室, 全国紙上数学談話会
- (2)伊藤清, 1942, マルコフ過程を定める微分方程式, 大阪大学数学教室, 全国紙上数学談話会
- (3)伊藤清, 1998, 確率論と歩いた 60 年, 第 14 回京都賞記念講演抄録
- (4)伊藤清, 2010, 確率論と私, 岩波書店
- (5)D. Mumford 著, 荒川薫訳, 2006, 確率時代の夜明け, 数学の最先端 21 世紀への挑戦 v.6 , シュプリンガー・ジャパン
- (6)Glenn Shafer and Laurent Mazliak, Juin 2009 “An autobiographical note by Paul Lévy, written for Takeyuki Hida in 1969”, Journal Electronique d’Histoire des Probabilités et de la Statistique Vol5,n°1
- (7)高橋陽一郎, 2011, 伊藤清の数学, 日本評論社
- (8)田中紀子, 2016, Paul Lévy “INSTITUT DE FRANCE ACADEMIE DES SCIENCES TROISIEME CENTENAIRE 1666-1966” Gauthier-Villares edteur 1967 飛田武幸先生から教わったこと—確率論ことはじめ—, 第 26 回数学史シンポジウム
- (9)田中紀子, 2017, Paul Lévy の自叙伝的な手記, 第 27 回数学史シンポジウム
- (10)飛田武幸, 1975, 確率場の理論—特にホワイトノイズの超汎関数について, The Physical Society of Japan, P606-P613
- (11)飛田武幸, 1975, ブラウン運動, 岩波書店
- (12)飛田武幸, 2000, 「Paul Lévy の遺したもの」, RIMS 研究集会数学

史の研究

- (13) 飛田武幸, 2001, 美しいノイズ—数学を身近に—, 国際高等研究所
- (14) T.Hida, SiSi, 2008, Lecture on White Noise Functionals, World Scientific
- (15) 飛田武幸, 2014, レヴィの数学とホワイトノイズ理論, 第25回数  
学史シンポジウム
- (16) Paul Lévy, 1935, Notice sur les travaux scientifiques de M. Paul  
Lévy, Hermann, Paris
- (17) Paul Lévy, 1937, Théorie de l'addition des variables aléatoires,  
Paris, Gauthier-Villars
- (18) Paul Lévy, 1948, Processus stochastiques et mouvement  
brownien, Gauthier-Villars
- (19) Paul Lévy 著, 木村・飛田武幸訳, 1964, Paul Lévy の科学上の研究  
の新しい紹介, (訳出論文, 未発表)
- (20) Paul Lévy 著, 飛田武幸・山本喜一訳, 1973, 「一確率論研究者の回  
想」, 岩波書店

追記:

私に確率論(ホワイトノイズ理論)を教えて下さった飛田武幸氏は2017年12月29日に, 90歳にてその生涯を閉じられました。70余年にわたり休むことなく確率論のご研究の道を歩まれたことに深い敬意を表します。謹んでお悔やみ申し上げ, ご冥福をお祈りいたします。