2017 年 10 月 14 日
津田数学史シンポジウム

『九章算術』方程術の解釈を再考する †

中国古算書研究会

大阪産業大学　全学教育機構

田村　誠

1. 方程術について

『九章算術』第八巻方程章では、連立 1 次方程式についての算題が 18 題扱われている。「方程術」として述べられる解法は前進消去・後退代入によるものである。第［一］題では、連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ①\ (\text{右行}) \\ 2x+3y+z=34 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ②\ (\text{中行}) \\ x+2y+3z=26 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ③\ (\text{左行}) \end{cases}$$

を解いている。ここでx, y, z はそれぞれ上禾、中禾、下禾の 1 秉（束）を脱穀したときの斗数であって、①（右行）は上禾 3 秉、中禾 2 秉、下禾 1 秉を脱穀すると 39 斗になるとの意である。

「方程術」として術文に忠実にこれを解けば、まず

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ③ & ② & ① \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[②\times3]{} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow[②-2\times①]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow[③\times3]{} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-①]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow[③\times5]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-4\times②]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{法}\ 36 \begin{pmatrix} & & 3 \\ & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

---

† This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 24501252 and 25350388.

12

のようにして前進消去する。さらにこの後、

・・・上爲法、下爲實。
實卽下禾之實。

$$99\text{: 下禾之實}$$

求中禾、以法乘中行下實、而除下禾之實。餘如中禾秉數而一、卽中禾之實。

$$(24 \times 36 - 99) \div 5 = 765 \div 5 = 153\text{: 中禾之實}$$

求上禾、亦以法乘右行下實、而除下禾・中禾之實。餘如上禾秉數而一、卽上禾之實。

$$(39 \times 36 - 99 - 153 \times 2) \div 3 = (1404 - 99 - 153 \times 2) \div 3 = 999 \div 3 = 333$$
$$\text{: 上禾之實}$$

實皆如法、各得一斗

$$\text{下禾 } \frac{99}{36} = \frac{11}{4}\text{ 、中禾 } \frac{153}{36} = \frac{17}{4}\text{ 、上禾 } \frac{333}{36} = \frac{37}{4}$$

のように、後退代入によって上禾・中禾・下禾の実をそれぞれ求めた後、それぞれを法で割って答を得ることとなる。したがって、[1], [2], [3]などで後退代入ではなくガウス・ジョルダンの消去法によって解いているのは、[4]が言うように解法としての説明が誤っている。すなわち例えば[1]では、上記の後退代入の部分の代わりに

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow[②\times 36]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 180 & 2 \\ 36 & 36 & 1 \\ 99 & 874 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow[②-③]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 180 & 2 \\ 36 & 0 & 1 \\ 99 & 765 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow[②\times\frac{1}{5}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 36 & 2 \\ 36 & 0 & 1 \\ 99 & 153 & 39 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[①\times 36]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 108 \\ 0 & 36 & 72 \\ 36 & 0 & 36 \\ 99 & 153 & 1404 \end{pmatrix} \xrightarrow[①-②\times 2-③]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 108 \\ 0 & 36 & 0 \\ 36 & 0 & 0 \\ 99 & 153 & 999 \end{pmatrix} \xrightarrow[②\times\frac{1}{3}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 36 \\ 0 & 36 & 0 \\ 36 & 0 & 0 \\ 99 & 153 & 333 \end{pmatrix}$$

のようにして解くとしているが、「以法乘中行下實、而除下禾之實」に忠実では無い。

2. 正負術について

方程章では第［三］題で「正負術」についても述べられている。すなわち

> 正負術曰、同名相除、異名相益。正無入負之、負無入正之。
> 其異名相除、同名相益。正無入正之、負無入負之。

というものである。「同名」、「異名」とは同符号、異符号のこと。「無入」は「算入る無き」の意であろうか、空位(0)のこと。一行目は減法、二行目は加法についての説明と解される。正算は赤い算木、負算は黒い算木を用いて表され、減法で大より小を除くことは暗黙の了解であった。「正負術」は、正負の

13

数と零が一つの数体系としてとらえられていたとまでは言い難いものの、加減については計算可能であったことを示している。

3．第［一三］題について

方程章の中で第［一三］題だけは少し毛色が違った問題となっている。

【問題要約】甲、乙、丙、丁、戊の5家があり、井戸を共用している。5家の綆（つるべ縄）1本の長さをそれぞれx, y, z, v, w 寸とおき、井戸の深さをD 寸とおくと

$$\begin{cases}2x = D - y\\ 3y = D - z\\ 4z = D - v\\ 5v = D - w\\ 6w = D - x\end{cases} \text{すなわち} \begin{cases}2x + y = D\\ 3y + z = D\\ 4z + v = D\\ 5v + w = D\\ 6w + x = D\end{cases}$$

となる。井戸の深さと1綆の長さはそれぞれどれだけか。

未知数が6つで式が5つであるから、これは不定方程式である。岳麓書院蔵秦簡『数』にも『張丘建算経』百鶏術に類する不定方程式は見られるが、そちらは自然数解が有限個しか無いものである。本問は未知数が比例関係にあって、自然数解が無数に存在するため、方程式を満たす x, y, z, v, w, D の最小の自然数解を得て解としている。すなわち各式の両辺をDで割り、$X = \frac{x}{D}$, $Y = \frac{y}{D}$, $Z = \frac{z}{D}$, $V = \frac{v}{D}$, $W = \frac{w}{D}$とおくと、連立方程式は$\begin{cases}2X + Y = 1\\ 3Y + Z = 1\\ 4Z + V = 1\\ 5V + W = 1\\ 6W + X = 1\end{cases}$ となりこの解は定まる。ここで解 X, Y, Z, V, Wは井戸の深さに対する各家の綆長の比率を表す。それぞれの分母の最小公倍数をDとして与えれば、$x = DX$, $y = DY$, $z = DZ$, $v = DV$, $w = DW$ および Dの組は初めの連立方程式の最小の自然数解となる。

具体的な計算は、X, Y, Z, V, Wの方程式から

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&2\\0&0&0&3&1\\0&0&4&1&0\\0&5&1&0&0\\6&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2&0&0&0&2\\0&0&0&3&1\\0&0&4&1&0\\0&5&1&0&0\\12&1&0&0&0\\2&1&1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\-1&0&0&3&1\\0&0&4&1&0\\0&5&1&0&0\\12&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

14

$$\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\-3&0&0&3&1\\0&0&4&1&0\\0&5&1&0&0\\36&1&0&0&0\\3&1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&0&3&1\\1&0&4&1&0\\0&5&1&0&0\\36&1&0&0&0\\4&1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&0&3&1\\4&0&4&1&0\\0&5&1&0&0\\144&1&0&0&0\\16&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&0&3&1\\0&0&4&1&0\\-1&5&1&0&0\\144&1&0&0&0\\15&1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&0&3&1\\0&0&4&1&0\\-5&5&1&0&0\\720&1&0&0&0\\75&1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&0&3&1\\0&0&4&1&0\\0&5&1&0&0\\721&1&0&0&0\\76&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{法 } 721\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&0&3&1\\0&0&4&1&0\\0&5&1&0&0\\1&1&0&0&0\\76&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

のようになる。法 721 に対して、

戊の実は 76、

丁の実は$(1\times 721-76\times 1)\div 5=\frac{645}{5}=129$、

丙の実は$(1\times 721-129\times 1)\div 4=\frac{592}{4}=148$ 、

乙の実は$(1\times 721-148\times 1)\div 3=\frac{573}{3}=191$ 、

甲の実は$(1\times 721-191\times 1)\div 2=\frac{530}{2}=265$

であるから、$X=\frac{265}{721}, Y=\frac{191}{721}, Z=\frac{148}{721}, V=\frac{129}{721}, W=\frac{76}{721}$ となる。したがって $D=721$ とすれば,

$x=265$, $y=191$, $z=148$, $v=129$, $w=76$と $D=721$ の組が最小の自然数解として得られる。

4. 第［一八］題について

章末の第［一八］題では、連立 1 次方程式

$$\begin{cases}9x+7y+3z+2v+5w=140\\7x+6y+4z+5v+3w=128\\3x+5y+7z+6v+4w=116\\2x+5y+3z+9v+4w=112\\x+3y+2z+8v+5w=95\end{cases}$$

15

を解いている。1.で「方程術」はガウス・ジョルダンの消去法とは異なることを述べたが、この算題の劉徽のものとされる注で「旧術」として述べられているのが、ガウス・ジョルダンの消去法であることは指摘されてよい。同注の中では、さらに「方程新術」（2 変数間の換算比率をまず求め、それを用いて 1 変数の方程式に帰着させるという解法）が示され、それによる解題の詳細も説明されている。注目すべきは、旧術・新術それぞれによる解題の最後で、検算の用とするために計算量を「算」という語で示していることである。

この「算」の解釈については、[1]では述べられておらず、[2]や[3]の解釈は次のようである。

> [2]では、行から行 1 回の減算を 1 算とする。ある行から別の行を 6 回引くならば 6 算である。ただし、算の数え上げの詳細は記されてい無い。
> [3]では、1 回の運算を 1 算、布算も 1 算とする。ある数である行全体を乗除すること、行から行を 1 回引くこと、実を法で割るなどは 1 回の運算であるとする。算の数え上げについては、旧術についてのみ述べられている。77 算に合わせるためか、旧術の前進消去の部分の校訂および計算は他と異なっている。新術については、算の数え上げに対する言及は無い。

両者の解釈で共通するのは「行から行 1 回の減算を 1 算とする」という点である。[3]では旧術の計算が相違しており、旧術はこれで説明できているかに見える。しかし、新術でこの数え方を行うと、第 3 行を取り去る所（別表の【新術】3 段目末尾）までで 120 算を超え、最終的には 230 算を超えてしまうことを考えると、[2][3]の解釈はどちらも誤りである。

本稿で主張するのは、

> 「算」は「置算」、元あった算木を計算の結果に従って改め、置くこと

であって、これは成分単位で数えるということである。計算の前後で値に変化のあった成分の数と言ってもよい。実を法で割るなども 1 算と数えるが、布算は数え無い。また 0 を足し引きすることは何もしないということなので、これも「算」に数え無い。

数え方に差異が出る例を挙げれば、旧術の中に

16

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ 8 \\ -9 \\ 76 \end{pmatrix} - 6 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -21 \\ -146 \end{pmatrix}$$

という計算があるが、これは[2]や[3]によれば6算となるが、実際は4算と考えるのが正しい。旧術・新術の「算」の詳細は別表に示す。

参考文献

[1] 川原秀城:「劉徽註九章算術」、『科学の名著(2) 中国天文学・数学集』所収、朝日出版（1980）

[2] Shen KangShen, John Crossley and Anthony Lun: The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary, Oxford University Press (2000)

[3] 郭書春:『九章算術訳注（中国古代科技名著訳注叢書)』、上海古籍出版社(2009)

[4] 高遠節夫:「九章算術方程術の解釈についての考察」、日本数学会2013年度年会 数学基礎論および歴史分科会 講演アブストラクト（2013) pp.11-12

[5] 田村誠 他 中国古算書研究会:「『九章算術』訳注稿(28)」、大阪産業大学論集 人文・社会科学編 31号 http://id.nii.ac.jp/1338/00001930/

17

【旧術】

$$
\begin{array}{ccccc}
⑤ & ④ & ③ & ② & ①
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 7 & 9 \\
3 & 5 & 5 & 6 & 7 \\
2 & 3 & 7 & 4 & 3 \\
8 & 9 & 6 & 5 & 2 \\
5 & 4 & 4 & 3 & 5 \\
95 & 112 & 116 & 128 & 140
\end{pmatrix}
\xrightarrow{6\text{算}}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 7 & 9 \\
3 & 5 & 0 & 6 & 7 \\
2 & 3 & 4 & 4 & 3 \\
8 & 9 & -3 & 5 & 2 \\
5 & 4 & 0 & 3 & 5 \\
95 & 112 & 4 & 128 & 140
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{16\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 5 & 0 & 6 & 7 \\
-2 & -5 & 4 & -24 & -33 \\
11 & 15 & -3 & 26 & 29 \\
5 & 4 & 0 & 3 & 5 \\
91 & 104 & 4 & 100 & 104
\end{pmatrix}
\xrightarrow{5\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 5 & 0 & 6 & 1 \\
-2 & -5 & 4 & -24 & -9 \\
11 & 15 & -3 & 26 & 3 \\
5 & 4 & 0 & 3 & 2 \\
91 & 104 & 4 & 100 & 4
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{15\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
25 & 40 & 4 & 30 & -9 \\
2 & 0 & -3 & 8 & 3 \\
-1 & -6 & 0 & -9 & 2 \\
79 & 84 & 4 & 76 & 4
\end{pmatrix}
\xrightarrow{3\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
25 & 20 & 4 & 30 & -9 \\
2 & 0 & -3 & 8 & 3 \\
-1 & -3 & 0 & -9 & 2 \\
79 & 42 & 4 & 76 & 4
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{3\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & 20 & 4 & 30 & -9 \\
2 & 0 & -3 & 8 & 3 \\
2 & -3 & 0 & -9 & 2 \\
37 & 42 & 4 & 76 & 4
\end{pmatrix}
\xrightarrow{8\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 4 & 0 & -9 \\
2 & -8 & -3 & -4 & 3 \\
2 & -11 & 0 & -21 & 2 \\
37 & -106 & 4 & -146 & 4
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{3\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 4 & 0 & -9 \\
2 & 0 & -3 & -4 & 3 \\
2 & 31 & 0 & -21 & 2 \\
37 & 186 & 4 & -146 & 4
\end{pmatrix}
\xrightarrow{2\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 4 & 0 & -9 \\
2 & 0 & -3 & -4 & 3 \\
2 & 1 & 0 & -21 & 2 \\
37 & 6 & 4 & -146 & 4
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{2\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 4 & 0 & -9 \\
2 & 0 & -3 & -4 & 3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
37 & 6 & 4 & -20 & 4
\end{pmatrix}
\xrightarrow{2\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 4 & 0 & -9 \\
2 & 0 & -3 & 1 & 3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
37 & 6 & 4 & 5 & 4
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{3\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 4 & 0 & -9 \\
0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
15 & 6 & 4 & 5 & 4
\end{pmatrix}
\xrightarrow{2\text{算}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 4 & 0 & -9 \\
0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
3 & 6 & 4 & 5 & 4
\end{pmatrix}
$$

18

$$\xrightarrow{4\text{算}}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&4&0&0\\0&0&-3&1&0\\0&1&0&0&0\\3&6&4&5&4\end{pmatrix}\xrightarrow{3\text{算}}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\3&6&7&5&4\end{pmatrix}$$

以上で 77 算。

【新術】

$$\begin{pmatrix}1&2&3&7&9\\3&5&5&6&7\\2&3&7&4&3\\8&9&6&5&2\\5&4&4&3&5\\95&112&116&128&140\end{pmatrix}\xrightarrow{6\text{算}}\begin{pmatrix}1&2&\mathbf{1}&7&9\\3&5&\mathbf{0}&6&7\\2&3&\mathbf{4}&4&3\\8&9&\mathbf{-3}&5&2\\5&4&\mathbf{0}&3&5\\95&112&\mathbf{4}&128&140\end{pmatrix}\xrightarrow{12\text{算}}$$

$$\begin{pmatrix}1&-26&1&-25&-26\\3&5&0&6&7\\2&-109&4&-124&-137\\8&93&-3&101&107\\5&4&0&3&5\\95&0&4&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{4\text{算}}\begin{pmatrix}-22&-26&1&-25&-26\\3&5&0&6&7\\-90&-109&4&-124&-137\\77&93&-3&101&107\\5&4&0&3&5\\3&0&4&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{6\text{算}}$$

$$\begin{pmatrix}-22&-26&23&-25&-26\\3&5&-3&6&7\\-90&-109&94&-124&-137\\77&93&-80&101&107\\5&4&-5&3&5\\3&0&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{6\text{算}}\begin{pmatrix}-91&-26&23&-25&-26\\12&5&-3&6&7\\-372&-109&94&-124&-137\\317&93&-80&101&107\\20&4&-5&3&5\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5\text{算}}\begin{pmatrix}39&-26&\square&-25&-26\\-13&5&\square&6&7\\173&-109&\square&-124&-137\\-148&93&\square&101&107\\0&4&\square&3&5\\0&0&\square&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{5\text{算}}\begin{pmatrix}39&-26&\square&-25&0\\-13&5&\square&6&2\\173&-109&\square&-124&-28\\-148&93&\square&101&14\\0&4&\square&3&1\\0&0&\square&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{8\text{算}}\begin{pmatrix}39&-26&\square&-25&0\\-13&-3&\square&0&2\\173&3&\square&-40&-28\\-148&37&\square&59&14\\0&0&\square&0&1\\0&0&\square&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{6\text{算}}\begin{pmatrix}14&-1&\square&-25&0\\-13&-3&\square&0&2\\133&43&\square&-40&-28\\-89&-22&\square&59&14\\0&0&\square&0&1\\0&0&\square&0&0\end{pmatrix}$$

19

$$\xrightarrow{4\text{算}} \begin{pmatrix} 17 & -1 & & -25 & 0 \\ -4 & -3 & & 0 & 2 \\ 4 & 43 & & -40 & -28 \\ -23 & -22 & & 59 & 14 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4\text{算}} \begin{pmatrix} 17 & -1 & & -8 & 0 \\ -4 & -3 & & -4 & 2 \\ 4 & 43 & & -36 & -28 \\ -23 & -22 & & 36 & 14 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\text{算}} \begin{pmatrix} 17 & -1 & \square & -2 & 0 \\ -4 & -3 & \square & -1 & 2 \\ 4 & 43 & \square & -9 & -28 \\ -23 & -22 & \square & 9 & 14 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{8\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ -55 & -3 & \square & 5 & 2 \\ 735 & 43 & \square & -95 & -28 \\ -397 & -22 & \square & 53 & 14 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \square & 5 & 2 \\ -310 & 43 & \square & -95 & -28 \\ 186 & -22 & \square & 53 & 14 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \square & 5 & 2 \\ \mathbf{-5} & 43 & \square & -95 & -28 \\ \mathbf{3} & -22 & \square & 53 & 14 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{6\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \square & 5 & 2 \\ -5 & 3 & \square & 0 & -3 \\ 3 & 2 & \square & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \square & 1 & 2 \\ -5 & 3 & \square & 6 & -3 \\ 3 & 2 & \square & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \square & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \square & 1 & 0 \\ -5 & 3 & \square & 6 & -15 \\ 3 & 2 & \square & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \square & -2 & 5 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \square & 1 & 0 \\ -5 & 3 & \square & 6 & 0 \\ 3 & 2 & \square & -2 & \mathbf{-6} \\ 0 & 0 & \square & -2 & \mathbf{5} \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \square & 1 & 0 \\ -5 & 3 & \square & 6 & -10 \\ 3 & 2 & \square & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \square & -2 & 5 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \square & 1 & 0 \\ -5 & 3 & \square & 6 & -2 \\ 3 & 2 & \square & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \square & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \square & 1 & 0 \\ -5 & 3 & \square & 2 & -2 \\ 3 & 2 & \square & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{6\text{算}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \square & 1 & 0 \\ -3 & 5 & \square & 2 & -2 \\ 1 & 0 & \square & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20

$$\xrightarrow{3算}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \mathbf{3} & 0 \\ -3 & 5 & \mathbf{-4} & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2算} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3算}\begin{pmatrix} 0 & -1 & \square & \mathbf{-4} & 0 \\ 1 & 1 & \square & \mathbf{7} & 0 \\ -3 & 1 & \square & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \square & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここまでの計算で太字で示したところによって、

$4x = 7y$ だから $x : y = 7 : 4$,

$3y = 4z$ だから $y : z = 4 : 3$,

$5z = 3v$ だから $z : v = 3 : 5$,

$6v = 5w$ だから $v : w = 5 : 6$

となり、これらの関係から直ちに5物の関係

$$x : y : z : v : w = 7 : 4 : 3 : 5 : 6$$

が成り立つ。これが列衰である。

初期状態に戻って、第3行から第4行を引いた式（減行）は $x + 4z - 3v = 4$ となる。その物位にそれぞれ対応する率を乗じて法とする。

$$1 \times 7 + 4 \times 3 - 3 \times 5 = 4 \quad (法)$$

減行の下実を列衰に乗じて各実とする。

	麻	麦	菽	荅	黍
（各実）	7×4	4×4	3×4	5×4	6×4

各実を法で割れば、それぞれの物の価格となる。

（物価）	$\frac{7\times4}{4}$	$\frac{4\times4}{4}$	$\frac{3\times4}{4}$	$\frac{5\times4}{4}$	$\frac{6\times4}{4}$

ここで注では、物価を列衰としたときの合計（法）と減行の下実の数値が一致しているので、物価を求める際には何も計算せず、列衰を置算すればよいと言っている。すなわち $x = 7k,\ y = 4k,\ z = 3k,\ v = 5k,\ w = 6k$ とすると、減行の物価は $1 \times 7k + 4 \times 3k - 3 \times 5k = 4k = 4$ すなわち $k = 1$ となっているので列衰がそのまま物価となっているということである。

行列で行った算の合計が119算、列衰から物価を求めて置算するのが5算、それらを合わせて124算となる。

21