多変数関数論の泉—源泉への回帰の試み—

第 28 回 津田塾大学数学史シンポジウム
2017 年 10 月 15 日
高瀬正仁（数学者・数学史家）

数学史とは

数学の古典を読み続けてすでに久しいが，数学史は「数学とは何であるか」と問う学問であると，このごろしきりに思うようになった．数学の創造に携わった数学者たちの作品を見ると，だれもが「数学とは何か」という問いを思索して，所見を語っているように見える．それらは相通じることもあれば，まったく様相を異にしていることもあるが，さまざまな彩りの思索が連なって数学的科学の歴史を形作っている．その系譜を追い，ひとりひとりの数学者の声を聴きたいと思う．そのようにして共感と共鳴の場が開かれたなら，そこに数学という名で呼ばれる学問の真実の姿が浮かび上がってくるであろう．

数学のどの理論にも黎明期が存在し，黎明期とは数学的発見の時代である．岡潔先生の研究ノートの一冊に，表紙に「研究ノ記録 其ノ六」と記入された大学ノートがあり，そこに，

> 定義が次第に變つて行くのは，それが研究の姿である．

という言葉が書き留められている．昭和 20 年（1945 年）12 月 27 日の記事である．不定域イデアルの理論の建設に心魂を傾けていた時期のことで，岡先生は不定域イデアルの姿を描写する言葉を求めて日々腐心していたのである．真に黎明期というに相応しい一時期である．

次に引くのは将棋九段金子金五郎先生の言葉である．「定跡とは歴史である」という小見出しが附されている．

> 古くから「道があるから人が歩くのでなくて，人が歩いているうちに道ができたのだ」という警話があるが，定跡という誰も用いる指し方も，それができあがる前に，多勢の人がいろいろの試みをしているうちに，余計な部分は捨てられ，あるいは，整理統合されてでき上った一つの型なのである．· · · 定跡の成立をとげたものは，客観的なものであるが，それを分解すると，各人の主観的な棋風という各要素に還元できる．· · · プロの序盤がしっかりしているのは，その時代の定跡をアマの人々がよくやる単に必勝法の辞典として受けとることをせず，その内にある各要素 — すなわち先人の棋風（発想と新手をふくむ）をも併せて吸収する努力をした賜物である．· · · また，定跡は破らねばならないものである．そういう転換期が必ず訪れていることはこれまでの歴史が明に示している．かくてまた前にいったように各人は自分

191

の持つ棋風 — 主観性をモトにして「歩み」をはじめる．そしてそれがある点に達すると整理統合されて新定跡なるものが出現する．
（『将棋世界』，昭和 60 年（1985 年）4 月号所収の観戦記「金子教室 米長，強腕を発揮 王将戦第二局」の冒頭の言葉．王将，中原誠．挑戦者，米長邦雄八段．観戦記 金子金五郎九段）

もうひとつ，新数学人集団の機関誌「月報」第 3 号所収の一文「学習についての二三の提案―数学の見透しのために―」から摘記する．

数学を勉強していて非常に困るのは，「いったい何をやろうとしているのか」全然わからないことが非常に多いことだ．
・現代数学の性格についての考え．私たちが直面する困難は，ひとつには現代数学の全体的な性格から発していると思われる．20 世紀の数学と 19 世紀の数学を比較して次のように言うことは，おそらく独断ではないと思う．すなわち，「19 世紀には個々の具体的な問題が数学のすべてだったが，今ではどちらかと言えば膨大な体系が支配している」と．
・ヒルベルトの方法の特色を解説するワイルの言葉．「ヒルベルトは本来の簡単な形の問題にさかのぼる．」この方法によってのみ，ヒルベルトは数学をひとつの全体として把握することができたのだ．
・今ではどうか．問題と私たちの間には抽象的な「理論」があるのが普通である．そのためもとの問題は全く見えないか，少なくともアレンジされている．一方，「理論」が扱い得ない問題は忘れ去られているようである．この「アレンジされて提出される問題」は，多くの場合，もとの具体的な問題を知っての上ならば，もとの問題から本質的でない部分を取り除いたいっそう見透しのよい形と感じるが，もとの問題を知らないと非常に晦渋に思われる．しばしば「何をやっているのかわからない」と嘆く声が聞かれるのも，原因はそこにあるのではないか．
・伝統のある国々では，もとの問題を提出した数学者がまだ生きていたり，少なくとも精神だけは受け継がれていて，このような困難も無意識のうちに解決されているのかもしれない．日本では整数論など二三の分野を別にして伝統がなく，ほとんどすべてを論文と書物から得なければならない．そのためにこの問題は非常に深刻である．
・これに加えて，ヒルベルト以後，数学はいっそう多くの分野に分かれて，その各々が独自の発達を遂げてきたため，ひとりの数学者が全数学を体現するというようなことはヒルベルトをもって最後とする．
・このようなわけで，数学はまず本来の形の問題を知るのが困難である．第二に，本来の問題が現代の「理論」といかに結びついているのかを知ることに困難がある．第三に，数学の分野が非常に多様になっているために，個人の専門分野が次第に狭まっていき，お互いに理解し合うのが困難になっている．

192

ここで語られているのは黎明期を憧憬するこころである.「本来の簡単な問題」が生きて働いていた時代が黎明期であり，それが抽象的な理論に覆われて見えなくなっていることを慨嘆しているのである.

多変数関数論の黎明期の一側面

多変数関数論研究の基本的な課題を語る岡潔の言葉を，岡の第一論文

> 「有理関数に関して凸状の領域（Domaines convexes par rapport à fonctions rationnelles)」(1936 年)

の序文から拾いたいと思う．岡は,

> 多変数関数論における近年の進展にもかかわらず，いくつもの重要な事柄が多かれ少なかれ曖昧なままになっている.

と説き起こした．いくつもの重要な問題とはどのようなものかというと，特に「ルンゲの定理が成立する領域の型，あるいはまたクザンの定理が成立する領域の型」を決定すること，および「ハルトークスの凸性とカルタン＝トゥルレンの凸性との関係」を調べることである．岡はこのように指摘し，ここに脚註を附した．それはベンケとトゥルレンの著作

> 『多複素変数関数の理論』(1934 年)

を参照せよという指示であり，わけても 54 頁，68 頁，79 頁の三箇所が挙げられている.

以下，ベンケとトゥルレンの著作『多複素変数関数の理論』を『ベンケ＝トゥルレン』と略記することにする.『ベンケ＝トゥルレン』の 54 頁に記されているのは「レビの問題」である．ただし,「レビの問題」という言葉が用いられているわけではなく，レビの研究に由来する一問題に焦点があてられて,「特異点の理論の"ungelösten Hauptprobleme"(未解決の主要な諸問題)」のひとつとして提示されたのである.

この問題の根底に横たわっているのは，岡のいう「ハルトークスの凸性」である.「ハルトークスの凸性」というのは，のちに岡により**擬凸状**と呼ばれることになる凸性を指し，その名のとおり，ドイツの数学者フリードリヒ・ハルトークス（1874 – 1943 年）に由来する概念である．だが,「レビの問題」の根幹にハルトークスの凸性を見るというのは岡に独自の視点であり,『ベンケ＝トゥルレン』の 54 頁にそのように明記されているわけではない.

「カルタン＝トゥルレンの凸性」のというのは「正則凸状」と呼ばれる凸性のことで，カルタンとトゥルレンの共著の論文

> 「多複素変数関数の特異性の理論 正則領域と収束領域」(1932 年)

においてはじめて表明された．岡の第 1 論文が公表されたのは 1936 年．カルタンとトゥルレンの論文はその 4 年前に公表されたばかりであった．カルタンはフランスの数学者アンリ・カルタン（1904 – 2008 年)，トゥルレンはドイツの数学者ペーター・トゥルレ

ン（1907 – 1996 年）を指す．これらの二通りの凸性の相互関係を明らかにすることを，岡は重要な問題のひとつに数え，しかもそれを「レビの問題」との関連のもとで語ったのである．だが，『ベンケ＝トゥルレン』においてカルタンとトゥルレンの論文が語られている場所は 54 頁ではない．岡はここでもまた何かしら岡の目にしか映じない光景を見たのである．

岡の手持ちの『ベンケ＝トゥルレン』を見ると，54 頁の欄外にドイツ語の"ungelösten Hauptprobleme" が原語のまま筆写されていて，強い印象を受けた様子がうかがわれる．添えられた日付は「1935.1.16」（1935 年 1 月 16 日）である．1935 年は昭和 10 年．『ベンケ＝トゥルレン』が刊行された年の翌年であり，この年の年初から多変数関数論の建設に向けて新たな思索が開始された．『ベンケ＝トゥルレン』の序文が記された頁の欄外には，「1935.1.2」（1935 年 1 月 2 日）という日付が記入されている．

『ベンケ＝トゥルレン』の 68 頁に見られるのは「クザンの問題」である．ただし，「クザンの問題」という言葉がそのまま用いられたわけではなく，そこに見られるのはクザンの研究に由来する一系の問題である．岡は「クザンの定理が成立する領域の型」を追及するという問題としてそれらに言及した．

79 頁では「ルンゲの問題」が語られている．「ルンゲの問題」という言葉は「レビの問題」「クザンの問題」と同様，本書で仮に採用した呼称であり，『ベンケ＝トゥルレン』の著作でこの言葉がそのまま用いられているわけではない．「近似の問題」と呼ばれることもあり，「展開の問題」と言い換えても同じことになる．『ベンケ＝トゥルレン』では「ルンゲの定理がそこで成立する領域」を「ルンゲの領域」と呼び，「ある領域がルンゲの領域であるための必要十分条件」を求めるという問題を提示した．岡はこれを「ルンゲの定理が成立する領域の型」を追及する問題として言及したが，この諒解の様式は『ベンケ＝トゥルレン』で語られた問題と同一である．

ハルトークスの逆問題

「レビの問題」，「クザンの問題」，「ルンゲの問題」．多変数関数論の領域で曖昧模糊とした状態で残されているいくつもの重要な問題として，岡が具体的に指摘したのはこれらの三つの問題である．問題の由来に着目して当面の呼称を提示したが，岡の第 9 論文

「多変数解析関数について IX 内分岐点をもたない有限領域」（1953 年）

の第 3 章「主要な諸問題」を参照すると，三問題の呼称が次のように明記されている．

ハルトークスの逆問題 (le problème inverse de Hartogs)
クザンの諸問題 (les problèmes de Cousin)
展開の問題 (le problème de développement)

第 1 論文に見られる呼称と対比すると，「ハルトークスの凸性とカルタン＝トゥルレンの凸性の関係」に由来する問題は「ハルトークスの逆問題」，「クザンの定理が成立する領域の型」を追及する問題は「クザンの諸問題，「ルンゲの定理が成立する領域の型」を追及する問題は「展開の問題」にそれぞれ対応する．「クザンの諸問題」と複数形になっ

194

ているのはなぜかというと，この問題は「クザンの第 1 問題（le premier problème de Cousin）」と「クザンの第 2 問題（le deuxième problème de Cousin）」という二つの問題に分れるからである.『ベンケ＝トゥルレン』の 54 頁，68 頁，それに 79 頁に記されている諸問題と比較すると,「クザンの諸問題」と「展開の問題」については『ベンケ＝トゥルレン』の記述に比して大きな乖離は認められないが，もっとも際立った印象をもたらすのは「ハルトークスの逆問題」という呼称である．レビではなくハルトークスの名が前面に押し出されたのであり，何かしら重大な出来事が起こっていることが感知される場面である．

多変数関数論における三つの問題を挙げたのちに，これらの問題は相互に無関係ではありえないことを岡は指摘した．次に引くのは岡の言葉である．

> これらの問題の間には相互に親密な関係が認められる．それを研究することが，この論文および引き続く諸論文の目標である．

岡はこれから行われるであろう多変数関数論研究の到達目標をこのように宣言したが，中心に位置を占める主問題はハルトークスの逆問題であり，他の 2 問題にはこの主問題を解くための道を開く役割が期待された．岡は第 1 論文の時点においてすでに，**ハルトークスの逆問題の解決のプログラム**を心に描いていたのである．この間の消息の解明は第 1 論文の序文におけるもっとも重要な論点である．

滑らかな超曲面で囲まれた領域

三つの問題のうち，特にハルトークスの逆問題について,『ベンケ＝トゥルレン』に記述されている事柄をありのままに観察し，岡の言葉との比較を試みたいと思う．以下，しばらく『ベンケ＝トゥルレン』の記号をそのまま用いて表記する．

『ベンケ＝トゥルレン』の 54 頁ではレビの研究が語られているが，その対象となるのは滑らかな超曲面である．レビは 2 個の複素変数 $w = u + iv, z = x + iy$ の空間 $C^2(x, y)$ において，4 個の実変数 u, v, x, y の 2 階連続微分可能関数 $\varphi(u, v, x, y)$ により規定される超曲面

$$\mathfrak{S} : \varphi(u, v, x, y) = 0$$

を作り，それがある解析関数の特異点の壁でありうるための条件を追い求めた．この超曲面がある解析関数の自然境界であるための条件と言い換えても同じことになる．自然境界というのは解析関数の存在領域の　以下の叙述では，領域

$$\{(w, z) : \varphi(u, v, x, y) < 0\}$$

を $\{\varphi < 0\}$，あるいは単に $\varphi < 0$，領域

$$\{(w, z) : \varphi(u, v, x, y) > 0\}$$

を $\{\varphi > 0\}$，あるいは単に $\varphi > 0$，超曲面 $\mathfrak{S}$ を $\{\varphi = 0\}$，あるいはまたいっそうかんたんに単に $\varphi = 0$ などと適宜略記することにする．

解析関数というのは正則関数と有理型関数の総称であり，ある関数がある領域におい

195

て解析的であるとは，正則であるか，もしくは有理型であることと諒解する．特異点の言葉に言い換えると，関数を考えようとしている領域においていたるところで正則であるか，あるいはせいぜい非本質的な特異点のみしかもたない関数のことと見てもよい．それゆえ，超曲面 $\varphi = 0$ が特異点の壁を作るという場合，その特異点は本質的特異点である．

超曲面 $\varphi = 0$ により，関数 $\varphi(u, v, x, y)$ が考えられている領域は大きく二分される．一方は領域 $\varphi < 0$，もう一方は領域 $\varphi > 0$ である．そこで超曲面 $\varphi = 0$ が自然境界になるという場合，どちらの側から見てなのかという点を明示しなければならない．『ベンケ＝トゥルレン』で採られている語法に沿うと，$\varphi < 0$ **の側から見て**といえば，領域 $\varphi < 0$ におけるある解析関数の自然境界であることを意味し，$\varphi > 0$ **の側から見て**といえば，領域 $\varphi > 0$ におけるある解析関数の自然境界であることを意味している．

超曲面 $\varphi = 0$ を規定する関数 $\varphi(u, v, x, y)$ に 2 階連続微分可能という条件が課されていることを踏まえ，以下の叙述では，この超曲面を**滑らかな超曲面**と呼ぶことにする．

レビの微分式とレビの条件

解析関数の特異点の分布状況は任意ではなく，特異点の作る集合体の形状はある制限を受けることをハルトークスが発見した．それが「ハルトークスの連続性定理」である．ハルトークスは非本質的特異点と本質的特異点を区別しなかったから，ハルトークスのいう特異点というのは解析関数の正則性が破れる点のことである．それゆえ，特異点集合から存在領域のほうに視線を移すと，正則関数の存在領域，すなわち正則領域の形は任意ではなく，**ある奇妙な制限**（ガストン・ジュリアの言葉）を受けることを，ハルトークスの連続性定理は言い表しているのである．レビはここから出発してなお一歩を進め，論文

> 「2 個またはもっと多くの複素変数の解析関数の本質的特異点に関する研究」
> （1910 年）

において，**本質的特異点のみの集合体の形状もまたハルトークスの連続性定理が明示する制限を受ける**ことを明らかにした．レビはこれを領域 $\varphi < 0$ に適用し，もしこの領域が有理型関数の存在領域（有理型領域）であるなら，言い換えると，超曲面 $\varphi = 0$ がこの領域におけるある解析関数の本質的特異点の壁を作っているなら，そのときこの領域はジュリアのいう「ある奇妙な制限」を受ける．しかもレビは,「ある奇妙な制限」を関数 $\varphi(u, v, x, y)$ に課される条件として具体的に書き表すことに成功した．

「奇妙な制限」というのは，フランスの数学者ガストン・ジュリアが 1926 年の論文

> 「多変数解析関数の族について」（1926 年）

において使用した言葉である．ジュリアは岡が 1929 年から 1932 年にかけてフランスに滞在していた時期に師事した人で，岡はこのジュリアの論文が転機になって多変数関数論研究に向うようになった．多変数関数論を指し示す言葉はさまざまで，たとえば『ベンケ＝トゥルレン』の書名に見られるのは「多複素変数関数の理論」である．岡は「多

176

変数解析関数」という表記を採用し,「多変数解析関数について」という通し表題のもとで連作を書き続けたが,この表題はジュリアの論文にならったのである.

超曲面 $\{\varphi = 0\}$ が $\varphi < 0$ の側から見てある解析関数(正則関数もしくは有理型関数)の自然境界であるために関数 $\varphi(u, v, x, y)$ が満たすべき条件を書こうとして,レビは**レビの微分式** $L(\varphi)$ を導入した.それはこの関数の1階および2階の偏導関数を用いて組み立てられる微分式

$$16L(\varphi) = \Delta_2'\varphi\Delta_1''\varphi + \Delta_2''\varphi\Delta_1'\varphi - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial y}\right)$$
$$- 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial x}\right)$$

ここで,

$$\Delta_1'\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2, \quad \Delta_2'\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$$
$$\Delta_1''\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2, \quad \Delta_2''\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

である.レビの条件は,レビの微分式を用いて,超曲面 $\varphi = 0$ 上の各点において

$$L(\varphi) \geqq 0$$

という簡明な不等式(等号付き不等式)により表される.これは必要条件である.『ベンケ=トゥルレン』の定理21の「帰結1」であり,同書54頁に記されている.だが,岡が第1論文の冒頭で参照するようにと指示したのはこの「帰結1」ではなく,同じ頁に見られる「未解決の主問題」のほうである.

未解決の主問題

レビの思索は進み,逆問題の考察に移っていった.それは,レビの条件,すなわち,滑らかな超曲面 $\varphi = 0$ で囲まれる領域 $\varphi < 0$ がある解析関数の存在領域であるために満たされるべき必要条件 $L(\varphi) \geqq 0$ は,同時に十分条件でもあるだろうかと問い掛ける問題である.1911年の論文

> 「2個の複素変数の解析関数の存在領域の境界でありうる4次元空間の超曲面について」(1911年)

において,レビはこの問題を局所的に解決することに成功した.『ベンケ=トゥルレン』では54頁の「定理22」で報告されている.滑らかな超曲面 $\varphi = 0$ 上のどの点 P においても,不等式

$L(\varphi) > 0$(等号のつかない不等式)

が成立するとしよう.このとき,超曲面 $\varphi = 0$ の通常点 P に対し,P のある近傍 $\mathfrak{U}(P)$ において $\varphi = 0$ は $\varphi < 0$ の側から見てある正則関数の自然境界になる.これが「定理

190

22」の内容である．多変数関数論におけるレビの思索の到達点がここに示されている．

等号のつかない不等式で示される条件 $L(\varphi) > 0$ を指して,『ベンケ＝トゥルレン』は「レビの条件」と呼んだ．この条件が満たされるとき，超曲面 $\varphi = 0$ はその通常点の近傍において $\varphi < 0$ の側から見て解析関数の特異点の壁を作っていることを,「定理 22」は語っている．レビの条件は超曲面 $\varphi = 0$ が $\varphi < 0$ の側から見て**局所的に**特異点の壁となりうるための十分条件を与えているのである．

「定理 22」の紹介に続いて,『ベンケ＝トゥルレン』は「未解決の主問題のひとつ」として,

> では，レビの条件 $L(\varphi) > 0$ は**大域的に見ても**十分であろうか．

という問いを提出した．岡が注目したのはこの言葉である．この問題に対する特別の呼称は『ベンケ＝トゥルレン』には見られないが，後年，**レビの問題**と呼ばれるようになった．

「大域的に見ても」の原語は im Großen で,『ベンケ＝トゥルレン』ではイタリック体で表記されて強調されている．岡は手持ちの『ベンケ＝トゥルレン』の 54 頁の欄外に,「未解決の主問題」の原語とともに，この言葉も筆写した．

この問いが肯定的に解けるのであれば，レビの条件 $L(\varphi) > 0$ は，領域 $\varphi < 0$ において，超曲面 $\varphi = 0$ の全体をその自然境界とする正則関数 $f(w, z)$ が存在することを教えている．さらに言い換えると，超曲面 $\varphi = 0$ で囲まれる領域 $\varphi < 0$ は，$\varphi = 0$ 上でいたるところで $L(\varphi) > 0$ となるという条件のもとで，正則領域になるということになる．レビの条件 $L(\varphi) > 0$ は，特異点の理論の方面から見れば超曲面 $\varphi = 0$ が特異点の壁を作るための十分条件と見ることができるが，特異点の作る集合体の外側に広がる領域に着目すれば，滑らかな超曲面で囲まれた領域が正則領域であるための十分条件を与えているように見える．特異点から領域へという視点の変換の契機がここに現れている．

この問題の重要性を認識した最初の人物として,『ベンケ＝トゥルレン』はブルメンタールの名を挙げた.「未解決の主問題」という言葉が現れるのもこの場面においてである．

> この問題の重要性はまずはじめにブルメンタールによって洞察され，それ以来，特異点の理論の**未解決の主問題**のひとつになった．これまでのところ，この問題が解決された様子を目にすることができるのは，若干の個別的な場合に対してのみに過ぎない．

「若干の個別的な場合」として,『ベンケ＝トゥルレン』は次々とラインハルト領域，円領域，ハルトークスの領域を挙げた．ブルメンタール（1876-1944 年）はドイツの数学者で，ヒルベルトの影響のもとで多変数解析関数論を研究した．言及されたブルメンタールの論文は,

> 「多変数解析関数の特異点に関する注意事項」(1912 年)

である．1912 年の論文であり，ブルメンタールはレビの研究に向けて早い時期に関心を寄せた様子がうかがわれる．ただし，ブルメンタールは『ベンケ＝トゥルレン』のいう

198

「未解決の主問題」の解決に成功したわけではない．

滑らかな超曲面 $\varphi = 0$ で囲まれる領域 $\varphi < 0$ が解析関数の存在領域であるための必要条件 $L(\varphi) \geqq 0$)（等号つきの不等式）や，この曲面が局所的に特異点の壁を作ることを保証する「レビの条件 $L(\varphi) > 0$（等号のつかない不等式）が成立する場合，領域 $\varphi < 0$ それ自体を指して**擬凸状の領域**と呼ぶのはいかにも自然な印象の伴うアイデアである．だが,『ベンケ＝トゥルレン』が採用したのは「領域の擬凸性」ではなく,「超曲面の擬凸性」の概念であった．

擬凸状の超曲面

『ベンケ＝トゥルレン』の第 2 章，第 3 節は「超曲面（Hyperflächen)」という節題が附され，ここで**擬凸状の超曲面**の概念が導入された．任意個の複素変数の空間において語られているが，ここではこれまでの叙述に合せて 2 個の複素数 $w = u + iv, z = x + iy$ の空間において考えていくことにする．この空間内に滑らかな超曲面 $\varphi = 0$ が描かれていて，点 P は $\varphi = 0$ 上の点とする.「点 P を通り，しかも P を通常点とする解析的曲面をどのように描いても，P の近傍において $\varphi \geqq 0$ の側に配置される」という状況が現れることがある．その場合，超曲面 $\varphi = 0$ はその上の点 P において **$\varphi > 0$ の側から見て擬凸状**であるという．**$\varphi < 0$ の側から見て擬凸状**ということについても同様に考える．ここで，**解析的曲面**というのは，局所的に見るとき，ある正則関数の零点集合として表される曲面の呼称である．

このような意味合いにおいて考えられた擬凸状の超曲面 $\varphi = 0$ は，関数 φ のレビの微分式 $L(\varphi)$ の符号と密接な関係で結ばれている．すなわち，もし超曲面 $\varphi = 0$ がその上の点 P において $\varphi > 0$ の側から見て擬凸状なら，等号つきの不等式 $L(\varphi) \geqq 0$ が成立する．これを言い換えると，不等式 $L(\varphi) \geqq 0$ は超曲面 $\varphi = 0$ が点 P において $\varphi > 0$ の側から見て擬凸状であるための必要条件である．

『ベンケ＝トゥルレン』は滑らかな超曲面の擬凸性をこのように規定したが，この概念の由来はレビの研究であり，そのレビの研究の淵源はハルトークスの連続性定理である．滑らかな超曲面 $\varphi = 0$ に対して連続性定理を適用すると，この超曲面が解析関数の特異点の壁でありうるための条件が見出だされた．その際，どちら側から見て壁になっているのかを明示しておかなければならないが，$\varphi < 0$ の側と指定すると，この超曲面上の点 P に対し，**P の近傍において，P を通り，しかも P を通常点とする解析的曲面で，$\varphi \geqq 0$ の側に配置される**という性質を備えたものが存在することをレビは観察した.『ベンケ＝トゥルレン』はこの現象に超曲面のある種の凸性を感知して，**擬凸上の超曲面**の概念を提案したのである．

超曲面から領域へ，言い換えると，特異点から存在領域へと視点を移すなら，$\varphi > 0$ の側から見て擬凸上の超曲面 $\varphi = 0$ で囲まれる領域 $\varphi < 0$ それ自体を擬凸状と呼ぶことが許されるであろう．だが，**超曲面で囲まれていない一般的な形の領域については，領域の擬凸性ということをどのように考えればよいのであろうか**．特異点集合から領域へという視点の変換は困難を内包し，岡潔もまた思いのほか長期に及ぶ思索を強いられたのである．

199

ハルトークスの連続性定理

『ベンケ＝トゥルレン』を参照すると，ハルトークスの連続性定理は第 4 章の冒頭に書かれている（定理 17）.「連続性定理」のドイツ語表記は Kontinuitätssatz である．ただし,『ベンケ＝トゥルレン』では単に連続性定理と呼ぶのみであり,「ハルトークスの」という語句が附与されているわけではない．

第 4 章の章題は「Singuläre Mannigfaltigkeiten」で，そのまま訳出すると「特異多重形成体」というほどの言葉になるが,「解析関数の特異点の集り」をこのように言い表しているのである．その集合体の形状に課されるある種の限定を，連続性定理は明示した．ここではハルトークスの論文

「多変数解析関数の特異点で作られる形成体について」（1909 年）

から引きたいと思う．

> [ハルトークスの連続性定理]
> x と y の解析関数の何かある分枝 $f(x,y)$ に対して，点 $x=0, y=0$ は特異点としよう．他方，この点のある近傍において，その x 座標が 0 であるような他の点はすべて，f　(x, y) のどの小枝についても正則点であるとしよう．そうして $f_0(x,y)$ はそれらの小枝のうちのひとつを表すとすると，任意の小さい正の数 ε が前もって与えられたとき，そのときつねにある第 2 の正数 δ が指定されて，円 $|x|<\delta$ のどの点 $x=x_0$ に対しても，$f_0(x,y)$ の少なくともひとつの特異点 (x_0, y_0) で，条件 $|y_0|<\epsilon$ を満たすものが所属するというふうになる.（『数学輯報』，第 32 巻，68 頁.「どの点 $x=x_0$ に対しても」のところ，ゴシック体で表記した「どの」の原語 jedem は原文でもゴシック体で強調されている.）

ハルトークスは一般に多価関数を考えていて，分枝 $f(x,y)$ も 1 価とは限らない．$f(x,y)$ はある解析関数の一部分であり，原点 $x=0, y=0$ のある近傍において考えられているが，それ自身もまた複数個の小枝で構成されている．ここで，ドイツ語の Bestimmung に「小枝」という訳語をあてた．小枝のひとつが $f_0(x,y)$ である．一般的に考えると，この小枝は原点において分岐している可能性もありうるが，ここに引いた連続性定理ではそのような場合は考えられていないようであり，$f_0(x,y)$ は原点の近傍で 1 価と見てよいと思う．$f_0(x,y)$ の特異点の集まりが孤立せず，連続体を作っていることが語られている．連続性定理という呼称はそのような状況に由来すると思われるが，ハルトークス自身がそのように呼んでいるわけではなく，単に「補助定理」として語られている．

ハルトークスはベルギーのブリュッセルに生れた数学者である．1903 年 7 月，ドイツのミュンヘン大学でプリングスハイムの指導のもとで学位を取得したが，学位論文

「冪級数と 2 変数一価解析関数の基礎理論への寄与」

においてすでに連続性定理が取り上げられたという．続いて 1906 年の論文

200

「多変数関数のコーシーの積分公式からの二，三の帰結」

では，コーシーの積分公式に基づいて連続性定理が証明された（『ミュンヘン議事報告』，第 36 巻，230 頁）．多変数関数論のさまざまな可能性の萌芽を育み，基礎理論の建設に大きく寄与した数学者であった．

連続性定理のねらい

ハルトークスの論文「多変数解析関数の特異点で作られる形成体について」に現れた連続性定理には特別の呼称はなく，ただ「補助定理」とされただけであることは既述のとおりである．では，ハルトークスは連続性定理の支援を受けて，どのような命題を確立しようとしたのであろうか．連続性定理に託されたハルトークス自身の数学的意図を探索してみたいと思う．

『ベンケ＝トゥルレン』において連続性定理と呼ばれることになった補助定理に先立って，ハルトークスはつぎに挙げる命題を提示し，証明した．

> $x=0, y=0$ は，ある x と y の解析関数の，領域 $|x|<\rho, |y|<\rho'$ における何かある 1 価分枝 $f(x,y)$ の特異点としよう．条件 $|\xi|<\rho$ を満たす各々の値 ξ に対して，$f(x,y)$ のひとつ，しかもただひとつの特異点 $(\xi,\eta)=(\xi,\varphi(\xi))$ が存在するとして，その y 座標 $\eta=\varphi(\xi)$ の絶対値は ρ' 以下であるとしよう．そうしてさらに，$\eta=\varphi(\xi)$ は $|\xi|<\rho$ において ξ とともに連続的に変化する値をもつとしよう．そのとき $\eta=\varphi(\xi)$ は必ず，$\xi=0$ において正則な ξ の解析関数を表す.（『数学輯報』，第 32 巻，62 頁）

この定理では，平面 $x=\xi$ による領域 $|x|<\rho, |y|<\rho'$（この形の領域は 2 重円板と呼ばれている）の切り口

$$S(\xi)=\{(\xi,y):|y|<\rho'\}$$

の上に，解析関数の特異点がただひとつだけ出現する場合が取り上げられている．分枝 $f(x,y)$ が一価であることと，関数 $\varphi(\xi)$ の連続性が仮定されていることも注目に値する．後者の二つの仮定により一価連続関数 $\varphi(\xi)$ が確定するが，なお歩を進めて解析的であることが主張されたが，解析性の根拠となるのは $f(x,y)$ の解析性である．

この定理が現れたのは『数学輯報』，第 32 巻の 62 頁である．条件を緩めて改訂された定理が 70 頁から 71 頁にかけて記されているが，これらの二つの定理をはさんで連続性定理が補助定理という名で登場する．連続性定理は上記の命題を改訂するために使われたのである．

緩められたり削除されたりした仮定は三つ．まず分枝 $f(x,y)$ の一価性は削除された．次に，各々の値 ξ に対応する特異点が「ただひとつであること」という仮定に代わって，「高々ひとつであること」が仮定された．最後に，「関数 $\varphi(\xi)$ の連続性」の仮定は取り払われた．それでもなお関数 $\varphi(\xi)$ は一価関数として確定し，しかも連続であること，したがって前述の 62 頁の定理により解析的でもあることが示されるが，この証明を可能にするのが連続性定理である．ハルトークスが連続性定理を補助定理として配置した理由はこれで明らかである．ハルトークス自身には，解析関数の存在領域に課された「奇妙

な制限」を発見したという自覚は見られない．この点に留意しておきたいと思う．

超曲面に連続性定理を適用すると

ハルトークスは独自のねらいをもって連続性定理を提示して，特異点の集まりの形状が任意ではありえないことを明らかにした．特異点の集まりの外側に広がる場所に目を移せば，そこは解析関数の存在領域である．岡潔はそこに凸性を感知して，「ハルトークスの凸性」という言葉によりこれを言い表した．ハルトークス自身は存在領域の凸性を自覚していたわけではないが，ハルトークスから出発したレビの認識は一段と深まっている．

ハルトークスの連続性定理では，2 個の複素数 x, y の空間において，$x = a$ （a は定数）という形の複素平面が考えられている．a をパラメータと見れば，y 平面といわば平行な複素平面の族が構成されているのである．原点 $(0, 0)$ の近傍において状況を観察すると，平面 $x = 0$ において，原点のみがある解析関数 $f(x, y)$ の特異点であるなら，この平面を y 平面と平行にどれほどわずかであってもずらした平面 $x = a$ の上にも必ず $f(x, y)$ の特異点が存在する．これが連続性定理において語られている事柄である．

複素平面は非常に特別の形の解析的曲面である．今，原点を通り，しかも原点において特異点をもたない解析的曲面 $g(x, y) = 0$($g(x, y)$ は原点において正則な解析関数) が描かれているとき，この曲面をある指定された方向にずらしていくと，解析的曲面の族が形成される．その族に対しても，解析関数の特異点に関して連続性定理と同じ形の言明が可能である．レビはこのような観点を採用した．

2 個の複素数 x, y の空間に超曲面 $\varphi = 0$ が配置されているとき，もしレビの微分式 $L(\varphi)$ がこの超曲面上で定符号，すなわちつねに正であるか，あるいはつねに負であるならば，点 P の近傍において，P を通り，P において特異点をもたない解析的曲面で，しかも超曲面 $\varphi = 0$ と点 P のほかにはいかなる点も共有しないという性質を備えているものを描くことができる．レビはそのような曲面 Σ を関数 φ を素材として構成した．『ベンケ＝トゥルレン』はこのような状況の中に凸性を感知し，「擬凸状の超曲面」ということを語ったのである．

レビの計算によれば，もしレビの微分式 $L(\varphi)$ が超曲面 $\varphi = 0$ 上で不等式 $L(\varphi) > 0$ を満たすなら，Σ は $\varphi > 0$ の側に包摂され，もし $L(\varphi) < 0$ なら Σ は $\varphi < 0$ の側に包摂される．

今，超曲面 $\varphi = 0$ は点 P の近傍において，$\varphi < 0$ の側から見てある解析関数の特異点の壁を作っているとする．このとき，もし $L(\varphi) < 0$ であれば，解析的曲面 Σ は $\varphi < 0$ の側に包摂される．だが，これはありえない．実際，点 P において超曲面 $\varphi = 0$ に法線を引き，Σ をその法線に沿ってずらしていくことにより解析的曲面の族が構成されるが，もし Σ が $\varphi < 0$ の側に包摂されるとしたなら，連続性定理に反する現象が現れる．なぜなら，Σ を法線に沿って $\varphi < 0$ の側にずらしていくとき，連続性定理によれば，そのようにして連続的に描かれていく解析的曲面の上には必ず $f(x, y)$ の特異点が存在することになるが，そこは $f(x, y)$ の存在領域であるから，そのようなことは起こりえないのである．

202

それゆえ，超曲面 $\varphi = 0$ が点 P の近傍において，$\varphi < 0$ の側から見てある解析関数の特異点の壁を作る場合には，不等式 $L(\varphi) \geqq 0$ が成立しなければならない．この不等式は $\varphi < 0$ が解析関数の存在領域であるための必要条件を与えている．

特異点から領域へ

レビは滑らかな超曲面に対してハルトークスの連続性定理を適用し，超曲面がある解析関数の特異点集合でありうるための必要条件を，解析的曲面の族の言葉で表記した．『ベンケ＝トゥルレン』はそこに凸性を感知して，擬凸状の超曲面の概念を提出した．超曲面 $\varphi = 0$ が $\varphi < 0$ の側から見て特異点の壁でありうるとするなら，この超曲面はその上の各点の近傍において $\varphi < 0$ の側から見て擬凸状であることはありえない．これは連続性定理を見るひとつの視点を語ったのであり，レビのアイデアの根幹を作っている．この場合，レビの微分式はこの超曲面上で不等式 Ł$(\varphi) \geqq 0$ を満たさなければならない．なぜなら，もし Ł$(\varphi) < 0$ なら，超曲面 $\varphi = 0$ は $\varphi < 0$ の側から見て擬凸状であることになってしまうからである．

ハルトークスは「連続性定理」という呼称を用いたわけではなく，レビもまた「擬凸状」という言葉を使わなかった．『ベンケ＝トゥルレン』には「擬凸状」という言葉が出現するが，擬凸状であったりなかったりするのはどこまでも超曲面であり，領域ではない．その上の各点において不等式 Ł$(\varphi) \geqq 0$ が成立する場合，領域 $\varphi < 0$ を指して「擬凸状の領域」と呼ぶのは一見して自然な感じのするアイデアである．だが，そのためには特異点集合から領域へと，視点の転換を遂行しなければならないのである．

超曲面で囲まれた領域に限定するのではなく，一般的な形状の領域の擬凸性を語ろうとするのは一段と困難である．レビは超曲面，もしくは超曲面で囲まれる領域に対して擬凸性が完治されることを明らかにしたが，その根源に位置するのはハルトークスの連続性定理である．それなら領域の凸性は連続性定理そのものに内在していると考えられるのではあるまいか．ここにおいてようやく「擬凸状の領域」の概念が確定し，岡のいう「ハルトークスの凸性」の意味合いが明らかになった．そうして逆問題に移ることにより,「ハルトークスの逆問題」もまた造形されるのである．

ハルトークスの逆問題の造形という一事の中に,「定義が変遷するのは，それが研究の姿である」という岡の言葉がありありと現れている．多変数関数論の黎明期と呼ぶのに真に相応しい情景と思う．

（平成 30 年 1 月 18 日）

203