「比較数学史とパラダイム論～斎藤憲氏の学説について～」

三富照久　中央大学文学部　(teruhisa31@yahoo.co.jp)

§1　数学史のパラダイム

事の発端は、中央大学の図書館で他の文献を探している時に、たまたま斎藤憲氏の数学史についてのパラダイム論の論考（下記、Aと記す）を発見した事である。（以下、敬称略）

(A)「数学史におけるパラダイム・チェンジ」、現代思想、２０００年、１０月臨時増刊号、

斎藤憲は、現在刊行中である世界的に最も優れた翻訳・解説と言っても良い「エウクレイデス全集」（東大出版会、２００８～）の主要な翻訳・解説・編集委員であり、エウクレイデス研究の世界的権威として知られている。　古くは**「ユークリッド「原論」の成立～古代の伝承と現代の神話」東京大学出版会、１９９７**、という専門研究書を出版されており、その内容の独創性に驚愕した事を覚えている。　それまで村田全や中村幸四郎といった数学科出身の数学史家の翻訳・解説したユークリッド像しか知らなかった私にとって、古代ギリシア語を分析しつつエウクレイデス「原論」の実像にせまろうとする斎藤憲のアプローチは、まさに晴天の霹靂であった。　一方で斎藤憲は、一般読者向けの岩波科学ライブラリーから、**「よみがえる天才アルキメデス～無限との闘い」２００６,「ユークリッド「原論」とは何か～２千年読みつがれた数学の古典」２００８、「アルキメデス「方法」の謎を解く」２０１４,** といったギリシア数学の本質を非常にていねいにやさしい口調で語っている本も出されている。

さて、上述の斎藤憲の論考 (A)を発見した時の驚きは、まず冷徹とでも言えるほど正確にギリシア数学の実像を発掘してきたギリシア数学史の専門家が、科学史研究における流行とともに非常に批判も受けたパラダイム（規範）という概念を扱っていること、そして古代ギリシアから現代にいたる数学史全般についてのパラダイム変換（クーンの理論では科学革命に相当）を語っているという事、そしてそのパラダイム変換の視点が実に“味わい深い”事である。

よく知られているようにパラダイムという概念は、トーマス・クーンがその著「科学革命の構造」（原著、１９６２，日本語翻訳、１９７２）で導入したものであり、それまで歴史家バターフィールドによって主に１７世紀を中心とする、コペルニクス、ガリレオ、デカルト、ケプラー、ボイル、ニュートン、ライプニッツ、らによる歴史的運動として説明された「科学革命」という概念を、通常科学を規定する“パラダイム（規範）の変換”として再構成するものであった。

このパラダイムによる“パスル解き”としての通常科学と、パラダイム変換としての科学革命を対比させるクーンの構造論は、その明快さから上述の歴史的な「科学革命」（大文字の Scientific Revolution）だけではなく、科学史の色々な分野や、社会科学など他の分野にも適用され、その分野でのパラダイム変換が「科学革命」（小文字の scientific revolution）の意味で使用される様になっていき、ジャーナリズムなどでも多用される“流行”として広まっていった。　しかし、パラダイム概念があまりに多義的である事が学界で批判されて、クーン自身がパラダイム概念の修正を試みるに至った、という学問的背景がある。

クーン自身は、初めは数学史におけるパラダイム変換に懐疑的であった、と親交のあった佐々木力がどこかで書いているが、斎藤憲以外にも数学史における大きな変革としてのパラダイム変換を論じている学者は多い。（一松信や藤田宏など）　まずは§２で、斎藤憲の数学史におけるパラダイムを紹介しつつ、その要点を述べる。

192

§2　斎藤憲のパラダイム説

（A）では、以下の３つのパラダイムが提出されている。

（P1）古代ギリシア（ポリス時代）における「証明の発明」
（P2）近世西欧の「計算による証明」
（P3）１９世紀西欧の「対象の構築」

上の（P1）～（P3）は、著者自身の「まとめ」で、次の様に言い換えられている。

「P1」ギリシアは数学に証明を与えた（前五世紀後半、キオスのヒッポクラテス）
「P2」１７世紀は数学に記号を与えた（デカルト「幾何学」）
「P3」１９世紀は数学に定義を与えた（リーマン「幾何学の根底にある仮説について」）

まず驚かせられたのは、（P1）の「証明」と（P2）の「計算」の鮮やかな対比である。そこには、ギリシア数学についての卓越した審美眼が感じられる。　それはギリシア数学を、その背景となるギリシア文化（ポリス文化）から根底的に理解している事と、ギリシア語で書かれたテキストに対する正確な読解によるものである。

（P1）のギリシア人が発明した「証明」は、エウクレイデス「原論」に典型的に見られる様に、アルケー（原理）としての定義・公理・要請のみから、命題・作図の正しい事を次々に導く技法であるが、（A）では「証明」の誕生は、ギリシア人のポリス文化（BC８世紀～）で最も重要であった**「弁論によって他人を説得する行為」**に由来するとされ、なぜギリシアにのみ「証明」が生まれたか、が深く議論されている。　それゆえ、冒頭で次のように述べられている。（A、p53~p55）

「しかし世界のさまざまな文明圏で発生した数学を見渡すなら、**一見自明なことでも論証・証明という手続きでその正当性の根拠を明らかにし、定理として確立するスタイルは、古代ギリシアの数学と、その影響を受けた中世アラビア、中世ラテン西欧の数学、そしてこれらを受け継いだ近世以降の西欧の数学にしか見られません。　たまたま近世西欧の数学が現代世界の数学に発展したために、「証明つきの数学」が現代の我々にとってスタンダードなものになったわけです。**」

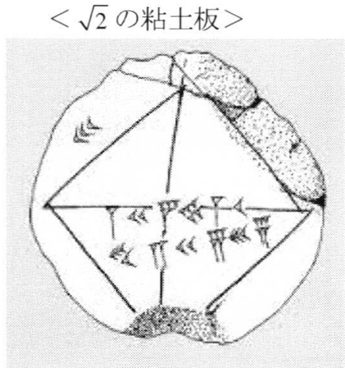
この指摘は非常に重要であって、ギリシアのポリス文化を除く古代オリエント文化や、古代インド文化、古代中国文化などでは、数学は基本的には「計算術」であり、その操作的な数学の伝統は、ヨーロッパ以外では、日本の和算など１９世紀まで続くのである。

しかし、計算術だからといって、数学としてのレベルが低かったというわけではない。
例えば、右の粘土版には古代バビロニア数学の操作的数学の成果として、対角線の長さ（$\sqrt{2}$に相当）が６０進法で、

「１．２４　５１　１０」（＝ $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$ ）

と与えられているのである。　この値は 1.41421297 であり、$\sqrt{2}$＝1.41421356・・・の非常に良い近似となっている。
このような実用を超えて精度の良い数値が探究された背景には、古代バビロニアには「粘土版の家」という書記の学校があり、そこで問題のための問題が作成・研究される、ある程度の学問的環境があったのである。注１）

＜$\sqrt{2}$の粘土板＞



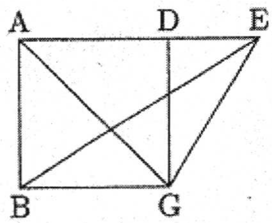
注１）「バビロニアの数学」室井和夫、東大出版会、２０００

では「証明」付きのギリシア数学は、古代オリエント数学の「計算術」とどのように違うのか？（A）では、「ギリシア人が証明を発明した」と共に、**「計算は証明ではなかった」**と述べられている。　その説明として、エウクレイデス「原論」における極端な計算の排除を挙げている。注２）

注２）「エウクレイデス全集２　原論７～１０巻」東大出版会、２０１５、斎藤憲による解説。

実は「原論」には、驚くべきことに普通の意味における数の加減乗除が登場しないのである。　まず数は「単位（１に相当）から成る多」として自然数のみに対応し、比例論により数αの多倍（つまりｎα）という概念はあるが、それは比例論を展開するためであり、有理数や無理数は登場しない。　有理数α/βの代わりに比としてのα：βが考察され、無理数の代わりに通約不能な量（数ではない）としての無理量（例えば、大きさ２の正方形の一辺の長さ、に相当）が考察されるのである。　この比例論を土台とする数と量（大きさ）の区別こそ、他の古代文化圏の「計算術」としての数学にはない、決定的な特徴である。

「原論」には、普通の意味での数の計算（加減乗除）がなく、連続量である面積や体積についても、辺の長さをそのまま「測る」のではなく、２つの図形を比較するという比例論的な方法が適用されている。　つまり現代的な意味での面積や体積の公式が無いのであって、例えば三角形の大きさ（面積）は「原論」では、「三角形は、底辺と高さが同じ長方形の対角線で２等分される三角形の大きさ（量）と等しい（つまり三角形と長方形の大きさの比が１：２である）」と表現される。注３）



注３）エウクレイデス「原論」第１巻、命題４１では右の図が与えられ、与えられた三角形BEGが、長方形ABGDの半分の大きさである三角形BAGと大きさが等しい、事が証明されている。　現代の学校数学では、三角形BEGは三角形BAGに“等積変形”できる、という言い方をする事が多いが、「原論」ではこのように作図的（視覚的）に２つの図形の大きさを比べるのが王道であり、２つの図形の大きさを数値的に計算して比べるという事がないのである。

「原論」における図形の大きさ（メゲトス、量とも訳す）とは、眼に見える図形の大きさそのものであり、現代の様に数（実数）で図形の長さを計算した面積や体積の数値ではないのである。

実は「原論」では、現代の連続した実数概念に相当するものが巧みに回避されているのであって、それを可能にしたのが数（単位から成る多、離散量）と量（大きさ、連続量）の区別と、両方に適用される比例論なのである。（この事自体は（A）ではあまり強調されていない）　つまり数であれ図形の大きさであり、常に２つまたは有限個の図形的対象の関係（比例関係）を比べるというのが、「原論」の基本姿勢なのである。　（A）では、「証明」の誕生の理由として、アテナイの様な民主的なポリスにおける**「弁論によって他人を説得する行為」**の重要性が指摘されているが、もともとギリシア語の「証明」の原義は「指し示す」（つまり相手にハッキリ確認させる）を意味する「デイクニュミ」であり、「原論」では、数も線分で表されている事からわかるように、眼に見える“形あるもの”の性質が「証明」の対象であったのである。　その意味では、「原論」を基礎とするギリシア数学には、方程式の解法のような代数学（計算）が含まれていないのである。注４）注５）

注４）「ユークリッド「原論」の成立」斎藤憲、東大出版会、１９９７

「さらば幾何学的代数（ギリシア幾何学の理解のために）」斎藤憲、京大数理研考究録、２００２

「エウクレイデス全集 第１巻　原論１～６巻」東京大学出版会、２００８，斎藤憲による解説、

上の著作で 斎藤憲は、ブルバキ「数学史」などの「原論」第２巻を「幾何学的代数」と見なす解釈を、歴史的に根拠の乏しい“現代数学の過去への投影”として否定している。

注５）３世紀に成立したディオファントス「算術」も、ギリシア語で書かれているという意味ではギリシア数学であるが、不定方程式などの解法をテーマにし、エウクレイデス的な数の概念を否定して、有理数解を認めているという点では、エウクレイデス「原論」を基礎としたギリシア数学（アルキメデスやアポロニウスなど）に

174

対して、内容的には異質である。　それは、ヘレニズム時代に成立した「ヘルメス文書」が、ギリシア語で書かれているとしても、エジプト由来の神秘思想（占星術）を含んでいるので、いわゆるギリシア哲学と同列に扱う事ができないのと同等である。（しかし歴史的には、１５世紀のメディチ家のプラトン・アカデミアカでは、プラトンもヘルメス文書もプロティヌスも、ギリシア語で書かれた「古代神学」を伝える書として同列に扱われ、フィチーノによりラテン語に翻訳された）　BC３世紀以降のヘレニズム時代は、確かに共通ギリシア語が諸民族の公用語になったが、人種も思想も多様であり、色々な思想がギリシア語に訳されて議論され融合された。　例えば、アレクサンドリアのユダヤ人フィロンがギリシア語で著した「世界の創造」も、ギリシア語で書かれているが、ユダヤ教（旧約聖書）の「創世記」のギリシア哲学的概念による象徴的解釈であり、フィロンの思想は、神を無限と考える点でヘブライ思想とギリシア哲学の融合とみなす事も可能である。　その意味で、ディオファントス「算術」は、古代バビロニア由来の「計算術」としての方程式論の、ギリシア語による復活と見なす事もできる。（歴史的には「算術」は、１６世紀以降のヨーロッパでラテン語に翻訳されて研究され、イスラム圏のアラビア語由来のアルゲブラ（代数学）に対抗して、ギリシア語由来の代数学として、ヨーロッパ中心主義を満足させる、という意味で「ギリシア数学」の古典とみなされた）

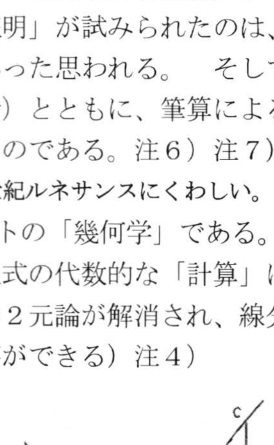
つまりエウクレイデス的なギリシア数学においては、現在とは異なり**「計算は証明とはみなされていなかった」**のである。　そして、この伝統が変革されるのが、（P２）である。

この（P２）について、私が最初に（A）を一読して最も感銘を受けたのが、１６世紀に３次程式の解法を研究したタルターリアやカルダーノらにとって、**「計算は証明ではなかった」**という指摘である。（カルダーノは空間図形の体積を考える事によって、３次方程式の解法を証明しようとしている）　その理由は、ギリシア以来の**「計算は証明を与えない」**という伝統であったと述べられているが、この事実によって、**「なぜ中世アラビア数学において、インド由来の２次方程式の解法に、図形による説明（証明）が対応させられたか？」**という疑念が解決した思いがしたからである。西ローマ帝国滅亡後に、ギリシア語によるヘレニズム科学を引き継いで発展させたのは、アラビア語を共通の学術用語（商業用語）としたアラビア語科学圏（イスラム世界）であった。　エウクレイデスやアルキメデス、プトレマイオスらの著作がアラビア語に翻訳されて研究される環境において、インド由来の２次方程式の計算による解法に対して、幾何学的な「証明」が試みられたのは、ギリシア由来の**「計算は証明を与えない」**という伝統において、当然であった思われる。　そしてこのインド数学のアラビア語科学圏への移入・研究は、代数学（方程式論）とともに、筆算による１０進法計算を西欧に伝える契機（いわゆる１２世紀ルネサンス）となるのである。注６）注７）

注６）「近代科学の源流」伊東俊太郎、中公文庫、２００７，アラビア語科学や１２世紀ルネサンスにくわしい。

（P２）の**「計算が証明になる」**に大きく寄与したのが、１７世紀デカルトの「幾何学」である。ここではまさしく代数曲線（作図）の幾何学的問題が、ｘとｙによる方程式の代数的な「計算」によって解かれているのである。（デカルトでは、「原論」における数と量の２元論が解消され、線分の長さ（量）の一元論として、素朴実数論が用意されている、と見なす事ができる）注４）

注７）（A）では、アポロニウスの円錐曲線論とデカルトの幾何学が比較され、例として双曲線を表す右図が示されている。　アポロニウスでは、右図でCDを一辺とする正方形の大きさ（面積）と、ADとBDを２辺の長さとする長方形の大きさ（面積）の比が一定として、Cの軌跡が「作図」されるが、デカルトではADの長さをｘ，CDの長さをｙ，ABの長さをａとして $y^2 = kx(x+a)$　と表現され、作図の代わりに「計算」されるのである。



そしてこの**「記号の計算によって証明が行われる」**というパラダイムによって、記号による無限小解析（微分積分学）が、成立してゆくのである。（しかしニュートンが中期以降、デカルト流の解析幾何学を“記号のかさぶた”と呼んで嫌悪し、有名な「自然哲学の数学的諸原理」（通称プリンピ

175

キア）を、エウクレイデス的な幾何学的証明法を用いて書いたのは、まさに「計算が証明になる」事が、ギリシア起源の**「計算は証明ではない」**という幾何学的美意識を破壊するという本質を、するどく意識していた事を示している、と解釈することもできる）

次に（P３）であるが、「１９世紀の対象の構築」とは、「操作的的定義」によって数学的対象を厳密に定義する事を意味している。　その典型例として、リーマンによる「幾何学の基礎をなす仮説」と、デーデキントやカントールによる実数の構成法が挙げられている。　実は興味深い事に（A）では、(P１）に関連して**「ギリシア数学に記号がない」**また**「ギリシア数学には定義がない」**、と述べられているのである。　エウクレイデス「原論」には、確かに三角形 ABC や角 ABC の様な言い方はあるが、決して三角形を成す「点そのもの」に文字としての A、B、C が対応しているわけではないのである。(文字は点ではないので、存在論的には当然であるとも言える）　つまり文字は点を示す標識のようなものであって、点自身とは同一視されないのである。　また「原論」第１巻には、ホロイ（定義と訳される）として、「点とは部分のないものである」「線とは幅のない長さである」などがあるが、(A) では「これらの定義は（証明に）利用されることがありません」と指摘しており、点や直線が何かについては「語り手（著者）と聞き手（読者）の間に、暗黙の合意があった」と述べられている。注８）注９）

注８）アリストテレスは、円積問題についてのアンティホンによる極限論法「正ｎ角形は正方形に等積変形可能であり、正ｎ角形の　n→∞　の極限が円になるので、円も正方形に等積変形可能である」を認めなかった。なぜなら「正ｎ角形は、ｎをどんなに大きくしても、決して円とは一致しない」からである。　同様に、アリストテレスは、「点は大きさをもたないので、線分は点の集まりではない」とも述べている。　ここには存在論的に厳密性を重視する、ギリシア哲学の姿勢が反映している。(アリストテレスにおいては、矛盾律も存在についての公理、つまり存在する事と存在しない事は両立しない、として論理学ではなく存在の学としての「形而上学」に述べられている）　「原論」が極限論法を認めず、その背理法である「取り尽くし法」を採用しているのは、アリストテレスと同様の判断を共有している、と考える事もできる。　極限論法は、ライプニッツの無限小解析では、dy/dx などに記号化されて認められていったが、その存在論的意味については、絶えず哲学者から疑念をもって議論された。　そして極限論法は、１９世紀以降の操作的定義（ε－δ論法など）の導入によって、初めて存在論的疑義から解放されるのである。　例えば、アンティホンの「正ｎ角形→円」の場合は、正ｎ角形と、それと同じ半径の円の大きさ（面積）の差が、「n→∞　のとき、限りなく０に近づく」なら「正ｎ角形の　n→∞　の極限は円である」と定義しましょう、と言うのである。　ここでは、アリストテレスの意味で極限が確定しているわけではなく、{正ｎ角形} の列に対して、「限りなく近づく」（ε－δ論法の様に、量的に評価可能）ならば、{同じ半径の円} を「正ｎ角形の極限」と呼ぼう、というだけなのである。
（つまり、{正ｎ角形} の列→同じ半径の円、は“写像”なのである）

注９）「原論」で、定義と訳される原語のホロイ（ホロスの複数形）は、もともとの“境界”という意味であり、「原論」第１巻においても、図形は何らかの境界（ホロス）によって囲まれたもの、のようにも使われている。確かに「点とは部分のないもの」は、１９世紀的な操作的定義ではなく、(A) で述べられている様に、証明に利用されているわけではないが、点の“論理的性格”を限界付けている、とも言える。　実は、「点が大きさをもつか？」は、エレア派などギリシア哲学で厳密に論議されていた、という哲学的背景があり、有名なゼノンの逆理（２分割など）も、「点（原子）が大きさをもつと仮定すると、線分は有限個の点から成る」ことを反駁するための言明である、という解釈もある。(山川偉也「ゼノン４つの逆理」　講談社学術文庫、２０１７）
証明で利用されていないとしても、点が大きさをもつとすれば、「原論」における図形の大きさの記述も違ったものになるであろう（不可能かもしれない)、そういう意味で、「原論」のホロイは、「原論」が成立する上での論理的な前提となっている、と考える事もできる。(従って、ホロイに対して、現代では操作的定義を意味するようになった「定義」を、訳語として採用するのは不適切かもしれない）　その昔、伊東俊太郎や村田全らによって翻訳・紹介されて、一世を風靡したサボー「ギリシア数学の始原」においても、論証数学の起源をエレア派の弁証法に見出し（ゼノンはエレア派の祖パルメニデスの弟子である)、「原論」のホロイやアキシオーマ

176

タ（公理と訳される）に、エレア派の影響がある、という主張がなされている。

（A）では、「原論」において唯一操作的定義とみなせるものとして、４つの量 a, b, c, d、に対する比の関係、「$a:b=c:d$ 」の定義を挙げている。（「原論」第５巻の定義５）

「任意の自然数 m, n に対して、
$ma > nb$ ならば $mc > nd$,
$ma = nb$ ならば $mc = nd$,
$ma < nb$ ならば $mc < nd$ 」
（右が原文の翻訳）

４つの量が，第１が第２に対し，そして第３が第４に対し，同じ比にあると言われるのは，第１と第３の等多倍が，第２と第４の等多倍に対して，それらが何倍であろうとも，〔第１と第３の等多倍の〕各々が〔第２と第４の等多倍の〕各々に対して，あるいは同時に超過するか，あるいは同時に等しいか，あるいは同時に不足するときである．ただしこれら〔の多倍〕は対応する順序でとられるものとする．

a, b, c, d が０でない実数であれば、
「$a:b=c:d$ 」は、分数として、$a/b=c/d$ でしかない。　しかし、「原論」では一般に「量」は無理量を含み、「数」ではなく、まして実数ではない。（加減乗除もない！）　従って、上述の様な比例関係のみを用いた複雑な表現（右の原文）になるのであろう。（この比例の定義は、エウドクソスにより考案されたと、言われている）
現代的な分数の表記を使えば、上の定義（数式）は、以下の様に表せる。（実数を用いた解釈）

「任意の自然数 m, n に対して、
$n/m > a/b$ ならば $n/m > c/d$,
$n/m = a/b$ ならば $n/m = c/d$,
$n/m < a/b$ ならば $n/m < c/d$ 」

左の定義は、a/b が有理数ならば、$a/b=c/d=n/m$ を意味し、a/b が無理数ならば、有理数　n/m の列によって、a/b と c/d が、全く同様に無限に近似できる事を示している。

上の比例の定義（原文）は、１７世紀まで「原論」の読者を非常に悩ませたものであり、ガリレオも晩年の「新科学対話」において、自由落下の法則の記述に「原論」の比例論を用いており、そこでこの比の定義を「証明すべき定理」ではないか、と主張している。　つまり、操作的定義という概念そのものが、まだまだ理解されていなかった、という事になる。（斎藤憲「ユークリッド「原論」とは何か」岩波科学ライブラリー、２００８，第８章、くわしくは、高橋憲一「ガリレオの迷宮」共立出版、２００６，第２章）　そして、「原論」の数と量の区別を前提とした比例論に代わって、ステヴィンやデカルトによる素朴実数論（加減乗除が定義されている）が発明され普及していくのである。

さて、（A）では、上の「原論」の比例の定義と、操作的定義の典型例としてのデーデキントによる実数の構成（いわゆるデーデキントの切断）が、比較されて考察されている。　上の実数を用いた定義では、a/b は有理数全体を、{a/b より大きい有理数} と {a/b より小さい有理数} に、一意的に（つまり、$a/b=c/d$ ）２分割している。　そこでデーデキントは、有理数の全体を２つに分割する切断として、実数を操作的に定義したのである。（つまり無理数を創造した）　確かに、外見上では、「原論」の比例の定義とデーデキントの切断は類似点があるが、（A）では、その相違は決定的であるとして、以下の様に述べている、「決定的な相違は、エウドクソスが提案したのは、幾何学量の大きさの関係としての比を比較する方法であり、そこでの対象である幾何学量は、すでに図形として先に存在しているのに対し、デーデキントはこの比較の方法を梃子にして、既知の有理数から実数（無理数）という新たな対象を創造しようとしているということです。」　そして、エウドクソスとデーデキントの態度の違いについて、「共約不可能」と表現している。（この「共約不可能」という言葉は、まさしくクーンがその科学革命論において、科学革命の前後で科学の対象の理解の仕方が、全く異なる状態を表すために利用した言葉である）

127

§２　問題点の提起と考察

(A) の数学史における３つのパラダイム説は、ギリシア数学の根源的に深い理解に支えられて、非常に説得力があり、率直に素晴らしいと思う。　ただ、より広い比較文化史、比較数学史の立場からすると、いくつかの疑問点を見出す事ができる。（３つのパラダイム説が、根本的に間違っているわけではない）　以下、その疑問と理由を提示してから、私自身の意見を述べる。

（疑問１）論証数学としてのギリシア数学の誕生は、確かに大きなパラダイム（規範）であるが、それは果たしてクーンの意味での「科学革命」になっているのか？

（理由）　バビロニア数学は、方程式論などで高度なアルゴリズムに達しており、数学のレベルは決してギリシア数学に劣っていたわけではなく、バビロニア数学が行き詰まって、ギリシア数学が誕生したわけではない。　科学革命の例としては、ギリシア以来の地球中心宇宙説が否定されて、コペルニクス以降に太陽中心宇宙説が認知された事例が有名であるが、ギリシア数学の誕生によってバビロニア数学の内容が否定されたわけではない。現にバビロニア数学由来の６０進法や三角法は、計算数学としてギリシア天文学に取り入れられ、プトレマイオスの「数学集成（アルマゲスト）」にも利用されている。

（考察）　世界史的に見れば、どの古代文化圏でも数学は「計算術」として出発した。　灌漑農耕文化を主体とする古代都市文明では、土地の測量、税の計算、周期的な農耕のための暦を作る天文学に、「計算術」としての数学が利用された。　そして官僚・書記のための学校（バビロニアでは「粘土版の家」）が組織され、問題のための問題集（エジプトでは、アーメス・パピルス、インドでは「シェルバ・スートラ」、中国では「九章算術」などが作成された。　共通しているのは、色々な図形の作図や面積・体積の公式、一次・２次・連立方程式の解法などである。　実は、こういう計算数学も、生活に必要な部分は古代ギリシアでも利用されていた。　また「原論」における高度な平面幾何学（ゲオメリア）の研究も、その起源をたどればエジプトの縄張り師の図形的知識であり、ギリシア科学（数学・天文学）の多くは、それ以前のエジプトやバビロニアなどのオリエント科学（操作的技術）の知識をルーツにしている事が多い。

しかし「正多面体は５つしか存在しない」などの、高度な立体幾何学（ステレオメトリア）の証明は、バビロニア数学などの「計算術」からは生まれないものであり、確かに論証を軸とするギリシア数学の一つの重要な成果と言える。　「論証数学」としてのギリシア数学の誕生の理由として、(A) では、ポリスにおける**「弁論によって他人を説得する行為」**を挙げているが、この理由はギリシア数学に限ったことではなく、論証を軸とするギリシア科学（哲学・自然学・天文学）全体に言えることである。　つまり、ギリシア科学は、それまでのオリエント世界で王や神官が独占した、自然・宇宙の神話的説明から脱却し、**「弁論によるロゴス」**（ロゴスは言葉・論理・割合などを意味する）による説明として、アルケー（原理）から確実な知識を論証する“学問”（後にアリストテレスは、理論学として定式化し、形而上学、自然学、数学的諸学科に分類した）を誕生させた、と言えよう。　ただし「原論」に象徴されるように、ギリシア数学の対象は主に図形的な存在（眼に見える形象）であり、バビロニア数学の様な数値計算を目標とする方程式は対象ではなかった。　「原論」の「単位（１に相当）から成る多である」という“数”の定義も、数を線分で表す表記も、数を計算の対象ではなく、幾何学的な比例を視覚化する存在（眼に見える形象）として、解釈した方が自然であると思う。

このようにはっきりとバビロニア数学（計算数学）とギリシア数学（論証数学）は、特徴も対象も異なっており、ギリシア数学（論証数学）が新しいパラダイム（規範）を誕生させたとしても、バビロニア数学（計算数学）の価値は、全く低下したとは言えな

128

いのである。　歴史的にはバビロニア数学は、ヘレニズム文化の中に吸収され、ギリシア天文学（ギリシアには観測天文学の伝統はなかったので、観測天文学の部分はバビロニア天文学・占星術に由来する）の数値計算に利用されたり、後代ではディオファントスの「算術」（方程式論）として“復活”した、とも考える事ができるのである。

（結語）　確かに「論証数学」としてのギリシア数学の誕生は、現代の数学につながる新しいパラダイム（規範）の成立であり、クーンの言う意味の「通常科学」として、ヘレニズム文化圏でも研究が進んだ。(アルキメデスやアポロニウスなど)　しかし、バビロニア数学の様な「計算数学」が否定されたわけではなく、オリエント文化圏でもその伝統が残り、インドでは古代から中世にかけて、精緻な方程式や数列の計算法が研究され、０を含む１０進法計算など、「計算数学」が発展するのである。　そして、この０を含む１０進法の計算術と数列・方程式論が、アラビア語科学圏を経て、ヨーロッパに移入される事によって、(A) における第２のパラダイム（P２）が可能になるのである。

従って、ギリシア数学（論証数学）の誕生を、１７世紀科学科学革命の様なパラダイムの“変換”としての“科学革命”と、同じ意味に理解する事は難しい。

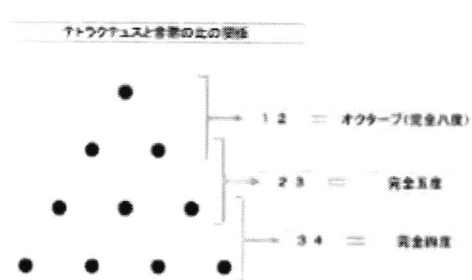
（疑問２）ギリシア数学の特徴は、確かに「証明」の発明なのだが、内容的には「原論」に見られる様に、幾何学的存在を対象とする数と量の区別、数と量に適用される比例論が、他の文化圏の数学にはない決定的な特徴となっている。　この事はもっと強調されても良いのではないか？

（理由）　確かに、「証明」はギリシア数学の特徴として、それまでのオリエント数学にはないものであるが、**「アルケー（原理）からの論証」**という学問形式は、アリストテレスの学問分類にある様に、幾何学・数論のみならず自然学や数学的諸学科全体にも適用されており（その学問構造を論じたのが、アリストテレスの「分析論・後書」である）、ギリシアの学問の中で、数学のみの特徴というわけではない。　また、「証明」の目的は、作図や命題が真理である（反論できない）事を示すためであって、現代から見れば数学の内容を規定するわけではない。　ギリシア数学の内容（対象）については、上で言及した様に、“眼に見える形象”として図形や数（線分）であり、数と量の区別や比例論がギリシア数学の内容における特徴となっている。

（考察）　「数は単位より成る多である」という数の定義は、ギリシア以外の古代のどの文化圏でも見られないギリシア数学独自の概念である。　なぜなら他の古代文化圏では、数学は基本的に「計算術」から出発しており、数値計算上、少数や分数が利用されているからである。　その事は、問題集としてのアーメス・パピルス、バビロニア数学の粘土版、中国の「九章算術」などが、示している。

このギリシア独特の数の定義の背景には、アリストテレスが**「万物のアルケーは数である」**という教義で表現した、ピュタゴラス学派（くわしくは数や図形を研究したマテーマティコイと呼ばれる人々）以来のマテーマタの探究がある。

伝承では、ピュタゴラス派は、右のテトラテュクス（４元三角数）を、ピュタゴラス音階の、1:2 , 2:3 , 3:4 という比例関係を、調和を生み出す根源(ハルモニア)を象徴しているとして、神聖視していた。　この様に数の研究は、初めから“比例論”と関係をもっているのである。



109

また比例関係の発見は、有名なミレトス学派の祖と言われるタレースによる、エジプトのピラミッドの高さの測定の伝承にも表れているが、同じミレトス学派のアナクシマンドロスの宇宙構造論にも比例関係が利用されている。(右図)

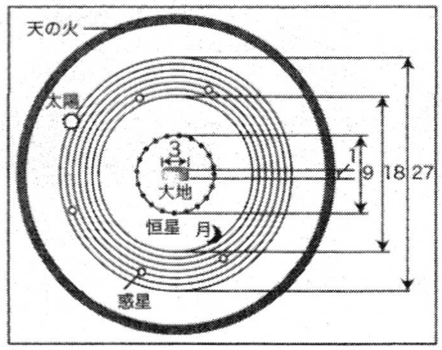
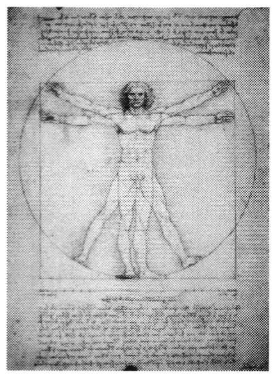


図 1-14: アナクシマンドロスの宇宙モデル
我々が住む世界(大地)は円盤状をなし、宇宙の中心に不動の存在として君臨した。そのまわりをすべての天体が同心円状に取り巻いていた。また、大地を基準に、各天体までの距離は「3」ないし「9」の倍数で示された。

注１０)「それでも地球は回っている(近代以前の天文学史)」
青木満、ベレ出版、２００９，より引用

ピュタゴラス音階の様に“数による比例関係”が宇宙の本質(秩序)を映し出す、という真理観は、プラトンやアリストテレスも言及している。　宇宙(コスモス)の創生神話を語る、プラトンの「ティマイオス」では、宇宙を構成する火・水・土・空気の４大元素について、「火：空気＝空気：水＝水：土」という比例関係が語られ、またアリストテレスでは、「ニコマコス倫理学」において人間の能力に比例した配分的正義が論じられている。　人間の能力の比Ａ：Ｂと配分されるべきものの比ａ:ｂ が比例する、Ａ：Ｂ＝ａ:ｂということである。　この**「比例関係が宇宙の真理を反映する」**という思想は、歴史的伝統として後世まで長く影響力をもっていた。

また、ギリシア美術における理想的な人体比例の概念は、ウィトルーウィウス「建築十書」で、シュムメトリア(部分と全体の数による調和的な比例関係)と呼ばれているが、１５世紀のイタリア・ルネサンスでアルベルティが復活させ(レオナルド・ダ・ヴィンチが、ウィトルーウィウスの記述に従って人体比例を素描した、右図)、ルネサンス美学の一つの重要な理念となり、デューラー晩年の「人体比例論」まで、その研究は続くのである。注１１)



注１１) アリストテレスは、「形而上学」において、美の３要素として、被限定性(有限性)、秩序、均整(シュムメトリア)を挙げている。
アルブレヒト・デューラーは、様々な人体の比例関係を直接測定する事によって、最終的に美を作り出す比例は唯一ではない、と結論している。
「人体比例均衡論四書」注解、アルブレヒト・デューラー、下村耕史(訳)
中央公論美術出版、１９９５
「１６世紀文化革命１・２」山本義隆、みすず書房、２００７

そもそも、比と比例関係という概念そのものも、他の古代文化圏の数学には見られないものである。(「九章算術」には有理数の約分の概念はあるが、それは比例とは関係ない、現在では一般的になった比を分数で表す表記は、後世の発明である)　しかし、比と比例の図形への適用において、「通約不可能性」が発見され、数の比で表されない対象として無理量が考察され、数の比例論(数論)に適合する形で、量の比例論が整備されてゆくのである。

(結語)　プラトンのアカデメイアでは、すでに形而上学的伝統から独立して、幾何学や数論が研究されていたが、プラトンの対話篇「ポリテイア(国家)」における言明(単位は分割できない)などを見ると、やはりギリシア的な数の概念の起源としては、ピュタゴラス派やエレア派などの“存在”の探究(ギリシア哲学)の歴史を無視する事は出来ない。
また比は「原論」で、「同種の２つ量の大きさの何らかの関係」と定義されている様に、それは加減乗除という計算の対象ではない。　従って、数と量の比例論は、明確に他の

180

古代文明における「計算術」と、決定的に異なる特徴を持っていると言える。

（疑問３）（A）では、（P２）「計算が証明になった」が第２のパラダイム変換として挙げられているが、それはインド・アラビア由来の方程式論の成果の影響であり、インドにおける０を含む１０進法計算と方程式論の成立を、計算数学の新たなパラダイムの成立として、もっと重視しても良いのではないか？

（理由）（疑問１）で述べた様に、ギリシア数学が発明した「論証数学」によって、古代バビロニアなどの「計算数学」が否定されたわけではなく、方程論や数列の研究はオリエント文化とも交渉のあったインドや、中国においても独自に発展していった。　上の（P２）は、ギリシア数学の対象が（加減乗除の対象ではない）図形や数であった事を前提としているので、１２世紀以降にヨーロッパに移入されたインド・アラビア由来の「計算数学」の影響が、決定的であったと言えよう。

（考察）数学史を大きく、論証数学と計算数学に分けて考えると、確かにギリシア数学は体系的に「論証数学」を成立させたと言えよう。　ただし、アルキメデスは比例論の表現を用いながら、数学史上初めて球の体積・表面積や色々な立体の重心を求めているので、ヘレニズム以降のマテーマタ（ギリシア的数理科学）に、全く「計算数学」の側面がなかったとは言えない。　むしろヘレニズム世界における文化の交流に刺激されて、ギリシア人の学問意欲が多方面（幾何天文学、観測天文学、地理学、静力学、光学、音響学、機械制作など）に向かった、と考える事ができる。　その中で「原論」は、マテーマタ（ギリシア的数理科学）全体に共通の、厳密な“科学用語”の役割を果たした、と言えよう。（その意味で「原論」は、マテーマタ全体のストイケイアであった）注１２）

注１２）「エウクレイデス「原論」は純粋数学か？」三富照久、津田塾大数学史シンポジウム、２０１３

特に、取り尽くし法の背後にあるアルキメデスの極限論法は、タルターリアやガリレオやケプラーらによる、１６世以降のアルキメデスの復活・研究によって、微分積分学の成立の契機となっているが、「原論」の数と量の比例論では、連続な数としての実数概念は成立しないので、極限を数値で計算する無限小概解析の成立には、０を含む１０進法による数の計算法、特にどんな数でも有理数や少数で近似できる、という素朴実数論の成立（ステヴィン「十分の一法」やデカルト「幾何学」による）が必要であった。
実数概念を軸に簡単に図式化すると、以下の様になる。

ギリシア数学	＋	インド・アラビア数学	⇒	素朴実数概念	⇒	座標幾何学・微分積分学
（数と量の比例論）		（１０進法の代数学）		（無限少数）		（関数概念）

古代から中世のインド数学（代数学）や中国数学は、ともに１０進法の数の計算を基礎としており、どんな数も有理数で近似できる（だろう）という素朴実数論的な立場に立っていた。（ただし無理数と有理数の区分いう概念はないので、厳密な意味での実数論とは言えない、あくまで数（有理数）が連続的につながっている、という感覚）
　劉徽「九章算術注解」では、正しい円の面積公式の証明として、アルキメデスと同様に内接正ｎ角形の極限を考えているが、極限概念そのものにはギリシア哲学の様な厳密な考察が加えられていない。　ｎ→∞の時、円と内接正ｎ角形の大きさの差が、「限りなく０に近づく」ので、直感的に極限は円と一致すると認めましょう、という事である。この認識の背後には、どんな数も有理数で近似できるという精神が表れている。

注１３）「エウクレイデス「原論」と劉徽「九章算術注解」の比較数学史～比較文化の立場から～」三富照久　津田塾大数学史シンポジウム、２０１４

181

(インド数学や中国数学においても、体系的な証明ではないが、劉徽のように証明に相当する根拠によって命題を説明したり、先人の公式を批判したりする場合があった)

特にインドは、中世に０を含む演算規則が導入された事によって、代数学が大いに発達した。　その成果がアラビア語科学圏に移入され、さらにフィボナッチ（ピサのレオナルド）により西欧世界に移入され、筆算計算法として徐々に流布した事は、数学史における周知の事実である。

＜バースカラ２世の「ビージャガニタ」(代数学)　１２世紀＞

表 7.11. バースカラが規則を与える二次以上の多色方程式のタイプ
(原書に述べられる順序. BG=『ビージャガニタ』)

1)	$ax^2+bx+c=u^2$	(BG151)
2)	$ax^4+bx^2=u^2$	(BG154)
3)	$ax^6+bx^4=u^2$	(BG154)
4)	$ax^2+bx+c=a'y^2+b'y+c'$	(BG157)
5)	$ax^2+by^2+c=u^2$	(BG159)
6)	$a^2x^2+bxy+cy^2=u^2$	(BG162)
7)	$x+y+a=s^2,\ x-y+a=t^2,\ x^2+y^2+b=u^2,\ x^2-y^2+c=v^2$	(BG166)
8)	$ax+b=u^2$	(BG169)
9)	$ax+b=u^3$	(BG169)
10)	$y=(ax^2+c)/b$	(BG174,176,177,178)
11)	$y=(x^3+b)/a$	(BG174)
12)	$axy=bx+cy+d$	(BG185)

右に見る様に、中世インドで活躍したバースカラ２世は、３次・４次・５次の方程式にも個別の解法を与えていた。(色とは未知数に相当する)　不定方程式においても、先人のブラフマグプタ（７世紀、初めて０の演算規則を与えた）の、ペル方程式　$x^2-ny^2=1$ の研究を引き継ぎ、ペル方程式の一般的解法を与えている。(もちろん１７世紀のペルより早いので、ペル方程式という言い方は歴史的に正しくない)

注１４)「インドの数学」林隆夫、中公新書、１９９３
「数学の歴史Ⅱ　中世の数学」伊東俊太郎（編）、共立出版、１９８７、
ファン・デル・ヴェルデンの「代数学の歴史」(原著１９８５）においても、インド代数学の成果は全く触れられていない。　§2で指摘した様に、ディオファントス「算術」は、ギリシア語で書かれていたとしても、バビロニア数学由来の方程式論の復活という見方も可能である。

(A) では、(P２) の時期として１６世紀から１７世紀を設定しているが、インド由来の方程式の解法にギリシア的な幾何学の証明法を適用しよう、と最初に考えたのはヘレニズム科学を引き継いだアラビア語科学圏であった。注１５)

注１５)「近代科学の源流」伊東俊太郎、中公文庫、
すでにエウクレイデスやアルキメデスの数学書は、アラビア語に翻訳されて研究されていたので、「証明」という概念をインド由来の方程式論に適用しようと考えたのは、自然な発想であった。(「原論」にも平方数や立方数があったが、それは面積や体積の大きさに対応するものであった)　タルターリアやカルダーノが、３方程式の解法の「証明」として立体図形を考えたのは、上のアラビア語科学圏の発想と同じ思考法であったと言える。　そしてデカルト「幾何学」により、幾何学が（素朴実数論に基づいた）代数学に還元される事により、「計算が証明になる」(P２) のである。

(結語)　デカルトは「幾何学」において、ギリシア数学以来の次元の相当性（２乗は面積、３乗は体積に相当する）を否定し、２乗、３乗、・・、無理数などがすべて線分の長さ（実数）に対応する事を示して、代数学を幾何学から解放した。　またステヴィンも「十分の一法」で、ギリシア数学の数の概念を否定し、無理数を含むすべての数が（無限）少数で近似できる事を主張して、素朴実数論の成立に貢献した。　従って、「原論」の数と量の分離は、ここでようやく実数に一元化されるのだが、「原論」における有理量と無理量の区別があった事により、有理数と無理数を厳密に区別する実数論が、初めて西欧に成立したとも言える。　そして、デカルトやステヴィンの代数学や実数論は、インド・アラビア由来の未知数を含む代数学や０を含む１０進法の計算法を前提とするのであるから、やはりインド・アラビアの代数学は、新しいパラダイム（規範）を提供したと見なすべ

182

きであろう。

パラダイムという概念は、科学史における“革命”を、通常科学の規範としてのパラダイムの“変換”と見ることによって、素人でもわかりやすい明確な構造論を提供している。　しかし通常科学という全体集合をどの様に設定するか、によって何がパラダイムであるか、は微妙に変わってくる。　例えば、コペルニクスの太陽中心説は、アリストテレス以来の地球中心説を否定しているが、「惑星の軌道は円である」（この背景には、円が最も完全であるという、アリストテレス以来の形而上学的な美意識がある）という信念（パラダイム）は、コペルニクスも保持しており、それはガリレオまで続くのである。（コペルニクスとプトレマイオスの天文学が、数学的には同値である事はステヴィンも指摘している）　また科学史では、実験や観測によって、自然現象としての地球中心説は明確に否定されるが、数学史においては実験で検証できる自然法則に相当するものがないので、明確な計算ミスや証明のミス以外に否定される事はない。　例えば、ギリシア数学によってバビロニア数学が否定される事はないし、現在使用されていないとしても、和算の内容が否定されるわけではない。（もちろん現代数学の記号によって、翻訳した方がわかりやすいが）　ただ１９世紀以降の西洋数学は、現代の科学技術の根幹を成しているので、一応数学史の到達点と見なされるわけである。　(A) でも、**「たまたま近世西欧の数学が現代世界の数学に発展したために、「証明つきの数学」が現代の我々にとってスタンダードなものになったわけです。」**と述べられている通りである。

さて、(A) のパラダイム説に対しては（疑問１）～（疑問３）を提出する事ができるが、それでも (A) のパラダイム説が基本的に間違っているとは言えない。　数学史は、自然法則の理解が対象ではないので、基本的にパラダイムは新しい規範を提供するが、それにより古い数学が否定されるとは限らないのであって、(A) のパラダイム説も古い数学の否定を積極的に述べているわけでなないからである。　バビロニア数学はギリシア数学によって否定された、というよりバビロニアという国が滅亡しヘレニズム世界が成立した事によって、クーンの言う科学者集団（官僚・書記）が解体し、バビロニア数学の伝統はヘレニズム文化の根底に残存しつつ吸収された、という見方ができるのである。（「ヤヴァナ・ジャータカ」の様に、バビロニア天文学・占星術はギリシア天文学に吸収されつつ、ヘレニズム文化を通じてインドに移入されて、インド天文学の形成に寄与した、という面もある）

パラダイムは大雑把な見取り図の様なものであり、細かい部分では常に議論（補足）が可能なのである。　ただ、古代中国の「易経」が、ライプニッツに２進法のアイデアを与えた様に、「論証数学」に対して、「計算数学」も過去から現在まで、数学史に大きな役割を与えてきた事は事実であるので、「計算数学」の歴史ももう少し連続的に理解されても良いのではないかと思う。（現在はコンピューターや AI の時代であるが、それはチューリングやノイマンによって開拓されてきたのであって、まさに計算数学の一つの到達点である、とも言える）

最後に、(A) では**「数学の歴史は解法（技法）の歴史である」**という主張について、エウクレイデスの正５角形の作図とガウスによる正１７角形の作図を比較する事によって検討している。
現代の数学者であれば、ガウスは結果として正ｎ角形の作図の可能性を大幅に発展させた、と考えるであろうが、(A) ではそれを否定している。　アルキメデスの正７角形の作図は、確かにエウクレイデスの方法の発展であるが、ガウスの方法は１の１７乗根を複素数平面で考察するものであり、エウクレイデスの意味での正ｎ角形の作図の発展と見なすことは出来ない、と言う。　それはエウクレイデスとガウスでは、**「理論的前提（パラダイム）」**が異なるので、**「全く異質のパラダイムに属する数学を、連続するものであるかの様に語る事は許されません」**と主張している。　つまり数学の本質はそこで用いられる技法にあり、その結果にあるのではない、という意味で、数学は技法の歴史であると述べられている。　数学史に対する味わい深い言葉である。

189