Saccheri, "Euclides Vindicastus"紹介

2017年10月14日

足立恒雄

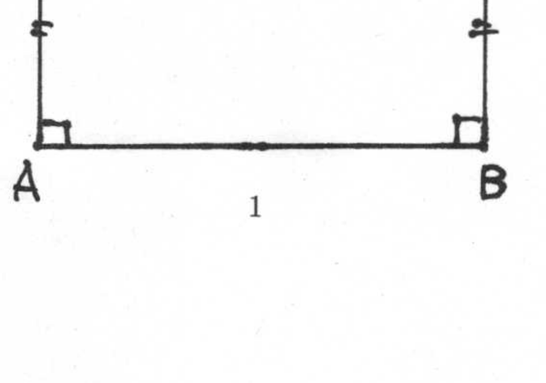
半円から直角を有さないような三角形を作り得るか.
　—ダンテ《神曲》天国篇，第13歌

始めに　古代の幾何においては解析的連続性（これをDと名付ける）は使われなかったが，近世ではDが使われるようになる．その使用は解析幾何を用いて微積分が展開されていることからもわかるように公然としたものになっている．等しくユークリッド幾何と呼ばれていても，この点では大きな違いがあると言えよう．

エウクレイデス『原論』は連続性については円と直線，あるいは円と円の交点の存在しか認めない「初等ユークリッド幾何」であり，ボーヤイやロバチェフスキの双曲幾何はDを使う幾何（2階双曲幾何）である(こうした幾何の違いの考察は筆者の[8]を参考にしていただきたい).

以下では，ユークリッド幾何から平行線公準を取り去った，いわゆる絶対幾何におけるサッケーリの考察を紹介する．サッケーリは必要に応じて連続性Dを使っている．命題の右肩にDと記したものは証明にDが使用されていることを示し，AMを付した命題はアルキメデスの原理が使用されていることを示す.

定義（サッケーリ四辺形）　四辺形$ABCD$において$AC = BD$, $\angle A = \angle B = \angle R$が成り立つとき四辺形$ABCD$をサッケーリ四辺形と名付ける.

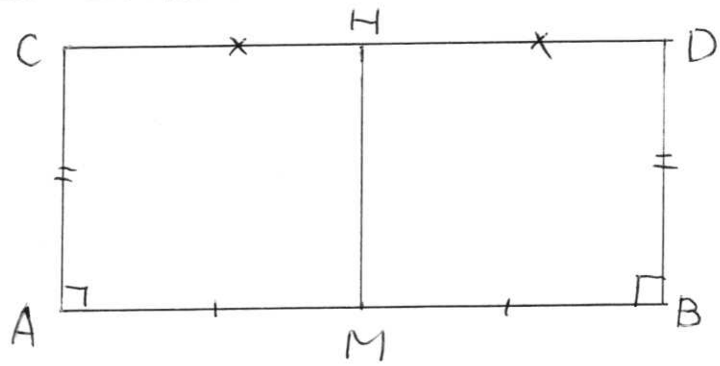


60

1　命題 I から命題 XVI まで

命題 I　サッケーリ四辺形 $ABCD$ において $\angle C = \angle D$ が成り立つ．

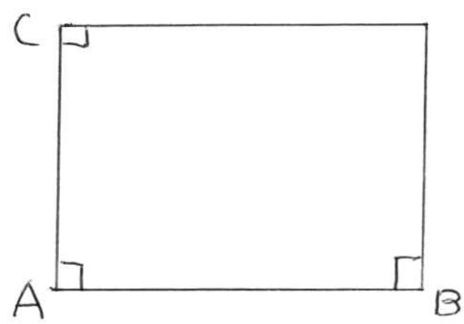
命題 II　サッケーリ四辺形 $ABCD$ において，AB の中点を M，CD の中点を H とするとき，$\angle M = \angle H = \angle R$ が成り立つ．



命題 III　サッケーリ四辺形 $ABCD$ において，

$$\angle C \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} \angle R \Longrightarrow AB \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} CD$$

系　ランベルト四辺形（三つの内角が直角であるような四辺形）において，残りの角が鈍角（鋭角）であれば，それを挟む辺はその対辺より短い（長い）．



命題 IV　サッケーリ四辺形 $ABCD$ において，

$$AB \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} CD \Longrightarrow \angle C \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} \angle R$$

61

定義　サッケーリ四辺形において，

$\angle C = \angle R$ となる場合を直角仮定と呼ぶ．

$\angle C > \angle R$ となる場合を鈍角仮定と呼ぶ．

$\angle C < \angle R$ となる場合を鋭角仮定と呼ぶ．

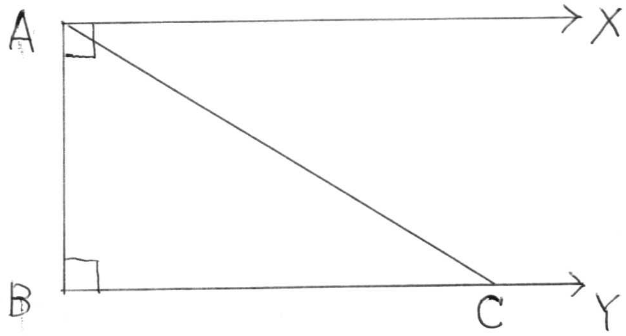
命題 V^{AM}　直角仮定が一つの四辺形で成り立てば，すべての四辺形に対して成り立つ．

命題 VI^{D}　鈍角仮定が一つの四辺形で成り立てば，すべての四辺形に対して成り立つ．

命題 VII　鋭角仮定が一つの四辺形で成り立てば，すべての四辺形に対して成り立つ．

命題 VIII　AB に垂直な半直線 $\overrightarrow{AX}$ と $\overrightarrow{BY}$ を立てる（こうした設定では，今後いつも X, Y は AB に関して同じ側にあるものとする）．$\overrightarrow{BY}$ 上の点 C を取ると，

$$\angle XAC \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ > \end{array} \right\} \angle ACB \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{直角仮定} \\ \text{鈍角仮定} \\ \text{鋭角仮定} \end{array} \right\}$$



命題 IX　直角三角形において，残りの二つの角の和 S に対しては

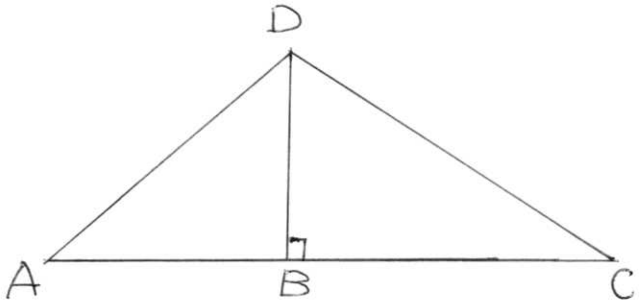
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{直角仮定} \\ \text{鈍角仮定} \\ \text{鋭角仮定} \end{array} \right\} \text{が成り立つ} \implies S \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} \angle R$$

注　一般の三角形に対しても命題 V,VI,VII に対応する定理が成り立つことは明らかである．以前はこれらをルジャンドルの定理と呼んできたが，サッケーリの定理，あるいはせめてサッケーリ=ルジャンドルの定理と呼ぶのが適切であろう．

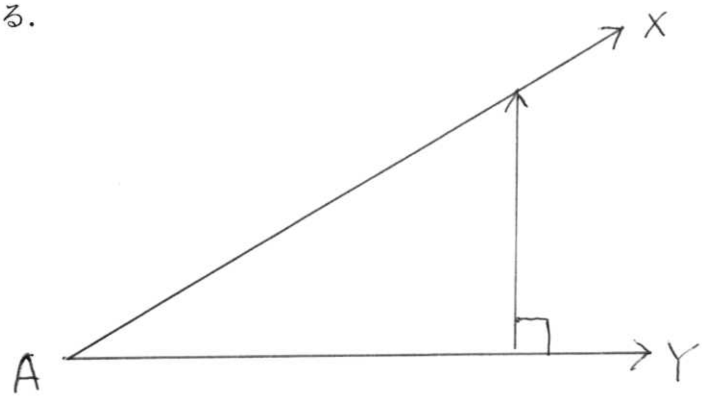
62

命題 X　図において $DB \perp AC$ とする．このとき

$$DC > DA \iff BC > BA$$

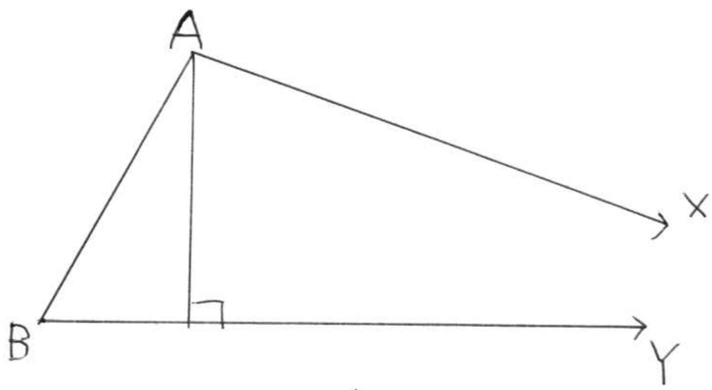


命題 XI^{AM}　$\angle XAY$ が鋭角であるとき，$\overrightarrow{AY}$ 上の点で立てた垂線は，直角仮定の下では，$\overrightarrow{AX}$ と交わる．



命題 XII^{AM}　$\angle XAY$ が鋭角であるとき，$\overrightarrow{AY}$ 上の点で立てた垂線は，鈍角仮定の下では，$\overrightarrow{AX}$ と交わる．

命題 XIII　直角仮定，あるいは鈍角仮定が成り立つならば，ユークリッドの平行線公準が成り立つ．



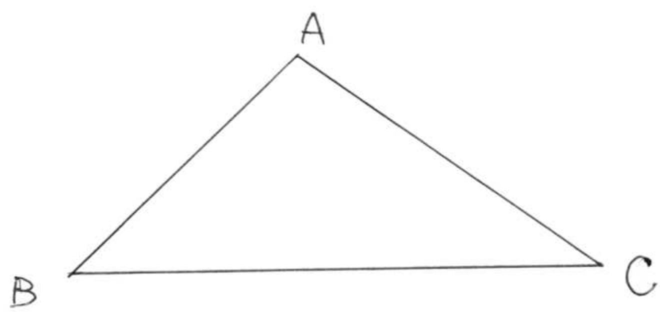
63

命題 XIV　鈍角仮定は矛盾を生じるので偽である.

注　近藤 [6], 第 2 章では, この証明は（アルキメデスの公理の結果としての）直線の無限性を使っているので無効であると強い調子で批判されているが, 時代精神を考慮すると（幾何学で連続性を認めるのを当然視されていたことを考慮すると）的外れの批判であろう.

命題 XV　三角形の内角の和を S で表すと,

$$S\left\{\begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array}\right\} 2\angle R \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{直角仮定} \\ \text{鈍角仮定} \\ \text{鋭角仮定} \end{array}\right\} \text{が成り立つ}$$

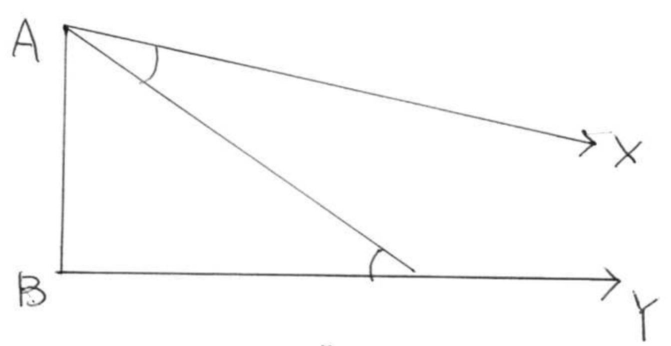


注　以前は, これらをルジャンドルの定理と呼んできたが, サッケーリの定理, あるいはせめてサッケーリ=ルジャンドルの定理と呼ぶのが適切であろう.

命題 XVI　四辺形において, 内角の和が $4\angle R$ に等しいかどうかについて命題 XV と同様の命題が成り立つ.

2　命題 XVII から命題 XXXIII まで

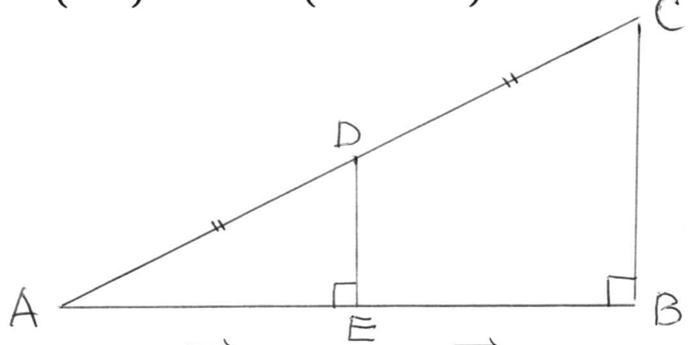
命題 XVII　鋭角仮定の下では, 図形 $XABY$ において $\overrightarrow{AX}$ と $\overrightarrow{BY}$ とが交わらないことがある.



命題 XVIII　三角形 ABC が AC を直径とする半円に内接しているとする．角 B が直角（あるいは鈍角，鋭角）に従って，直角仮定（あるいは鈍角仮定，鋭角仮定）が成り立つ．

命題 XIX　$\angle B = \angle R$ なる三角形 ABC において D を AC の中点とする．D から AB に垂線を下して，足を E とする．

$$EB \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} AE \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{直角仮定} \\ \text{鈍角仮定} \\ \text{鋭角仮定} \end{array} \right\} \text{が成り立つ}$$



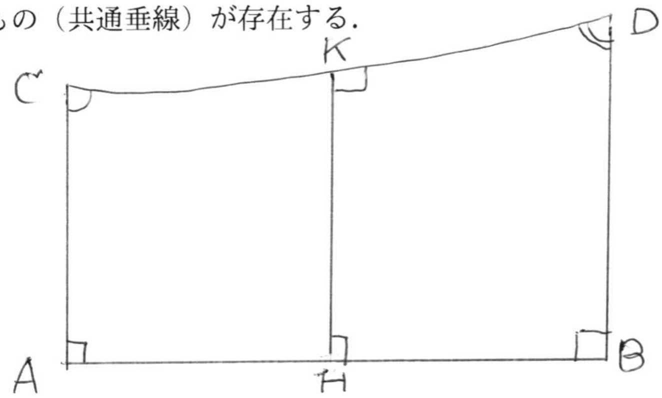
命題 XX　$\angle XAY$ を考える．$\overrightarrow{AX}$ 上の点 M から $\overrightarrow{AY}$ に垂線を下して足を N とする．また AM の中点 B から $\overrightarrow{AY}$ に垂線を下して足を C とする．鋭角仮定の下では，$2BC \leq MN$ が成り立つ．

命題 XXI^{AM}　前命題において，鋭角仮定，直角仮定の下で，$\overrightarrow{AX}$ と $\overrightarrow{AY}$ の間は限りなく広がっていく．すなわち，$\overrightarrow{AX}$ 上の点 M から $\overrightarrow{AY}$ に下した垂線 MN の長さが，与えられた長さより大きくなるように M を選ぶことができる．

65

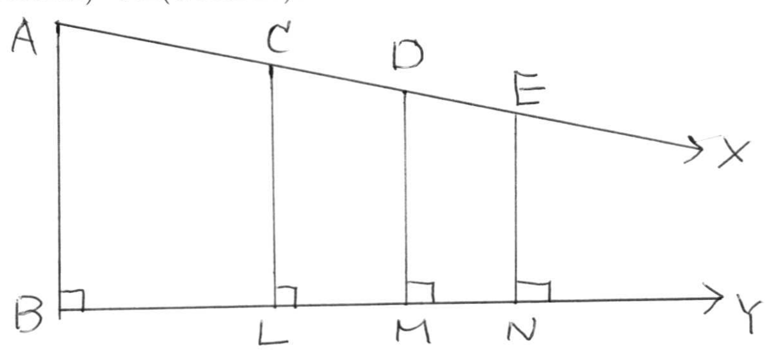
注　この命題は近年，アリストテレスの公理 AT という名前で呼ばれている．絶対幾何において $AM \Rightarrow AT$ が命題 XXI の主張であるが，逆は証明できないので，AT は AM より弱い主張である．

命題 XXII^{D}　四辺形 $ABCD$ において $\angle A = \angle B = \angle R$ であり，$\angle C$ と $\angle D$ は鋭角であるとする．このとき A と B の間の点 H と C と D の間の点 K で，HK が AB にも CD にも直交するもの（共通垂線）が存在する．



命題 XXIII　交わらない 2 直線は共通垂線を持つか，次第に近付くかのいずれかである．

命題 XXIV　鋭角仮定が成り立っているとする．図形 $XABY$ において，B, C, D をこの順序で並んだ $\overrightarrow{AX}$ 上の点とする．B, C, D から $\overrightarrow{BY}$ に下した垂線の足を L, M, N とする．このとき $\Sigma(BLCM) < \Sigma(CMDN)$．

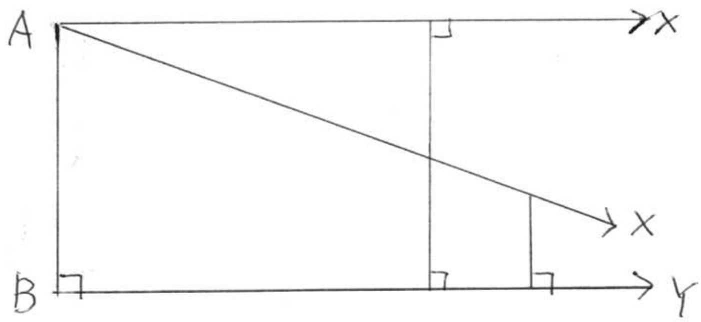


系　図形 $XABY$ において，$\overrightarrow{AX}$ が $\overrightarrow{BY}$ と共通垂線を持たないならば，$\overrightarrow{BY}$ 上の任意の点で立てた垂線は $\overrightarrow{AX}$ と交わる．

命題 XXV^{AM}　鋭角仮定が成り立つならば，図形 $XABY$ において $\overrightarrow{AX}$ と $\overrightarrow{BY}$ は共

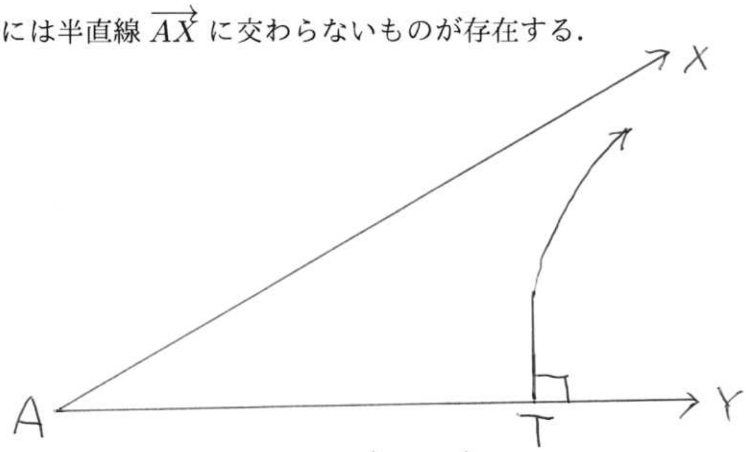
66

通の垂線を持つか，あるいは漸近する（すなわち，$\overrightarrow{AX}$ 上の点から $\overrightarrow{BY}$ に下した垂線の長さは限りなく小さくなる）．



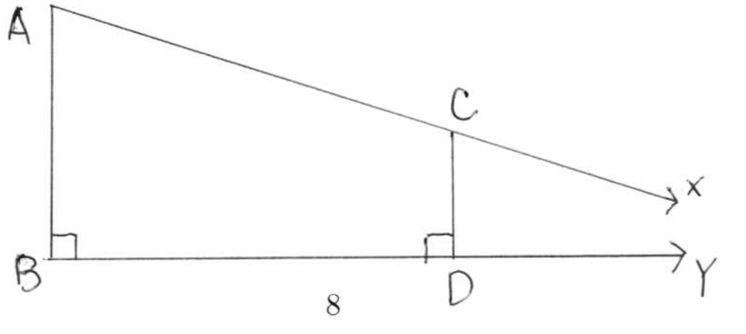
命題 XXVI　前命題で，$\overrightarrow{AX}$ と $\overrightarrow{BY}$ が漸近するならば，AB 上の点 T で立てた垂線は必ず $\overrightarrow{AX}$ に交わる．

命題 XXVII^{AM}　鋭角仮定が成り立つとする．$\angle XAY$ において半直線 $\overrightarrow{AY}$ 上の点 T で立てた垂線の中には半直線 $\overrightarrow{AX}$ に交わらないものが存在する．



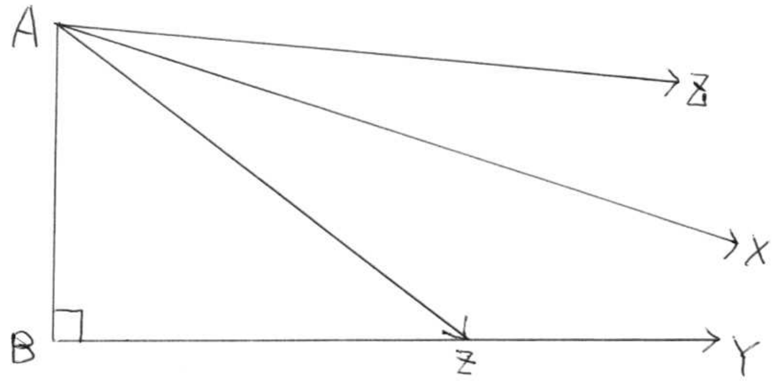
命題 XXVIII　図形 $XABY$ において，$\overrightarrow{AX}$ と $\overrightarrow{BY}$ が漸近するとき，次が成り立つ：

1. $\overrightarrow{AX}$ 上に任意に C を取り，$\overrightarrow{BY}$ に垂線を下して，その足を D とすると，$\angle ACD$ は鈍角である．
2. A から C が離れるにつれて CD は単調にいくらでも小さくなる．
3. A から C が離れるにつれて $\angle ACD$ は単調に減少して限りなく直角に近づく．



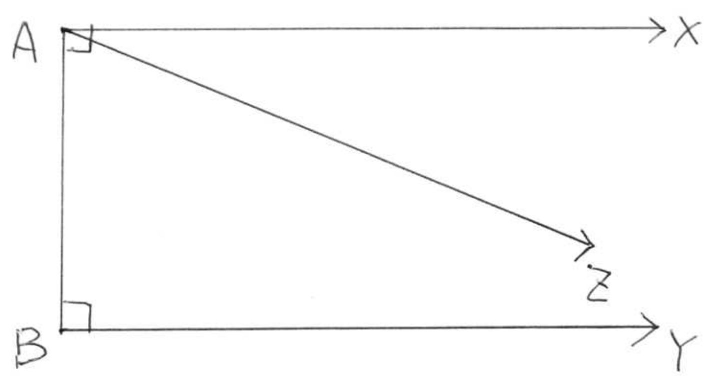
命題 XXIX　前命題において，

1. $\angle BAX$ 内に引いた半直線 $\overrightarrow{AZ}$ はすべて $\overrightarrow{BY}$ に交わる．
2. $\angle BAZ$ を $\angle BAX$ より大きい鋭角とすると，$\overrightarrow{AZ}$ は $\overrightarrow{BY}$ と交わらない．



命題 XXX　図形 $XABY$ において，さらに $\angle XAB = \angle R$ であるとする．鋭角仮定の下に次が成り立つ：

1. $\overrightarrow{AX}$ は $\overrightarrow{BY}$ と共通の垂線を持つ半直線 $\overrightarrow{AZ}$ の極限である．
2. $\overrightarrow{AZ}$ が $\overrightarrow{BY}$ と共通垂線を持つとき，その鋭角に最小値はない．



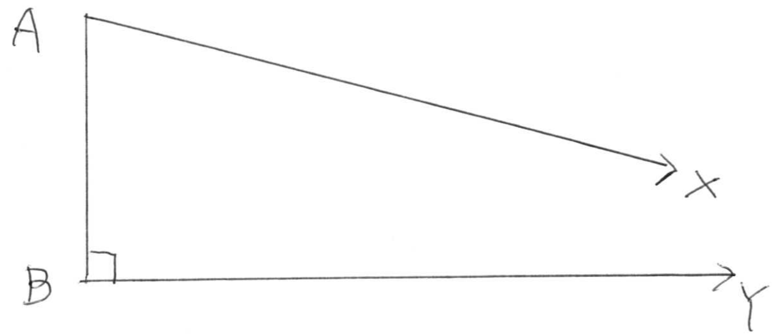
命題 XXXI　先述の共通垂線の長さには最小値は存在しない．

命題 XXXII　鋭角仮定の下で，次のような性質を持つ一定の図形 $XABY$ が存在する：

1. $\overrightarrow{AX}$ と $\overrightarrow{BY}$ は漸近する．
2. より小さい鋭角の半直線は $\overrightarrow{BY}$ と交わる．

68

3. より大きい鋭角の半直線は BY と共通垂線を有する．



命題 XXXIII　鋭角仮定は絶対的に偽である．なぜならそれは直線の本性に反するからである．

Hypothesis anguli acuti est absolute falsa; quia repugnans naturae lineae rectae.

参考文献

[1] Saccheri, *Euclides Vindicatus* (1733 : Halsted による羅英対訳 (1920))

[2] Bonola, R. *Non-Euclidean Geometry* （原著 1912 年：英訳の Dover 版 (1955)）

[3] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie* (1899) :『幾何学の基礎』(共立出版：第 VII 版 (1930) の翻訳)

[4] A. Tarski, et al., *Metamathematische Methoden in der Geometrie* (1983), Springer

[5] Hartshorne, R., *Geometry* : *Euclid and Beyond* (2000)：邦訳『幾何学』I，II

[6] 近藤洋逸『新幾何学思想史』

[7] 寺阪英孝『幾何学 I』共立出版

[8] 足立恒雄『よみがえる非ユークリッド幾何』（『数学セミナー』2017 年 4 月号ー 2018 年 3 月号連載）

69