津田塾大学数学史シンポジウム　2015 年 10 月 10 日 (土)

懸垂線が放物線と異なることの証明

ホイヘンスよりメルセンヌへ 1646 年 11 月

埼玉県立坂戸高等学校　田沼晴彦

ガリレオは『新科学対話』(1638) の中で、“懸垂曲線は放物線によく似た形になる” と書いている [1]。しかしその 8 年後の 1646 年 11 月、まだ 17 歳だったクリスティアン・ホイヘンス (1629-1695) は、この 2 つの曲線が異なることの証明をメルセンヌへ書き送っていた [2]。常々この逸話の詳細を知りたいと思っていたが、最近 Bukowski の論文 [5][6] を Web 上で見つけ、その証明の背景をホイヘンスのアーカイブ‘*Oeuvres complètes*’その他の資料から調べることができた。そこからは、17 世紀中頃の力学と幾何学の流れと若いホイヘンスの方法の関わりが明らかになってくる。

1　懸垂線問題の歴史

ホイヘンスが研究に従事した家
ホイヘンス自身のデッサン

ガリレオの主張は、当時の懸垂線の理解を代弁していた。それは、デカルトがベークマンへ「それは円錐曲線となる」と書き、ジラールは、懸垂線と放物線が一致することを証明したと主張していた*1事実からも理解できる。

1646 年ホイヘンスは、懸垂線と放物線が一致しない証明をメルセンヌに書き送ったが、それは 2 年後のメルセンヌの死により広く知られることはなかった。その後、1669 年にはドイツのユンギウスが、また 1673 年にはフランスのパルディエ*2が、それぞれ独立してこの 2 曲線の不一致を主張している。さらに 1690 年この懸垂線は、Acta Eruditorum 誌のヤコブ・ベルヌーイの挑戦問題へとつながっていった*3。

懸垂線は、円錐曲線でも有限次数の曲線でもない力学的 (超越的) 曲線であり、デカルトの代数学の範疇にはない。それゆえその決定には、微積分法を待たねばならなかった。そのような曲線に対し 1646 年という早い段階で、ホイヘンスはその違いを明らかにした。そこからは、力学と幾何学から極限を考察する彼のスタイルの萌芽を見ることができる。

2　ホイヘンスよりメルセンヌへ

ホイヘンスは、家庭教育の後ライデン大学でスホーテンに学び、ステヴィンやデカルトの理解からガリレオとは独立して、落体法則を証明していた*4。そのことを父コンスタンティンは文通相手のメルセンヌに自慢し*5、メルセンヌとホイヘンスの交流は始まった。

若いホイヘンスは、どのようにしてこの懸垂線問題に出会い研究しようとしたのだろうか。Yoder は‘*Unrolling Time*[3]’で、彼がステヴィンの著作のジラールの注釈を読み、実際に懸垂鎖と放物線を比較しその違いに気づくことができたと書いている。

1646 年 10 月 13 日、メルセンヌはホイヘンスに落体法則発見の驚きを伝えその詳細を求めてきた。10 月 28 日の返信の最後で、ホイヘンスは懸垂線の証明をメルセンヌへ切り出している。

---

*1 フランスの数学者 Albert Girard(1595-1632)。ステヴィンの著作の出版し、その注釈で主張していた。

*2 パルディエの方法は、1690 年の懸垂線の決定問題でライプニッツらが利用している。

*3 1691 年 6 月の Acta 誌上に、ライプニッツ、ホイヘンスそしてヨハン・ベルヌーイの 3 つの解答が掲載され、この曲線が満たす微分方程式が導かれその作図方法が示された。双曲余弦関数が導かれたのではない。

*4 ホイヘンスは、まだガリレオの『新科学対話』の出版を知らなかった。

*5 クリスティアンの投射体の議論を読んだメルセンヌは、「ご子息は、新しいアルキメデスになるでしょう」と褒め、父コンスタンティンを喜ばせた。その後コンスタンティンはクリスティアンを「私の小さなアルキメデス」と呼んでいる。

つぎの手紙で、吊るされたロープがつくる曲線が放物線でないことの証明を送ります。大切なのは、重力の下で数学的なロープは別の曲線を作ることです。私は、最近その証明を発見しました。

11 月 16 日、メルセンヌは少し興奮気味に返信している。

神のご加護によるものです。ガリレオの予想と異なるだけでなく、彼を凌ぐ発見です。早くその証明を見たいものです。

その後の手紙で、ホイヘンスはその発見を書き送った。

一昨日ハーグに戻り、あなたからの親切な手紙を受け取りました。あなたの音楽の問題 (弦の張力と音程) については、少し時間をください。今は鎖の問題に集中しましょう。

ホイヘンスの手紙は、すぐに懸垂線の議論となる。彼の手紙の下書き[*6]を読んでみよう。それは最初に力学的な前提から始められている。

1. 自由に曲がるロープは、地球の中心へ向かう重力の影響を受けている。その力は、ロープに平行に働いている。
2. C, D で固定されたロープ $CABD$ の 2 箇所以上の A, B に錘が吊り下げられているとき、その形は 1 つに定まる。
3. ロープ ADF にいくつかの錘が下げられているときの形は、支点を B, E に変えても C, D の位置そしてロープの形も変わらない。
4. ロープ $ABCDE$ の B, C, D に錘が吊るされている。錘 G の代わりに D で支えてもその形は変わらない。そして、点 D から手 P が離れ D の位置を変化させないように、手 Q が端を (適切な位置)E で支えることはできる。

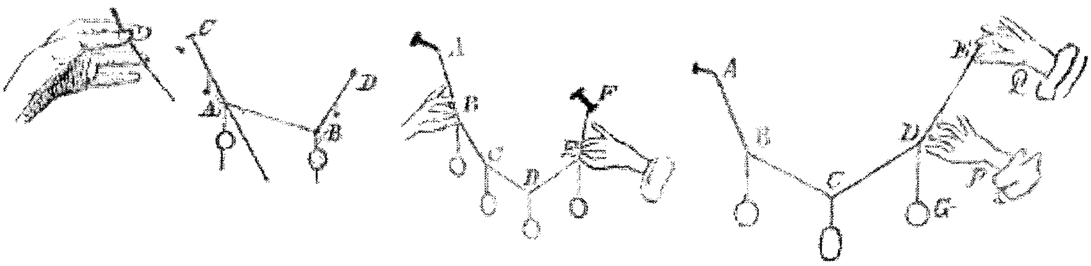

図 1　ホイヘンスの描画

資料とした '*Oeuvres Complètes*[2]' には、4 つの前提に続いて命題 5 から命題 12 が書かれてある。ここでは証明の骨格となる命題 5、命題 6 および命題 8 を中心に読んでいく。ただしそれらの命題は証明なしで記されているため、ここでは簡単な力学証明とアポロニオス幾何学との関係も加えていくことになる。

2.1　重さのない糸に等しい重さのおもりが架かっている

命題 5 においてホイヘンスは (図 2)、等しい重さのおもりをに重さのない糸の支点 A, B, C, D から吊るす。これらの支点の間隔は限定していない。

命題 5

おもり S, R, P, Q が点 A, B, C, D から吊るされているとする。直線 MD と BC の交点を L とするならば、それはおもり P と Q の懸垂直径上にある。また直線 AB と DC の交点を K とするならば、それはおもり R と P の懸垂直径上にある。このように残りおもりについても同様となる。

ここで懸垂直径 '*au diametre pendule des gravitez*' とは、各おもりの支点の中点を通る鉛直線を指している。すなわち各区間の糸の延長、例えば BC と MD は CD 間の中点を通る鉛直線上に交点を持つとホイヘンスは主張して

[*6] アーカイブには、メルセンヌに送られた手紙ではなくその下書きが保存されている。

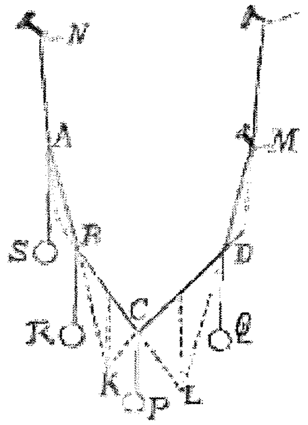

図 2　ホイヘンスの命題 5 の描画

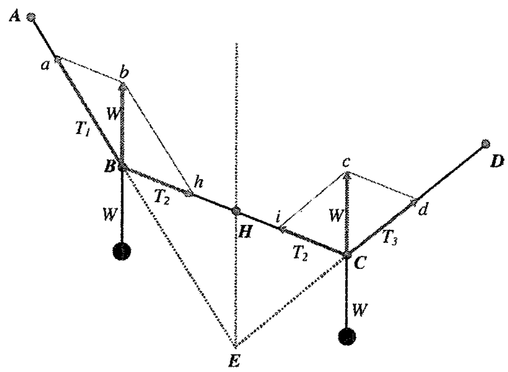

図 3

いる。ただ証明は書かれていない。彼が学んだステヴィンの原理と糸の 2 点の張力の釣り合いから導いたことは想像できる[7]。ここでは、簡単な証明を付しておく。

証明

2 点 B, C に吊るされたおもり W および張力 T_1, T_2, T_3 を図 3 のようにとる。釣り合っているため、それぞれの点 B, C において力の平行四辺形 $\square aBhb$ および $\square iCdc$ が成り立つ。

$$\triangle Bhb \sim \triangle BEH \quad \rightarrow \quad W : T_2 = EH : BH$$

$$\triangle Cci \sim \triangle ECH \quad \rightarrow \quad W : T_2 = EH : CH$$

$$\rightarrow \quad EH : BH = EH : CH \qquad \therefore \ \underline{BH = CH}$$

この命題は、等しいおもりを 任意の間隔 で吊るした議論となっている。この間隔の任意性が、水平方向に一定間隔でおもりを吊るした場合に放物線となると主張する命題 12 に利用されていく。

2.2　等しい長さと重さの棒が連結した鎖

続いてホイヘンスは、糸に吊るされた錘から、等しい長さと重さ の棒が連結した鎖の場合へと議論を進めていく[8]。

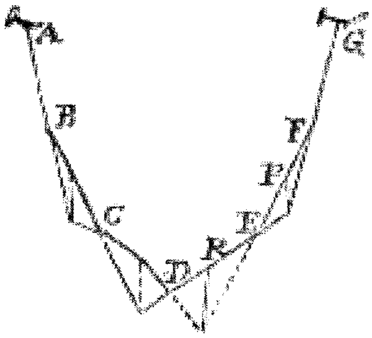

図 4　ホイヘンスのスケッチ（命題 6）

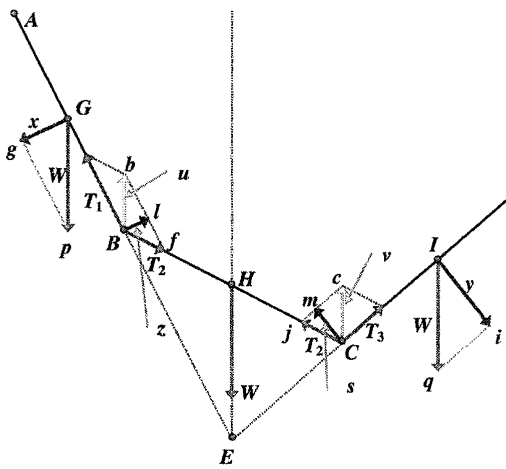

図 5　命題 6 の証明

[7] Bukowski の論文 [6] によれば、'*Les Oeuvres mathématiques de Simon Stevin*'pp.454-455 に同様な議論がある。

[8] ここで彼の下書きは、議論が込み入ってきたためだろうか、フランス語からラテン語に切り替えられている。

命題 6

同様な方法により、(鎖)AB, BC, CD など等しい重さの部分の延長線の交点は、例えば CD と FE の場合、それらの懸垂直径上すなわち DE の中点の鉛直線上で交わる。それゆえ、すべての部分の重さが等しいならば、RE, EP そして PF も等しくなる。

この命題 6 も命題 5 と同様、連続した節点 A, B, C, D において、直線 AB と CD の交点 E が BC の中点を通る鉛直線上にあると主張している。

この証明も、ホイヘンスの下書きでは示されていない。簡単な証明はつぎのようになるだろう (図 5)。

証明

この剛体系はつり合っている。ならば棒 BC に働く力のつり合いより

$$T_1, T_2\text{の上向き合力} + T_2, T_3\text{の上向き合力} = W \quad \to \quad u + v = W$$

棒の長さを $2L$ とすれば、A を中心とするてこの原理より

$$Lx = 2Lz \quad \to \quad x = 2z$$

また $\triangle Ggp \sim \triangle Blb$ より

$$W : x = u : z \quad \to \quad Wz = xu = 2zu \quad \to \quad W = 2u$$

同様に、D を中心とする梃の原理から、$W = 2v$ を得る。よって、

$$u = v$$

となる。また、

$$\triangle Bbf \sim \triangle HBE \quad \to \quad u : T_2 = HE : HB$$
$$\triangle Ccj \sim \triangle HEC \quad \to \quad v : T_2 = HE : HC$$
$$u = v \quad \to \quad \therefore\ HB = HC$$

つぎの命題 7 では、このような等しいおもりや棒からなる形は、前提 4 よりそれが唯一であると主張している。

命題 7

等しい重さのいくつかの錘または棒が、例えば BC, ED の延長した交点がそれらの間の CD の重心となるようにつながれているとする。このとき、それは可能な状態であり、そのように吊るされると主張する。

2.3 等しい長さと重さの棒からなる鎖は放物線とは異なる

ホイヘンスはつぎの命題 8 において、命題 6 の懸垂鎖が放物線と異なることを明らかにする。それは懸垂鎖上の 3 点から決定される放物線上に、つぎの懸垂鎖の接続点がないことを主張し、その根拠を明らかにした。

命題 8

懸垂鎖 $HGABCDK$ は、等しい長さと重さと形を持つ棒から成り立っている。このとき、接続点 G, A, B, C, D, K は同時に同じ放物線上にあることはない、と主張できる。

証明

命題 6 より、このような懸垂鎖において、H を BC の、P を CD のそれぞれの中点とすれば、点 A, B, C で決まる放物線 $RABCF$ 上に点 D その他の鎖の点があることはないと主張できる。なぜなら、ECD を延長し、$FC : CE = AB : BE$ とし AF を結ぶ。ならば BC に平行となり、EL により AF が L で半分に分けられる。ならば、F は A, B, C を通る放物線上にある。なぜなら EL は B の直径となっている。それは D の直径ではない。もしそうであるならば、直線 $ECDF$ は放物線と 3 点で交わることになるだろう。それは矛盾し、D は F と一致しなければならない。しかしそれは CE が BE より大きいため、FC すなわち DC は AB より大きいことになり、不可能である。

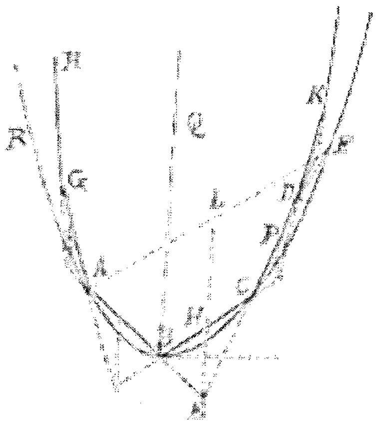

図6　ホイヘンスのスケッチ（命題8）

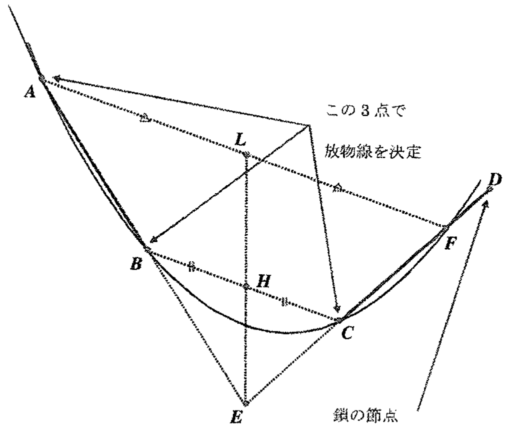

図7　命題8

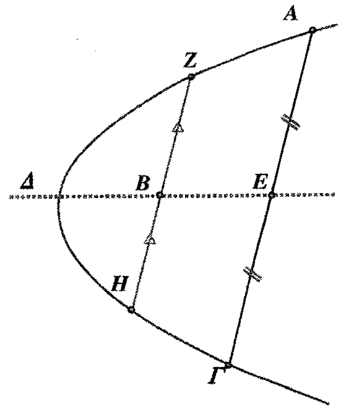

図8　アポロニオス 共役直径

彼の草稿のスケッチは、不鮮明な部分が多い。ここでは図７のように書きかえ、彼の証明を考えていきたい。

この図７においてホイヘンスは、懸垂された等しい重さと長さの棒からなる鎖 A, B, C, D のうち、最初の３つの節点 A, B, C を通る放物線を考える。

命題６より、２直線 AB, CD の交点を E とするならば、鉛直線 HE は線分 BC を２等分している。ここで３点 A, B, C で決定される放物線に対し、直線 CD 上の点 F が、$AB : BE = CF : EC$ を満たしているとする。ならば、$\triangle AEF \sim \triangle BEC \;\rightarrow\; AF // BC$ かつ $BH = HC \;\rightarrow\; AL = LF$ となる。すなわち、アポロニオスの命題より鉛直線 EL が放物線 ABC の共役直径となる。ならば点 F はこの放物線上にある。このようにホイヘンスは主張した。

続いて彼は、直線 EFD 上の 懸垂鎖の節点 D がこの放物線上にある と仮定したときの矛盾を導き、点 D が３点 A, B, C で定まる放物線上にないことを明らかにしていく。すなわち

1) 点 D と点 F が異なる場合

　　$\rightarrow$　直線 EDF が放物線と３点 C, D, F で交わるため、　矛盾

2) 点 D と点 F が一致する場合

　　$\rightarrow$　図７において、明らかに $EC < BE \;\rightarrow\; CF = CD < AB \;\;\therefore AB > CD$ 、しかし棒の長さは等しい $AB = CD$　矛盾

このように、３点 A, B, C で決まる放物線上に、懸垂鎖の節点 D は載らない。よって鎖の接続点が形作る曲線は放物線と異なる。

ホイヘンスは、このように棒状の鎖が放物線を形作らと主張した。彼にとって、有限な範囲での議論こそが重要であり、基本的な静力学と幾何学による背理法でそお証明は組み立てられていた。

彼の手紙の草稿は、さらに続いている。つぎの命題９は、懸垂鎖の形状を記述している。

命題 9

同じ長さと重さの棒が連結した鎖が吊るされ、最初の点 A, B, C で定められる放物線からは、他の点は外れることは明らかである。B と C の外の部分は放物線の下に、内の部分は上に上になる。そのように懸垂鎖は放物線とはならない。

続く命題10では、限りなく小さく多数の棒から懸垂鎖が構成される場合に、連続的な重さのある糸を吊るした場合との違いがなくなり、放物線と異なることを証明したと述べている。

命題 10

しかし、それらが小さな棒状の鎖で作られ、すなわち無限個の小さな鎖が $ABCDEFGHI$ のような吊るされたとき、(中略) 無限個の小さな棒で作られた鎖は糸と大きな違いはないと考えられている。(中略) そのような吊るされた鎖はある曲がり方をしている。それを私は証明した。

ホイヘンスは、直観的予想から有限な棒からなる鎖の極限として、一様な線密度を持つしなやかな糸の懸垂線を考えていた。このように物理的問題を古典的幾何学とその極限として扱う手法は、'*Horologium Oscillatorium*'(1673) に代表される彼の数学言語の萌芽と見ることができる。またその後のホイヘンスによる無限小幾何学の物理問題への応用は、 ニュートンの '*Principia*' へも強い影響を与えていくことになる [14]

2.4 懸垂された糸が放物線となるのは ··· そしてホイヘンスの誤り

このようにして懸垂線と放物線の違いを示したホイヘンスは、つぎにどのような条件のもとで懸垂された糸が放物線となるかについて、命題 11 および命題 12 で論じていく (図 9)。

命題 11

$ABCDEFG$ は、PD を水平に対し垂直な直径とする。HM は頂点 D の接線であり、それらは D から K, L, M と等間隔に分けられている。そして点 B, C, E, F, G から CI, KE, LF, MG の線で結ばれ、等しい錘 H, I, R, K, L, M が吊るされている。ならば錘に引かれている B, C, E, F は放物線上にある。もしこの鎖が A と G で固定され自由に吊り下げられても、点 B, C, D, E, F は前の位置と変化はない。CD と EF を延長した交点 Q、DE と GF の交点を S とすれば、以前に述べたが Q は D と E のそして S は E と F のそれぞれの懸垂直径上にある。命題 7 よりそれらの位置からは動かない。そして放物線であることから、水平線から KE は 1,LF は 4,MG は 9 の長さとなっている。

ただし参考にした Bukowski は命題 11 を

このようにおもりが吊るされた点 A, B, C, D, E, F, G は放物線上にあることは確かだ。このようなおもりの吊るし方は、数値的に放物線となることが知られている。KE が 1、LF が 4、MG が 9 となることであり、よって正しい。

と読んでいるが、原典とは少し異なっている。ホイヘンスの草稿も、なぜ放物線となるかはっきりと書いていない。しかし、つぎの命題 12 において、ホイヘンスは明確に放物線となる証明を明らかにする。

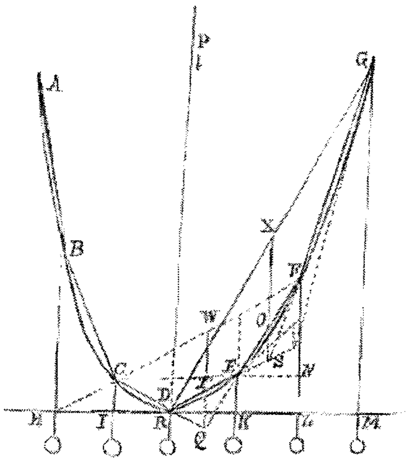

図 9 ホイヘンスのスケッチ (命題 11)

命題 12

$GCFH$ から等しい錘が吊り下げられ、間隔 AB, BC, CD, DE も等しい。ならば点 I, C, F, H は同じ放物線上にあると主張する。なぜなら、それらは吊り下げられ、命題 5 より明らかに、C と F の懸垂直径は GC と HF の延長線は L で交わる。LM は CF の中点 M で、さらに GH を中点 K で切る。それゆえ BR と RE は等しい。$\triangle GLH$ において、GL, LH が $\angle L$ から伸び、同じ比で切られている。それらは平行である。または点 G, C, F, H は、KL を直径とする放物線上にある。例えば、点 I は G, C, F と同じ放物線上にある。それらが同じ放物線上にあることは証明されている。

このように水平方向に等間隔で等しい重さのおもりを吊るした場合、それはつり橋に架けられたケーブルの形に相当し、ホイヘンスはそれが放物線となることを証明している。その論点はつぎのようになる。

糸に等しい錘が吊り下げられている。ならば命題 5 より、

→ GC と FH の交点を通る直径は CF の中点 M を通る。

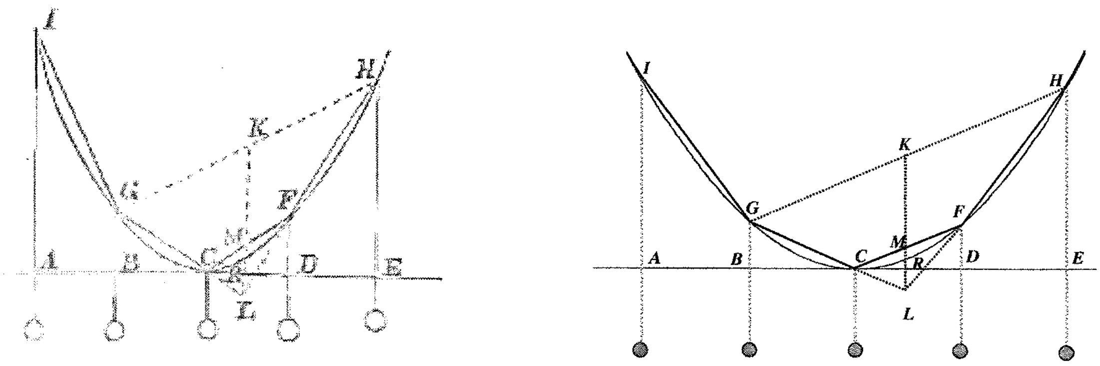

図 10　ホイヘンスのスケッチ（命題 12）

$BC = CD = DE$ より、$RC : CB = RD : DE$

$\rightarrow$ $LC : CG = LF : FH$　よって、3 点 G, C, F により定まる放物線 (LK を共役直径) 上に点 H はある。

さらにホイヘンスは命題 12 の応用として、図 11 のように、形と重さが等しく摩擦のない直方体を糸に載せた場合も放物線となると主張していた。

> それゆえ綱の上に、等しい重さと大きさと形を持つ小さな梁または直方体をのせるならば、それらが綱を押す点 $A, B, C, \ldots$ は同じ放物線上にあるだろう。ならば、帆の風をはらんだ形や水中で引かれる網の形も放物線となるだろう。

しかし、この主張は間違っている。Bukowski[6] によると、22 年後 (1668)、ホイヘンス自身もこの誤りに気づき、“non sequitur neque est verum ”(その議論が続けられないだけでなく間違っていた) と書いていた。

おそらくホイヘンスは、この直方体の重さがすべて等間隔に下向きに働くと考えたに違いない。しかしその力は曲線の法線方向である。Truesdell[7] が指摘しているように、この曲線の形は円となる。

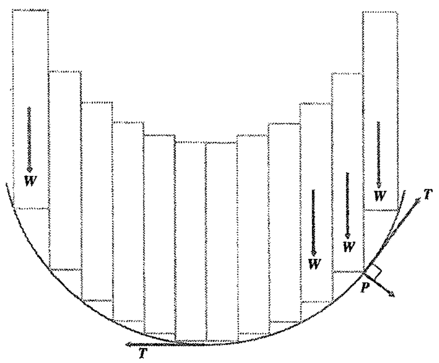

図 11

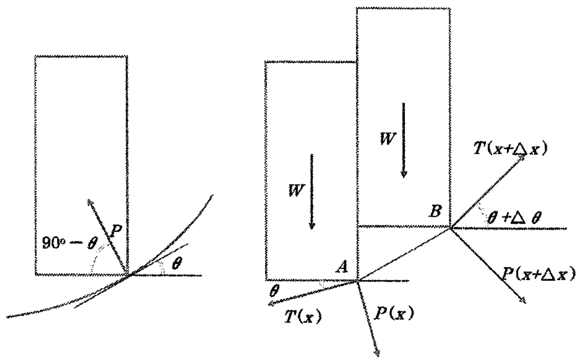

図 12

簡単な微分法を使った導出は、つぎのようになる。

最初に重さ W と法線方向の圧力 P の関係を考えてみよう。図 12 のように、糸の接線の水平方向となす角を θ とするならば、直方体の重さ W と糸の法線方向の力 P の間には、つぎの関係が成り立つ

$$P \sin (90^\circ - \theta) = W \quad \rightarrow \quad P \cos \theta = W \tag{1}$$

ここで、2 点 A, B 間におけるつり合いを考えてみよう。このとき張力 T および糸の法線方向の力 P は、水平方向に一定の間隔で直方体が載せられているため、これらは x の関数となっている。

$$\begin{cases} \text{水平方向のつり合い} & T_x(x + \Delta x) + P(x + \Delta x) \sin (\theta + \Delta\theta) + P(x) \sin \theta = T_x(x) \\ \text{鉛直方向のつり合い} & T_y(x + \Delta x) = P(x + \Delta x) \cos (\theta + \Delta\theta) + P(x) \cos \theta + T_y(x) \end{cases}$$

平均変化率の形に変形し、さらに式 (1) を用いるならば

$$\begin{cases} \dfrac{T_x(x+\Delta x)-T_x(x)}{\Delta x} = -\dfrac{1}{\Delta x}\{P(x+\Delta x)\sin(\theta+\Delta\theta)+P(x)\sin(\theta)\} = -\dfrac{W}{\Delta x}\{\tan(\theta+\Delta\theta)+\tan(\theta)\} \\ \dfrac{T_y(x+\Delta x)-T_y(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\{P(x+\Delta x)\cos(\theta+\Delta\theta)+P(x)\cos(\theta)\} = \dfrac{1}{\Delta x}(W+W) = 2\dfrac{W}{\Delta x} \end{cases}$$

さらに $\Delta x \to 0$ の極限をとる ($\Delta\theta \to 0$)。このとき $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{W}{\Delta x}=\sigma$ とすれば、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}T_x(x) = -2\sigma\tan\theta \\ \dfrac{d}{dx}T_y(x) = 2\sigma \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} T_x(x) = -2\sigma\displaystyle\int\tan\theta dx = -2\sigma\int\frac{dy}{dx}dx = -2\sigma\cdot y \\ T_y(x) = 2\sigma\cdot x \end{cases}$$

ならば $\dfrac{T_y(x)}{T_x(x)} = \dfrac{T(x)\sin\theta}{T(x)\cos\theta} = \tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$ より、円の方程式が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sigma x}{-2\sigma y} = -\frac{x}{y} \quad\to\quad \int ydy = -\int xdx \quad\to\quad y^2 = -x^2+c \quad\to\quad \therefore\ x^2+y^2=c$$

若いホイヘンスの書き急ぎであったのかもしれない。ただ接線を含むこの問題は、有限な力学と幾何学からの極限として、この曲線が放物線とは異なることを示すことはできたことだろう。ただそれが円であることを示すことは困難であるように思える。

以上が、ホイヘンスの懸垂線についての手紙の草稿である。懸垂鎖が放物線と異なる証明の骨格をなす命題 5 と命題 6 などは、その根拠 (証明) が書かれていない。“それらは動く理由がない” として釣り合っているという彼の主張に対し、メルセンヌは、つぎのように書いている*9。

> 理由が示されなくとも、それらを受け入れましょう。しかし、ただ原因とみえるだけで、何もないと考えるのは同意できません。一見しただけで我々は全てを見ているわけではないのです。表面的に我々には見えないことが、よく別のときに現れてくるものです。すなわち原因がないかどうか十分に疑うことが大切です。

ここには、ホイヘンスがステヴィンやベークマンの力学の知識を背景とした推論を組み立てているのに対し、メルセンヌはガリレオを疑ったように、慎重な姿勢を崩していない。またメルセンヌがこの懸垂線問題の出版を考え、ホイヘンスにその証明の詳細を求めていた事情もあったようだ*10。しかしその出版は、同年 9 月のメルセンヌの死によりなされることはなかった。

このように 17 才のホイヘンスと晩年のメルセンヌの手紙の往復は、メルセンヌの死とともに終わった。ホイヘンスは 10 年後に友人の P. カルカヴィに、このときのメルセンヌとの交流をつぎのように回想している ([4])。

> メルセンヌ神父は手紙で私を褒めてくださいました。彼のおかげで、私は数学への集中と努力ができたのです。またフランスの著名な数学者からも手紙をいただきました。例えばフェルマー氏です。そのような体験は私に、さらに困難な問題への進むことを可能にしてくれました。

このように、17 歳のホイヘンスにとってメルセンヌとの出会いは、単に懸垂線の問題に限らずその後の彼の方向を決定付けた大きな出来事であった。

---

*9 1647 年 1 月 24 日の手紙。[7]

*10 1648 年 5 月 15 日にメルセンヌは、その出版をしてよいかとホイヘンスに質している。そしてホイヘンスはその数学的証明をすぐに書き上げることを約束していた。

3 Pardies の証明方法

懸垂線と放物線の不一致の研究は、その後 1669 年にドイツの数学者ヨアヒム・ユンギウスにより、1673 年にはフランスのイエズス会士イグナス.G. パルディエによりなされている。ここでは、パルディエの方法を紹介する[*11]。

パルディエはこの証明を、彼の著書 '*La Statique ou la Science des Forces Mouvantes*'(1673) で展開した。彼の方法は、初めから一様な重さを持つしなやかなロープで考えている (図 13)。それは、ホイヘンスの展開した有限な部分から構成される懸垂鎖ではない。Rikey[13] はシンプルで説得力があると評価しているが、パルディエは同時代の数学者からの評価は芳しくない[*12]。ただしベルヌーイとライプニッツは、カテナリーの問題をパルディエのモデルから出発して解決したのも事実であった。パルディエの証明は、つぎのように書かれている。

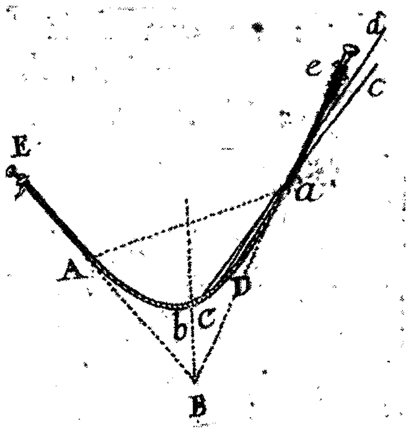

図 13 パルディエ『静力学』

> 図 14 において、鎖の端 a と最下点 b の間の部分を考える。点 a と点 b における接線の交点を D とするならば、この部分の重心は C' となるだろう。それは点 D の鉛直線上にある。ここでもし鎖が放物線であるとするならば、鉛直線 $DC'E$ は線分 aF を 2 等分することになる。しかし放物線であるならば、その曲線上の aC' の重さ（長さ）は $C'b$ の重さ（長さ）より大きいので C' は重心とはならない。それゆえ懸垂曲線は放物線ではないことがわかる。

すなわち、図 15 において、懸垂曲線が放物線ならば、放物線上の 2 点 a, b における 2 つの接線の交点 $\underline{D}$ を通る鉛直線は、2 点 a, b の水平方向の中点 $\underline{C'}$ を通る性質を持つ。

しかし懸垂曲線の 2 つの接線は、その 2 点間の重心、すなわち 2 点の曲線の長さの中点 C' を通らなければならない。図 15 において、もし懸垂されたロープが放物線であるとすれば、水平方向の中点 $\underline{C'}$ に対し明らかに

$$\text{弧長 } a\underline{C'} > \text{弧長 } \underline{C'}b$$

となっている。よってこの点は重心とはならない。すなわち懸垂曲線は放物線とは異なる。

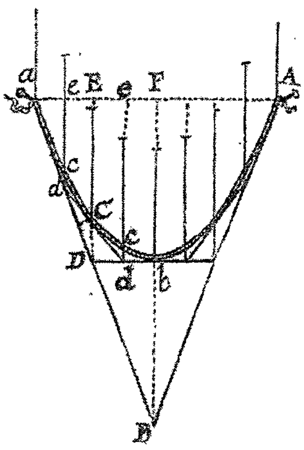

図 14 パルディエの原図

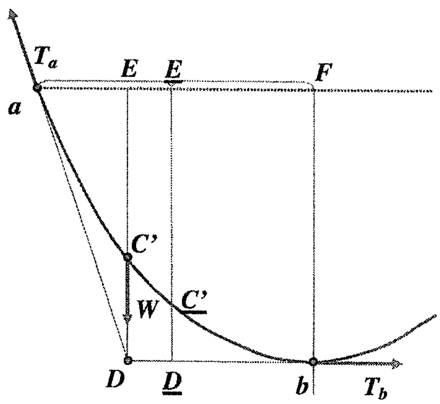

図 15

パルディエは、懸垂曲線の弧の長さを求めることなく推論している。それは、懸垂曲線の最下点 b と 1 つの支点 a をとり、それら 2 点間のロープ重心（2 点間の弧の長さの中点）が、放物線の 2 接線が水平方向の中点で交わる性質から直観的に導いていた。興味深いことが Truesdell[7] に書かれてある。

[*11] J.Jungius の資料は入手できていない。パルディエについては、Truesdell[7]、ヨハンベルヌーイの『積分学講義』[12]、F.Rickey[13] を参照。

[*12] Truesdell[7] は、「パルディエの無限小の議論は数学的に説得力がなく、推測で済ませていた」と述べている。

> ホイヘンスのこの問題についての結果を、パルディエは知っていた可能性がある。それはメルセンヌを通してか、あるいはホイヘンスがパリにいたときに直接聞き出した可能性もある。なぜなら静力学の最後で、パルディエはサイクロイドの運動の等時性の証明を与え、「ホイヘンス氏が彼の証明を出版した後であり、彼のような偉大な人物と競うことができたのは幸運なことだと感じた。」と書いている。パルディエのその証明は正しくまた、ホイヘンスの同年に公表したそれ (上記の pp.47-48) とは異なっていた。

そして Truesdell は、パルディエの証明をつぎのように評していた。

> しかし、彼の考えはホイヘンスとは異なり、あの（ホイヘンスの）時代でもっとも単純で正確な証明となっている。

ただこの証明を正確であるとするためには、後にヨハン・ベルヌーイが着目した弧の長さを求める線積分がなされなければならないだろう。

4 まとめ

17 世紀科学革命に大きな足跡を残したホイヘンスの、初期の力学研究を調べることができた。今日、彼により懸垂曲線と放物線の異なることが証明された事実は、逸話として広く知られている。しかし、その詳細はほとんど不明であったのではないだろうか。

若いホイヘンスにとって、晩年のメルセンヌは彼のメンターであったろう。この証明の経緯を調べることは、二人の知的交流のドラマをまのあたりする経験ともなった。そして何よりも彼の草稿からは、知的外の世界へ躍り出ようとするホイヘンスの高揚感が伝わってくる。それは、高校数学の話題としても十分に価値があると思っている。

ホイヘンスの証明に関してその結果だけを見るならば、「つり橋のケーブルが放物線となる事実から、力の条件の異なる懸垂曲線は放物線とはならないとすれば、それで十分だ。」(カッツ [15]) といえるかもしれない。さらに、「パルディエの証明は、張力（曲線の接線方向）と重力（曲線の長さの中点）のつり合いと、直観的な放物線の性質との矛盾からその違いをきれいに示していた（Bukowski[6])」と、パルディエの推測を支持する意見もある。

しかしホイヘンスは、直接当時の懸垂線と放物線の一致という誤った理解を、力学と幾何学から組み立て反駁した点において意味がある。推測も多分に挿入されがちな自然哲学に、彼は厳密な幾何学的力学で論理を組み立てるというガリレオの手法を発展させていた。そこにおいて力学は、必然的に有限な幾何学と密接に結びついていた。この事実は、メルセンヌがホイヘンスを'新しいアルキメデス'に例えていたことからも、彼の方法の立ち位置は理解できる。それゆえ極限としての曲線への移行では、推測という域をでない形ではあるにせよ、それは 17 世紀中頃のガリレオの流れをくむ自然な考え方であった。

すべてを調べているわけではないのだが、このホイヘンスの草稿を考えるうえで、筆者の推測により補った証明も入れた。しかし彼の方法は、この時代の数学および力学のあり方をよく体現しているといえるだろう。繰り返しになるが、アルキメデス流の有限なレベルでの力学と厳密な幾何学による論証であり、それを通して極限を推論する手法である。それはその後の彼のスタイルとなり、1673 年の'*Horologium Osilatorium*'に連なっていった。

ただホイヘンスは、この変革する時代にあって注目されることの少ない数学者でもある。デカルトとニュートンやライプニッツの間に隠れ、その穏やかな風貌はある意味希薄な印象さえただよう。しかし彼は大陸を代表する科学者であり、その力学 (力や運動量、仕事などの概念) への幾何学的方法は、ニュートンの'*Principia*'に強い影響を与え、さらに微積分法やニュートン物理学へと続く発展の礎石になった。その意味でも、ガリレオやデカルトの方法と 17 世紀末の革新の間を繋ぐミッシングリンクのように思えてくる。

高校での数学 (あるいは物理) で学ばれる知識は、この懸垂線の証明もそうなのであるが、かつての人々の営為を通して形作られたものであり、それを知ることを通してこれらを学ぶことの価値は理解される。これからも個々の教材の背後にある歴史的事実を調べ精進していきたい。

[参考資料]

[1]『新科学対話』上下　ガリレオ・ガリレイ (著)　今野武雄, 日田節次 (訳)　岩波文庫 1948 下巻 p.217

[2] Oeuvres complètes. Tome I. Correspondance 1638-1656 Christiaan Huygens `http://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv01_01/`

[3] Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature: Joella G.Yoder Cambridge University Press (2004)

[4] Huygens: The Man Behind the Principle: C. D. Andriesse (著), Sally Miedema (訳) Cambridge University Press (2011)

[5] Huygens,Holland,and Hanging Chains: J.F.Bukowski Bookend Seminar Feb.8, 2006 Juniata College Pennsylvania USA
`http://www.juniata.edu/services/jcpress/voices/voices/2006_john_bukowski.pdf`

[6] Christiaan Huygens and the problem of the hanging chain: J.F.Bukowski The Colleage Mathematics Journal vol.39 No.1 Jan.2008 pp.2-11

[7] The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788, as Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series II, Volume 11, Part 2, Fiissli, 1960.: Clifford Truesdell

[8]『円錐曲線論』アポッロニオス, ポールヴェル・エック (訳), 竹下 貞雄 (訳) 大学教育出版 2008

[9] 科学革命の先駆者 シモンステヴィン Jozef T.Devreese, Guido Vanden Berghe 中澤聡 (訳) 朝倉書店　2009

[10] Stevin, Huygens and the Dutch republic: Fokko Jan Dijksterhuis June 2008 `http://doc.utwente.nl/85537/1/Dijksterhuis_naw5-2008-09-2-100.pdf` 54

[11] Christian Huygens : E.A.Bell Nabu Press (First Edition 1947)

[12] "Lectures on the Integral Calculus" Johann Bernoulli trans. W.A.Ferguson Jr. `www.21stcenturysciencetech.com/translations/Bernoulli.pdf`

[13] "The Bridge and the Catenary" Frederick Richkey `http://www.math.usma.edu/people/Rickey/hm/CalcNotes/bridge-catenary.pdf`

[14] Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736 : Niccolò Guicciardini Cambridge University Press (2003)

[15]『カッツ 数学の歴史』: ビクター・カッツ　共立出版 (2005)