「パリの論文」からアーベル関数論へ

多変数関数論と複素多様体論の別れ

津田塾大学数学史シンポジウム
平成 27 年 10 月 11 日（日）
高瀬正仁（九州大学基幹教育院）

代数関数論を語る二冊の書物をめぐって

代数関数論に関心を寄せ始めたころを回想すると，真っ先に念頭に浮かぶのは岩澤健吉の著作『代数函数論』（昭和 27 年，岩波書店）とヘルマン・ワイルの著作『リーマン面のイデー』（1913 年）である．岩澤健吉の著作には巻頭に長い序文が配置されていて，アーベル，ヤコビにさかのぼる代数関数論の歴史が豊かな情感を伴って描写されていた．ワイルの著作はドイツ語で表記された古い本で，初版を見るのはむずかしかったが，第 3 版（1955 年）の英訳書（1964 年）が容易に手に入ったのでうれしかった．ワイルが綴る序文の印象もきわめてロマンチックであり，ワイルとともにリーマン面のイデーをこの手につかみたいという強い思いに誘われた．

この二冊のほかにもうひとつ，高木貞治の著作『近世数学史談』（昭和 8 年）のテーマは代数関数論というわけではないが，代数関数の一般理論の糸口となるガウスとアーベルの楕円関数論が詳述されていておもしさもまた格別であった．これらの書物がよい手引きとなり，代数関数論をひとつの柱として，ガウスに始まる 19 世紀のドイツ数学史の形成過程を心に描き，数学に寄せる夢をふくらませたものであった（19 世紀のドイツ数学史のもうひとつの柱はガウスの数論である）．

ところが岩澤健吉とワイルの著作を実際に解読するのは実にむずかしく，大量の時間が無益なままにすぎていくばかりでなかなか前に進むことができなかった．岩澤健吉の語る歴史的回想はさながら一場の夢のようで，強く心を惹かれるものの，具体的なイメージがさっぱり結ばれないのは不思議なことであった．しかも本文の叙述は歴史の流れとは無関係である．ワイルの本は第 1 章と第 2 章の二部構成で，第 1 章には「リーマン面の概念と位相」，第 2 章には「リーマン面上の関数」という章題が附せられている．第 1 章ではリーマン面の概念が登場するまでの叙述がひとつのかたまりを構成し，ヴァイエルシュトラスの解析的形成体とリーマンのリーマン面が語られて，さてそれからさながら両者を止揚しようとする高みに登ろうとするかのように，複素次元 1 の複素多様体の概念が登場する．第 2 章ではディリクレの原理を基礎にして閉リーマン面上においてポテンシャル関数の存在が確立され，それからリーマン＝ロッホの定理，アーベルの定理と進み，ヤコビの逆問題の解決が次々と叙述されていく．そうして代数関数体，一意化，等角写像の話題が続いて完結するが，全体を概観した時点であらためて直面するのは，「代数関数論とはいったい何を解明しようとする理論なのだろうか」という素朴な疑

問であった．

岩澤健吉の著作の序文とワイルの著作の本文を読み進めると，アーベル関数，アーベルの定理，ヤコビの逆問題，解析的形成体，リーマン面，ディリクレの原理，リーマン＝ロッホの定理など，理論構成に不可欠な言葉の数々に遭遇したが，主題をつかむことはできなかった．深遠な魅力に包まれながら主題をつかむことができない，あるいは逆に，主題がいっこうに明らかにならないにもかかわらずどこまでも魅力的であるという意味合いにおいて，代数関数論はまったく不思議な理論であった．翻って思えば，数学そのものがすでにそのような学問である．

関数とは何か

本稿では代数関数論に関連して遭遇した謎めいた事柄のあれこれを書き並べ，代数関数論の印象が混迷に誘われる理由を探索してみたいと思う．代数関数論の建設者として名高いのはヴァイエルシュトラスとリーマンの二人の数学者だが，ワイルの著作の序文などを参照すると明らかに見て取れるように，ワイルが叙述したのはリーマンのアーベル関数論であり，その典拠は「クレルレの数学誌」に掲載されたリーマンの論文

「アーベル関数の理論」（クレルレの数学誌，第 54 巻，1857 年）

においてアーベル関数論を語ったのである．リーマンのいうアーベル関数の実体は実はアーベル積分で，そのアーベル積分というのは代数関数の積分に与えられた呼称である．リーマンのアーベル関数論が，岩澤健吉の著作の書名に見られるように，代数関数論と呼ばれることがあるのはそのためだが，では代数関数とはどのような関数なのであろうか．ここにもまた基本的な問題が顔を出している．

リーマンは複素平面上に重なり合って広がる面，すなわちリーマン面のイデーを前面に押し出して，その舞台の上で複素関数論を展開するという構想を提案したが，特に代数関数の場合には，そのリーマン面はリーマン球面，すなわち複素平面に無限遠店を付加して作られる拡大された平面の上に広がる有限葉の面である．以下，ここではそれを**代数的リーマン領域**と呼ぶことにする．代数関数の存在領域は代数的リーマン領域になるが，その事実認識にとどまらず，逆に代数的リーマン領域こそ，代数関数に固有の存在領域であるという言明がリーマンの構想の根幹を作るのである．ディリクレの原理に基づいて代数的リーマン領域における解析関数の存在証明を試みたのもそのためである．

代数関数とは何かと問われたなら，リーマンなら「代数的リーマン領域の上の解析関数」と答えるであろう．だが，それならそもそも関数とは何であろうか．また，関数が解析的であるというのはどのような意味なのであろうか．いずれ劣らぬ基本的な問いであり，リーマン自身,「アーベル関数の理論」に先立って書かれた学位論文

「1 個の複素変化量の関数の一般理論の基礎」（1851 年）

を関数概念の回想から説き起こし，それから解析関数の概念規定へと歩みを運んでいる．

この二つの問いに答えるのは容易ではなく，長い歴史をたどらなければならない．関数については，リーマンにいたるまでにオイラー，ラグランジュ，コーシー，フーリエ，

ディリクレと続く道筋が目に留まる．出発点はオイラーと見てよいが，オイラーが関数の概念を具体的に語るまでには，デカルト，フェルマ，ライプニッツ，ベルヌーイ兄弟（兄のヤコブと弟のヨハン）と続く「曲線の理論」の時代が存在する．曲線の理論は無限解析もしくは無限小解析とも呼ばれることがあり，この百年の数学史は全体として今日の微積分の揺籃期に該当する．デカルトの『方法序説』(1637 年）の三つの本論のひとつを構成する『幾何学』の時代にさかのぼるなら，1851 年のリーマンの学位論文にいたるまで，この間に優に 200 年をこえる歳月が流れたのである．

この 200 年余の歴史をたどれば今日の関数概念にたどりつくが，その関数というのは実関数，すなわち実変数の関数である．ところがリーマンの数学的意図は実関数にあるのではなく，リーマンは複素関数，すなわち複素変数の関数の一般理論の構築をめざしたのである．リーマンの学位論文の冒頭を見ると，実関数と複素関数の間に見られる本質的な相違が指摘され，長い思索の後にようやく，今日の複素解析的関数（正則関数と呼ばれることもある）の概念に到達する．そこで大きく浮上するのは，数学における複素数もしくは複素量の導入という出来事の解明という作業である．これは難題で，多くの文献の参照を強いられるが，思いつくままに挙げていくと，

・代数方程式の虚根に寄せる認識の変遷（カルダノとオイラー）
・ヨハン・ベルヌーイが発見した等式 $\dfrac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\dfrac{\pi}{2}$（後にオイラーはこれを「ベルヌーイの美しい等式」と呼んだ.）
・負数と虚数の対数の正体をめぐってたたかわされたライプニッツとヨハン・ベルヌーイの論争
・オイラーによる対数の無限多価性の発見
・コーシーによる「コーシーの定理」の発見と，それを基礎とする留数解析の展開
・楕円関数論における虚数の導入（ガウス，アーベル，ヤコビ）

などが次々と念頭を去来する．複素関数論の始まりを見るという視点に立てば，対数の無限多価性の発見は優に出発点でありうるが，一般理論の建設に向かう第一着手は「コーシーの定理」の自覚的認識にある．複素関数論をテーマにして書かれたコーシーの一連の著述は，学位論文を若い日のリーマンにも大きな影響を及ぼしたのである．

こんなふうに歴史の流れをたどっていけば，リーマンのいう関数，すなわち複素解析関数の概念にたどりつけそうである．鍵をにぎるのは関数の解析性の表現様式だが，リーマンはこれを「コーシー＝リーマンの方程式」の成立において認識した．ところが解析性を備えた複素関数には解析接続の現象が付随し，そのために定義域の形が任意ではなくなってしまう．ヴァイエルシュトラスの解析的形成体やリーマンのリーマン面のアイデアは，この状況に対応しようとしてそれぞれ提案されたのである．ワイルはなお一歩を進めて複素次元 1 の複素多様体というイデーを提案し，それをリーマン面と呼んだ．ワイルによれば，複素解析関数とはリーマン面上の解析関数のことであり，解析関数のなかでも代数関数といえば，閉じた（コンパクトな）リーマン面上の関数のことにほかならない．

代数関数の泉

ヴァイエルシュトラスの解析的形成体やリーマンのリーマン面，あるいはまたワイルのいう意味におけるリーマン面のどれを採るにしても，代数関数をどのように認識するべきかという論点は，前期のように歴史の流れをたどるという手順をつくすことによりひとまず落着しそうである．西欧近代の数学史の全史を顧みるほどの大作業に逢着してしまうが，さてそのうえであらためて浮上するのは,「代数関数の主問題は何か」という問題である．岩澤健吉とワイルの著作を見てもこのもっとも基本的な論点は容易に明らかにならず，そのために代数関数論の印象が茫漠としてしまうのである．

関数概念を明示したオイラーは関数を代数関数と超越関数に大きく二分したが，その目的は代数曲線を理解するための新しい視点を確保することであった．曲線の解析的源泉を関数と見るというのが，無限解析におけるオイラーの基本思想であり，このアイデアに沿って，オイラーは代数曲線の解析的源泉を求めて代数関数の概念の表明を試みたのである．オイラーの眼前にあったのはデカルトに淵源する代数曲線であり，その解析的源泉の存在を確信したところにオイラーの創意があった．オイラーが一番はじめに表明した代数関数は定量と変化量を組み合わせて組み立てられる代数的表示式だが，この素朴な観念をもってするのでは代数曲線の全容を把握するには不十分であり，曲折の末に，**閉リーマン面上の解析関数**という，リーマンが提案した概念が現れて落着したのである．

リーマンのいう代数関数の概念は今日の数学でもそのまま行われているが，この概念の泉は「代数曲線の解析的源泉」の存在に寄せるオイラーの確信であったことは忘れられない事実である．**数学の定義はそれ自身が一個の創造であり，しかも特定の個人の確信から生れ出る**ものであることを，代数関数の概念の変遷過程はありありと示している．

代数関数論の主問題とは

ワイルの著作を読んでもなかなか諒解することができないが，代数関数論の形成過程を振り返れば主問題の所在は明瞭に感知される．それは「ヤコビの逆問題」である．その名のとおりヤコビが提示した問題だが，ヤコビはこれをアーベルが発見した「アーベル積分の加法定理」から汲み取ったのである．　アーベルの加法定理は，アーベルの「パリの論文」，すなわちパリに滞在中のアーベルが 1826 年の秋 10 月に書き上げた論文

> 「ある非常に広範な超越関数族の，ひとつの一般的性質について」(Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes)
>
> （註） 一時行方不明になったが，1841 年になって，Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institu national de France（いろいろな学者によりフランス国立学士院科学アカデミーに提出された諸論文），第 7 巻，に掲載された

においてはじめて表明された．次に挙げるのは「パリの論文」の序文だが，アーベルの数学的意図がここに明瞭に語られている．

これまで幾何学者たちの手で考察されてきた超越関数はごくわずかである．超越関数に関するほとんどすべての理論は対数関数，指数関数，それに円関数の理論に帰着されるが，それらの関数は実際のところ，唯一の種類の関数族を形成するにすぎない．そのほかの二，三の関数の考察が始まったのはようやく最近のことである．それらの関数の間で筆頭に挙げられるのは，ルジャンドル氏が多くの注目に値するエレガントな性質を明らかにした楕円的超越物である．著者はアカデミーに提出する栄誉を担うこの論文において，非常に広い範囲に及ぶ関数の族，すなわち，その微分（註．原語は *derivées*）がある同一の変化量の有理関数を係数とする代数方程式を用いて書き表される，という性質をもつすべての関数を考察した．そうしてそのような関数を対象として，対数や楕円関数と類似の諸性質を発見した．

「その微分がある同一の変化量の有理関数を係数とする代数方程式を用いて書き表される，という性質をもつ関数」というのはアーベル積分のことで，一般に，変化量 y は変化量 x の代数関数として，$\omega = \int y dx$ という形に表記される．ここで，y が x の代数関数というのは，y が x の有理関数（多項式と言っても同じことになる）を係数とする代数方程式

$$P(x,y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + a_2(x)y^{n-2} + \cdots + a_n(x) = 0$$

を満たすということを意味している．リーマンは代数関数を閉リーマン面上の解析関数として把握したが，それ以前には代数方程式を経由して理解されていたのである．アーベルは積分 $\omega = \int y dx$ をさして「関数」と呼んでいる．その微分 $d\omega = y dx$ の右辺に見られる dx の係数 y は x の代数関数であり，この状況を指して，アーベルは「その微分がある同一の変化量の有理関数を係数とする代数方程式を用いて書き表される」と言い表したのである．

アーベルはアーベル積分を考察して「対数や楕円関数と類似の諸性質を発見した」と言っているが，「類似の諸性質」の中核に位置するのが加法定理である．オイラーが発見した楕円積分の加法定理以来の大きな発見であった．

ヤコビは「パリの論文」を見ることは（少なくとも 1841 年までは）できなかったが，「クレルレの数学誌」に掲載されたアーベルのもうひとつの論文

「ある種の超越関数の二，三の一般的性質に関する諸注意」（「クレルレの数学誌」，第 3 巻，1828 年）

を見て「パリの論文」の存在を知るとともに，アーベルの加法定理の中味を認識した．ここから取り出されたのがヤコビの逆問題であり，リーマンのアーベル関数論の目標となった．

アーベル関数とヤコビ関数

ヤコビ自身による原型のヤコビの逆問題は種数 2 の第 1 種超楕円積分を対象にして提示される．1 次独立な 2 個の超楕円積分

$$\Phi(x)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}},\ \Phi_1(x)=\int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{X}} \quad (X \text{ は } x \text{ の次数 5 または 6 の多項式})$$

を取り，複素変数の世界において連立積分方程式

$$\Phi(x)+\Phi(y)=u,$$
$$\Phi_1(x)+\Phi_1(y)=v$$

を考えると，x と y はいずれも u と v の関数のように見える．ヤコビはそれらを

$$x=\lambda(u,v),\ y=\lambda_1(u,v)$$

と表記して，アーベル関数と呼んだ．リーマンの語法にならうなら**ヤコビの逆関数**である．ヤコビはこれらの関数は 2 次方程式

$$A+Bt+Ct^2=0$$

を満たすと言明した．ここで，係数 A,B,C は 2 個の複素変数 u,v の 4 重周期をもつ 1 価関数である．アーベル関数の本質がここに現れているというのがヤコビの所見である．これがヤコビの逆問題の一番はじめの姿である．

今日では係数 A,B,C のほうをアーベル関数と呼ぶ語法が流布しているが，ヤコビが真に着目し，正体を明るみに出そうと欲したのは今日の意味でのアーベル関数それ自体ではなく，それらを係数にもつ代数方程式の根として認識される関数である．そのような関数をヤコビはアーベル関数と呼び，リーマンはヤコビの逆関数と呼んだが，ここでは**ヤコビ関数**という呼称を採用したいと思う．

原型のヤコビの逆問題に即して観察すると，**ヤコビ関数は複素 2 変数 u,v の 2 価関数であり，その存在領域は複素次元 2 のアーベル多様体上に広がる代数的リーマン領域である．しかもそのリーマン領域は必ず分岐する．**

ワイルの『リーマン面のイデー』に現れたヤコビの逆問題

ヤコビの逆問題はリーマンのアーベル関数論の主題であるから，当然のことながらワイルの著作『リーマン面のイデー』でも取り上げられている．記号の説明を省いて，ヤコビの逆問題を語るワイルの言葉をそのまま再現すると次のようである．

> $p=1$ の場合に楕円関数によって解かれる”逆問題”は，任意の示性数 p をもつ面に対してもつぎのような形で成立する : dw_h^* $[h=1,2,\cdots,p]$ が $\mathfrak{F}$ 上の第 1 種微分の複素基底であるとき，あらかじめ任意に与えられた数 $\mathcal{F}_1,\cdots\mathcal{F}_p$ に対して，(積分の道を適当に選ぶとき)
>
> $$\sum_{l=1}^{p} w_h^*(\mathfrak{p}_l)=\mathcal{F}_h\ [h=1,2,\cdots,p]$$
>
> となるように，$\mathfrak{F}$ 上の点 $\mathfrak{p}_l,\cdots,\mathfrak{p}_h$ を見いだすこと．
>
> （註） 田村二郎訳．原書の初版を典拠とする邦訳『リーマン面』(岩波書店, 1974 年) より引用した．以下の叙述でもワイルの著作からの引用はこの邦訳書の訳文にしたがう．

これがワイルのいうヤコビの逆問題である．ワイルの歴史的註釈が続く．

> この逆問題はヤコビにより，アーベルの定理に関連して提出され，Göpel（註．ゲーペル）とRosenhain（註．ローゼンハイン）による重要な準備的労作ののちに，リーマンとワイヤストラスにより ϑ 関数―p 個の変数 $\mathcal{F}_h$ の或る超越整関数―を使って一般的な解決が得られた．

ワイルはここに脚註を附して，リーマンの論文「アーベル関数の理論」と「テータ関数の零点について」(1865年)，それにヴァイエルシュトラスの講義録「アーベル的超越物の理論に関する講義」(「超越物」の原語はTranszendenten.「アーベル的超越物」はアーベル積分と同じ）を挙げ，そのうえで次のような所見を書き留めた．

> 逆問題の大きな意義はわれわれ現代人にとって単に問題そのものの価値のなかにあるばかりではなく（そしてそれが決して主要なものでもなく），Riemann（註．リーマン）やWeierstrass（註．ヴァイエルシュトラス）の壮大な一連の思想―逆問題を解決するための努力を通して，彼らがその創造に駆り立てられた一連の思想―のなかにある．

ヤコビが提示した原型の逆問題では探索の対象はヤコビ関数であった．本稿では詳述するゆとりはないが，ゲーペルとローゼンハイン，それにヴァイエルシュトラスもまたヤコビの意図を正確に踏襲した．ところがワイルが語るヤコビの逆問題に移ると様相が一変する．主題はもうヤコビ関数ではなく，「点系の対応」の状況観察へと移っている．もう少し正確に観察すると，ヤコビの逆問題を「点系の対応」として諒解したのはリーマンその人であり，リーマンはそのような視点を確保することにより逆問題の解決に成功した．ワイルはそのリーマンを踏襲したのであり，そこに格別の創意が見られるわけではないが，その際，リーマン面を複素数域から切り離して複素多様体のイデーを語ることになった．

ワイルの創意により，ヤコビの逆問題の幾何学的状況はリーマンの原論文に比してますます明瞭になっていくが，失われたものもまた存在する．それはヤコビ関数である．関数の姿が代数関数論の表舞台から消えてしまうのであり，明晰判明の獲得のために，ワイルは大きな代償を支払わなければならなかったのである．

リーマン自身が提案した閉リーマン面，すなわち代数的リーマン領域は複素数域と緊密に結ばれている．そのために，消失したように見えたヤコビ関数は実際には一時的に背景に退いただけであり，いつでも認識可能なのであるから消滅したわけではない．

ワイルはヤコビの逆問題そのものにはそれほど大きな価値を認めていなかったようで，その間の消息は上に引用した脚註に率直に語られているとおりである．ヤコビの逆問題が解けたという事実に値打ちがないわけではないが，真実の値打ちの所在を考えていかなければならない．この問題には何かしら深遠な魅力が備わっていて，リーマンやヴァイエルシュトラスの壮大な思想を誘い，創造へと駆り立てていった．まさしくそこに真の値打ちが認められるのであると，ワイルは言いたそうである．では，リーマンやヴァイエルシュトラスは何を創り出したのであろうか．

多変数関数論と複素多様体論の別れ

アーベルの「パリの論文」からヤコビ，ヴァイエルシュトラス，リーマンへと続く流れをたどっていくと，代数関数論の主題は一貫してヤコビの逆問題であった．ところがワイルの関心はそこにはない．ワイルの目にはリーマンとヴァイエルシュトラスの「壮大な一連の思想」の果実が映じていたかのような口ぶりだが，『リーマン面のイデー』にはその果実の具体的な姿は見られない．**リーマンからワイルへと移り行く際に代数関数論の主題もまた変遷し，しかも新しい主題が語られたわけではない．代数関数論の印象が茫漠としてしまうのはそのためである．**

ワイルが明記しているわけではないが，『リーマン面のイデー』の刊行後 100 年の歳月が経由した今日の目には，ワイルの心情のカンバスに描かれていた「リーマンやヴァイエルシュトラスの壮大な一連の思想」の産物の姿がいかにも明瞭に見えるように思う．それは 1 次元および高次元の（一般に特異点の伴う）複素多様体の理論であり，リーマンのアーベル関数論の延長線上に配置されるのはコンパクトな複素多様体の理論である．ワイルの著作が契機となって，リーマンのアーベル関数論は関数の理論から図形の理論へと転換したのである．

ワイルはヴァイエルシュトラスの解析的形成体とリーマンのリーマン面を同じものと見て複素 1 次元の複素多様体の概念を導入し，それを新たにリーマン面と名づけた．ヴァイエルシュトラスとリーマンの出発点がこうして融合したが，リーマンのリーマン面が複素数の世界に連結しているのに対し，ワイルのリーマン面は複素数域から切り離されていて，さながら空中に浮遊する飛行船のようである．ヤコビの逆問題の探索の場において，ヴァイエルシュトラスはどこまでもヤコビ関数の姿を追い求めたが，この方向に歩みを運べば，クザン，ハルトークス，E.E. レビと続く多変数関数論の世界が開示されていく．ヴァイエルシュトラスのアーベル関数論はワイルの『リーマン面のイデー』に包摂されるわけではなく，ワイルの著作の出現に伴って，かえって多変数関数論と複素多様体論との別れが際立っていくのである．

ヤコビ関数の等分と数論

ヤコビの逆問題の解決を通じて出現するヤコビ関数は多変数の解析関数であり，しかもその存在領域はアーベル多様体上に分岐しながら広がる代数的リーマン領域である．ヤコビ関数に寄せる関心はおのずと多変数関数論の基礎理論の形成を誘うが，多変数解析関数を考える場，すなわち，ワイルのいう「多変数解析関数がその上にこそはじめて生育し繁茂しうる大地」としては，複素数域から切り離された複素多様体よりも，リーマンのアイデアにならって高次元のリーマン領域を考えるほうが適切なのではないかと思う．

こうしてヤコビ関数の考察は多変数関数論の主役になりうるが，ではその際の主問題は何であろうか．アーベル関数論から発生する最後の問いがここに現れているが，ヤコビとエルミートはヤコビの逆問題の解決に先立ってすでにひとつの有力な道の所在を示唆している．それは**ヤコビ関数の等分と変換の理論**を構築し，数論との関連を明らかにすることである．アーベルの楕円関数論がクロネッカーの虚数乗法論を誘ったように，

ヤコビ関数論には一般化された虚数乗法論への道を開く力が備わっている．本稿ではこのあたりの消息にこれ以上立ち入ることはできないが，今後の歴史研究のひとつの課題としてここに挙げておきたいと思う．

最後の課題

本稿の叙述目標はほぼ達成されたが，最後になおもうひとつの根源的な問題が残されている．それは，**代数関数が数学研究の表舞台に登場したのはなぜなのであろうか**という問いである．デカルトの『方法序説』のあたりまでさかのぼって再考を強いられそうな難題であり，考えるほどに印象はいかにも不思議である．西欧近代の数学の根底に横たわる大きな謎として，いつまでも考え続けていかなければならないであろう．