Abstract

Uncountability proofs for real numbers that were not provided by Cantor

Suzuki Shinji

One of the main purposes of this paper is to show all the different types of proofs for the uncountability of real numbers, all the mathematicians who provided them, and their corresponding publication year. Moreover, we outline the influence of these methods on modern mathematics. In particular, we examine which proofs require the axiom of choice or impredicative definitions, as listed in the following table.

Method of proof	Name	Year	Axiom of choice	Impredicative definition
1. Method of nested intervals	G. Cantor	1874	×	○
2. Method of measure theory	A. Harnack	1885	○	○
3. Cantor's diagonal method	G. Cantor	1891	×	○
4. Set-theoretic diagonal method	G. Cantor	1891	×	○
5. Cantor's back-and-forth method	G. Cantor	1895	×	○
6. Corollary of category theory	R. Baire	1899	×	○
7. Cardinal number of perfect set	R. Baire	1905	×	○

Other purposes of this paper are to clarify why there are typically very few opportunities in textbooks to see the seventh proof, describe how A. Comte's thoughts affected French empiricism, and appreciate Cantor's accomplishments from various aspects by focusing on how Harnack's papers influenced him.

In common view, Cantor's uncountability proof of real numbers was prompted by a hint from the Fourier series and real number theory. However, in reality, we will see that the Galois theory also assisted him with formulating the proof.

Furthermore, this paper presents unexpected historical facts that are often inaccurately presented, which are as follows:

- Not Cantor, but Cauchy first introduced the Method of nested intervals.
- Not Cantor, but du Bois-Reymond first introduced the Diagonal method.
- Not Cantor, but Smith first introduced the Cantor's set.
- Not Lebesgue, but Harnack invented the prototype for Almost everywhere, which is one of the most fundamental concepts of measure theory; moreover, the Fourier series theory is the very cradle of a.e.
- Cantor's original back-and-forth method does not go back and forth but one way.

カントールによらない実数の非可算性の証明

その発案の経緯と現在への影響を巡って

鈴木　真治[1]

目次

[1] 2015年1月30日投稿 suzuki-zeta.888@gol.com

1. はじめに

カントールによる実数の非可算性定理の発見は、全数学の歴史の中でも最も革命的な出来事の一つに数えられている。単に集合論の幕開けを告げただけではなく、無限概念の深化に本質的に寄与した、思想史上の金字塔として扱われるべき偉業である。[2]そして、多くの数学史家による論説と、デデキントとの往復書簡を通して、この稀有な定理の構築の背景と舞台裏は、広く我々の知るところとなっている。

本論では、この定理の 7 種類の証明の発表時期と発案者を明示した後、これまで余り論じられてこなかったカントールによらない証明を中心に、その発案の経緯や現在への影響について考察する。読者は、このようなアプローチから、逆にカントール自身の数学の与えた衝撃が浮き彫りにされ、この定理の別証明たちを支える個々の理論が、それぞれに現代数学と深く関わっていた様子を見るであろう。特に、邦書ではあまり見かけないベールの別証明（カテゴリー定理の系ではない）を紹介し、その証明がなぜ他の別証明ほどには注目されなかったかについても論究する。[3]

（読者への注意）

本論の主旨は上記に述べた通りであるが、これとは別に、数学に興味を持つ方には意外と思われるような巷説とは異なる歴史的事実を中心に設問形式で列記しておいた。適宜参照・活用されたい。

(1) **対角線論法**も**区間縮小法**も初めて発表したのはカントールではない。それらはいつ、誰が、どのような定理に対して適用したのか？

付録 11, 第 2 節参照

(2) 実数の非可算性を史上初めて証明したカントールの論文では、「**ガロアの原理**」が引用されていた。なぜか？ 付録 1(2)参照

(3) カントールが実数の非可算性を証明しようと考える切っ掛けの一つになったであろう**代数学の論文**[4]がある。それはどのような論文か？

付録 1(3)参照

---

[2] 思想史と云う側面に限定して、これに匹敵するものを 19 世紀以降の数学全体の中から選ぶとするならば、全くの個人的見解であるが、非ユークリッド幾何の発見、Gödel の不完全性定理、Turing マシンと云ったところであろうか. 人類は無限概念については、Cantor の仕事によって「一つ、二つ、沢山」としか数えられなかった未開人から「1,2,3,…∞」と数える近代人くらいに進歩したと思われる.

[3] 少なくともこの別証明が他の別証明程には注目されなかったことは事実であり、その原因を数学史的な見地から考察することは興味深い試みであると考える.

[4] 通説は「Fourier 級数の収束問題と実数論を深く考察するうちに思い至った。」である.

(4) **カントール集合**を初めて発表したのはカントールではない。それは誰か？どうしてその数学者の名前が付いていないのか？ 付録 14 参照

(5) **カントールの往復論法**のカントールによるオリジナル論文では往復していない。誰が往復論法にしたのか？ 第 3 節参照

(6) 現在の**連結性**や**局所連結性**が定義された由来はなにか？ 第 6 節参照

(7) **a.e (殆ど至る所)** の概念を測度論に導入したのはルベーグではない。では誰がどのような動機で導入したのか？ 第 4 節参照

(8) 1870 年代、殆どの数学者は、現在の言葉で表現するならば、**全疎集合(nowhere dense)**ならば測度零であると考えていたが、例外的にこのように考えなかった数学者がいた。それは誰か？ 付録 14 参照

(9) **ハルナック**の原理、不等式で有名なハルナックは実は測度論でも卓越した仕事をしていた。それはどのようなものか？ 第 4 節参照

(10) **ウリゾーン最期の論文**「連結集合の濃度について」のアイデアはある数学者による距離空間での定理を位相空間において定式化することであった。その数学者とは誰か？ 第 6 節参照

(11) 実数の非可算性の 7 種類の現代的証明とオリジナルの証明に対する**選択公理**と**非述語的定義**の使用の有無の如何？ 第 2 節参照

(12) 論理主義、直観主義、形式主義と並んで一派に数えられていたフランス経験主義の思想的背景の一翼を担う**オーギュスト・コント**の実証哲学とはどのようなものか。 第 5 節参照

(13) フランス経験主義のキーワード、**effectif** とはなにか。 第 5 節参照

(14) **フランス経験主義**が停滞した原因はなにか？ 第 5 節参照

(15) 第一次世界大戦でフランスがドイツやロシア、ポーランドに比べてはるかに数学者を大勢失ったのはなぜか？ 第 5 節参照

(16) **小平邦彦氏**は対角線論法があまり好きではなかった。では、どんな証明方法を推していたのか？ 第 4 節参照

(17) 1958 年当時には、「**自分は公理主義で数学は考えない。**」と言い切る著名な日本人基礎論学者がいた。それは誰か？ 第 5 節参照

(18) **Cantorsche Haupttheorem** とはどんな定理のことか。 第 6 節参照

(19) **完全集合**ならば連続濃度であることはカントールやブラウエルが証明しているが、彼らの証明は実数の非可算性の証明には使えなかった。一方、完全集合ならば非可算濃度であることを示したベールの証明は使えた。なぜか。 第 7,9 節参照

(20) 前項にも拘わらず、**ブラウエル流**の証明の方が**ベール流**の証明よりも現在、流布している。なぜか。 第 7 節参照

2. 7通りの実数の非可算性の証明

「実数の非可算性」の証明としては対角線論法があまりにも有名であるが意外にも別証明の数はそれ程多くは無い。100 種類を超える別証明があるピタゴラスの定理[5]は別格としても、「平方剰余の相互法則」[6]や「代数学の基本定理」[7]のように別証明を集めて解説する書物があり、集合論に限ってみても「カントール-ベルンシュタインの定理」のモノグラフ[8]が上梓されているくらいなのだから、「実数の非可算性」についても、その人気や重要性を鑑みれば、同様の書物があってもおかしくないと思うのだが、未だ見つけられずにいる。著者が調べた限り、「実数の非可算性」と銘打って与えられた証明としては下記の 7 通りがある。

	発案者	発表年	選択公理の使用	非述語的定義[9]
① 区間縮小原理[10]	カントール	1874	無	有
② 測度論的証明[11]	ハルナック	1885	有	有
③ 対角線論法[12]	カントール	1891	無	有
④ 集合論的対角線論法	カントール	1891	無	有
⑤ 往復論法[13]	カントール	1895	無	有
⑥ カテゴリー定理[14]	ベール	1899	無	有
⑦ 完全集合の濃度[15]	ベール	1905	無	有

③と④は本質的に同じであるが、一応分けておいた。カントールによる証明①,③,④,⑤はすべて『数学のロジックと集合論』[86][16]にある。

---

5 『ピタゴラスの定理 100 の証明法―幾何の散歩道』[99]

6 『平方剰余の相互法則―ガウスの全証明』[70]

7 『The Fundamental Theorem of Algebra』[33]

8 『Proofs of the Cantor-Bernstein Theorem』[2]

9 impredicative definition：非叙述定義、非確定的定義と訳されることもある.

10 付録 1 参照

また、区間縮小法はしばしば Cantor の発案のように語られるが、実際は Cauchy が 1821 年に、有名な『解析教程』の「ノートⅢ」にある中間値の定理の証明で使用している. それは連続関数の解の近似計算手法を厳密な証明方法へ転換すると云う革新的なものであった.

11 付録 2 参照

12 付録 3 参照 ※実数の非可算性の証明への応用ではないが、対角線論法そのものを最初に世に出したのは Cantor ではなく du Bois-Reymond であった.付録 11 参照

13 付録 4 参照

14 付録 5 参照

15 付録 9 参照

16 付録にある Cantor によって発見された証明の現代版で参照させて頂いた. 一部、著者の判断で、主に独立して読めるように、手を加えさせて頂いた部分もある.

②は『数学とはなにか』[28]に紹介されており、この証明法をブラッシュアップしたものが『解析入門』[72]に収載されている。

⑥もいろいろな本で紹介されているが、例えば『巨大基数の集合論』[45]にある。

⑦は『極限論と集合論』[92]と『点集合論』[102]でしか見たことがない。しかも、両方とも点集合論での証明であり、距離空間や位相空間での証明は、著者が知らないだけだろうが、洋書でもお目に掛ったことがない.

このような基本的な定理の証明で特に気を付けるべき点として、通常はそれ程神経質になることはないのだが、選択公理の使用及び非述語的定義の有無を表にして纏めておいた。現代数学において、選択公理や非述語的定義がどの程度忌避されているのかは興味ある話題であるが、ここでは扱わない。

ちなみに、**選択公理**に最初に注意したのは**ペアノ**（1890 年）であったが、この公理を歴史的な表舞台に立たせたのは**ツェルメロの整列可能定理**の証明(1904 年)であった。一方、1903 年にB．**ラッセルは、対象物を定義するのに、その対象物全体の集合を使うのは一種の循環論法であり、そのような定義は無意味である、とした。**1905 年、**ポアンカレ**はこの考えを受け入れ、このような定義を「**非述語的定義**」と名づけた。[17]

二つとも、20 世紀初頭、活発な議論の的になった排中律、還元公理、無限公理などと並んで「数学の基礎の危機」の中心テーマであった。

集合論の専門家からは、区間縮小法による証明もカテゴリー定理による証明も同じ思想圏にあり、後者は前者の発展形であるとみなされている。[18]

対角線論法のような実数の表現に依存した方法よりも区間縮小原理の方が好ましい、とする意見[19]もある。一方で、この方法だと非述語的定義であるワイエルシュトラスの定理における最小上界が使われているところに不安がある[20]。対角線論法の場合、ワイエルシュトラスの定理は必要

[17] Russell と Poincaré の異議は Russell の背理、Cantor の背理、Burali-Forti の背理を説明付けるものとして、広く受け入れられた. 一方で、古典数学の中の「上限」や「与えられた区間における関数の最大値」のような基本的な概念が非述語的定義であることが明らかになった. H. Weyl はこのような状況を不安と考え、上限の非述語性を避けるような再定義を試みたが結局は成功しなかった. 次のブログには簡潔で明解な解説がある.
http://www.iep.utm.edu/predicat/
また、付録１６参照. Poincaré が最晩年の頃に書いた基数と非述語的定義との関係についての興味深いエッセイ.

[18] 『巨大基数の集合論』[45]pp.26

[19] 『対角線論法なしの数学基礎論』[87]pp.60-70

[20] Weierstrass の定理：上に有界な実数集合は最小上界をもつ.

ないが非述語的定義は別の形で現れる。[21]

測度論的証明については、選択公理は使うし、証明の途中に区間縮小原理を使うので、非述語的定義も含まれていて、基本性からは良いところがないようにも見える。しかし、後で説明するように小平邦彦氏は、「R は非可算であるだけでなく、R の可算部分集合は R の極めて小さい部を占めるに過ぎないことがわかる。」と言ってこの証明を評価している。

カテゴリー定理は、一般の完備距離空間に対してならば選択公理が必要であるが、可分性のある完備距離空間、いわゆるポーランド空間、に対してならば必要ない。従って、実数の非可算性の証明に限定すれば選択公理は必要ではない。ベール自身はR上でカテゴリー定理を証明しているのだが選択公理が必要な形で証明している。一方で、叙上の整列可能定理の証明に使用された選択公理の是非についてのボレル、アダマール、ルベーグとの往復書間[22]では選択公理を認めない立場であった。

完全集合は非可算濃度である、との定理そのものは有名なのだが、後述するように、その証明はベール流ではなく、実数の非可算性を前提とするブラウエル流が使われていることが多い。ベール流の証明は、本質的にはカテゴリー定理と同様の手法による。

本節の締めとして、これらの証明方法や定理が与えた影響を、著者が見聞きした範囲で[23]、簡単にまとめておこう。区間縮小原理は実数論の基本定理の一つとみなされており、微積分の基礎理論として、デデキントの切断やワイエルシュトラスの上限・下限の存在定理、有界な単調数列の収束との同値性は広く知られるところである。[24]更に、これは距離空間や位相空間においても基本的な手法として存続し、例えばベールによるカテゴリー定理の証明にも応用されている。（付録5のベールの原論文参照）測度論的証明 はルベーグ積分の基本的概念である零集合に直結しており、これについては後でより詳しく考察する。（4節参照）また、これに起因して

※sup が現れるだけで、即、非述語的というわけではない. この定理では “すべての” 有界集合がこの性質を持つところに問題がある.

[21] 非述語的定義から実数の非可算性の証明を検討すると云う視点は田中尚夫氏にご指摘いただいた. 対角線論法においてどのように非述語的定義が現れるかは付録 3 参照のこと.

[22] 日本語訳は『選択公理と数学』[88]にある.

[23] 著者の力量では、現代の数学を正当に俯瞰するようなことは勿論出来ない. ここでのまとめは著者自身の学んだ乏しい数学の範囲に限定している.

[24] これらの 4 つの定理の同値性は『解析概論』[83]の第 1 章にも収載されているが; 実はこれら以外にも数多くの同値な基本命題（Heine-Borel の定理、Bolzano-Weierstrass の定理、Archimedes の公理、Cantor の公理、中間値の定理、Rolle の定理、最大値の定理、平均値の定理　等）がある.『実数論講義』[82].

生まれた「殆ど至る所等しい」と云う概念は関数概念そのものに大きな影響を与えた。例えば、L_2空間での関数は「殆ど至る所等しい」関数族を同値類としたものであり、ここでは値の対応と云う関数の基本アイデアは崩れてしまう。それでもこの関数類を関数概念の一つの発展形と見なすという考え方がある。[25] 対角線論法はルベーグによる真にξ級のボレル集合(ξ>2)の存在定理、ゲーデルの不完全性定理、チューリングの停止性問題の決定不能性定理、アルツェラーアスコリの定理等と云った基本的な定理に応用されている。往復論法 の有名な応用例としては、カントール自身が示した有理数と代数的数の順序まで含めた同値性の証明以外に、原子元を持つ可算ブール代数の一意性が挙げられ、算術の超準モデルの研究では頻繁に用いられるとの指摘もある。[26]カテゴリー定理は関数解析における基本定理の一つであり、この定理から開写像定理、閉グラフ定理と云った重要な定理が証明されており、職人芸的な技量を要する古典的なワイエルシュトラスの定理[27]をバナハ空間上で全く自然に証明することを可能とした。関数解析以外にも応用があり、例えば、関数論で著名なハルトッグスの正則性定理やローマン・メンショフの定理の証明に使われている。また、現代集合論で重要なマーティンの公理のアイデアはカテゴリー定理に遡るとも考えられている。一方、一般の位相空間がベール空間[28]になるための十分条件としてこの定理を捉えるならば、ベール空間を基本的な対象の一つとする記述集合論において当該定理が基本的であることも当然であろう。

このように、現在まで残っている別証明は、いずれもその延長線上に豊かな数学の沃野が広がっていたことが見て取れる。つまり、「実数の非可算性の証明」に応用されたから重要な証明方法なのではなく、もともと重要な手法なのであって、その応用の一つとして「実数の非可算性の証明」があったと理解するのが正しい認識であろう。

少なくとも、これらの別証はその定理の解釈に何らかの独自性を主張し、その延長線上に新しい知見を与えるが故に現在まで残っているのだと著者は考える。

---

25 少なくともL_2空間を素の関数で構成したら Hausdorff 性さえ破れてしまう. (Zariski 位相とは違うタイプの自然な非 Hausdorff 位相空間の例でもある)

26 『数の体系と超準モデル』[85]pp.173

27 閉区間[0,1]上で連続であるが、[0,1]上至る所微分可能でない関数が存在する.

28 位相空間 X において、X の部分集合 A が第 1 類ならばその補集合 X−A が X で稠密になるとき、X を Baire 空間という. 次節で証明される二つの定理の条件、「完備距離空間」及び「局所コンパクト・ハウスドルフ空間」はともに Baire 空間となる.

3. 様々な「実数の非可算性の証明」の背景

カントールによる最初の「実数の非可算性の証明」、いわゆる区間縮小原理による証明、の背景にフーリエ級数の収束問題と実数論に対する深い考察があったであろうと云う推測は通説化しているので、詳細はブルバキやカッツを参照されたい。ただ、意外かもしれないが、**ガロア理論もまた有力な動機づけになっていた**ことは付言しておきたい。[29]

カントールがこの歴史的快挙を成し遂げたあと、更に 18 年もの間、別証明を模索していた理由は明快である。「**区間縮小原理による証明**」は確かに見事な証明なのだが、一般基数の集合に適用出来る手法ではない。彼は可算や連続濃度を超えた無限集合の存在を実証出来る証明方法を探していたのである。その意味で、**集合論的対角線論法**は理想的な証明方法であったと言えよう。しかし、カントールはこの 4 年後に**往復論法**による新たな証明を編み出す。なぜ、理想の証明法を発見した後に、汎用性が劣る別証明を考える必要があったのであろうか。この疑問はカントールの往復論法[30]の原論文を読めば氷解する。つまり、カントールがこの論文で目指したものは有理数や実数を基数と順序構造から特徴付けることであって、実数の非可算性は全く念頭になかったのである。実際、論文中では実数の非可算性については一言も触れられていない[31]。恐らく、彼の念頭には「連続体仮説」の解決があり、このような有理数、実数の特徴付けもその為の布石であったと考えるのが自然である。

H.J.S　スミス（1826-1883）

測度論的証明の背景はもちろん測度論の構築にあり、実数の非可算性についての意義については、区間縮小法や対角線論法の場合のように強調されていない。この方面の先駆者であるスミスは、有理数の集合が任意に小さな区間に閉じ込められてしまうこと、に気付いており、測度論的証明に肉

---

29 付録 1 の補注を参照のこと.

30 実は、**Cantor 自身は往復論法（back-and-forth method）を完成させていない**. forth 部分だけで済ませているからである. 現在の往復論法を完成させたのは Huntigton の The Continuum as A Type of Order: An Exposition of the Modern Theory (1905)や Hausdorff の 1907 年の論文に遡る. (J.M. Plotkin) [47]

31 しかし、この定理の系として、有理数全体の集合と実代数的数全体の集合が順序まで含めて同形になることを注意している Cantor がこのことに気づいていなかったとは考えにくい. 彼にとっては自明、しかも触れる必要も感じない命題だったのであろう.

薄するがあと一歩及ばなかった[32]。それどころか実質的に証明を完成させたハルナックさえもこの現象を一種のパラドックスとして捉えていた。

カテゴリー定理による証明では、ベールが実関数の分類問題と言うメインストリームを開拓するなかで、傍流として軽く触れられるに留まっている。[33]完全集合の濃度についてもカテゴリー定理の延長線上で決定され、もはや実数の非可算性は触れられてさえいない。[34]

集合論的対角線論法が発表された後、この問題は既に解決済の定理と見なされていたのかもしれない。

R.ベール (1874-1932)

勿論、対角線論法そのものに疑問を抱く数学者は少なからずいたが[35]、少なくともその明解さは圧倒的であり、ある種「決定版」の証明法と見なされていたのではなかろうか。[36]

---

32 付録 14 の補注参照

33 付録 5 参照

34 付録 9 参照

35 例えば、Poincaré、Brouwer. Cantor の仇敵 Kronecker は奇しくも、対角線論法による証明が発表されたこの年 (1891) にキリスト教に改宗して、亡くなっている. ちなみに、Borel は可算集合と連続体は認めていたが関数集合の濃度に対してさえ否定的であったので、対角線論法が証明している内容は「可算個の数があれば、そこに含まれぬ一数を常に定義することができる」(5つの手紙より) ことに過ぎないと考えていた.

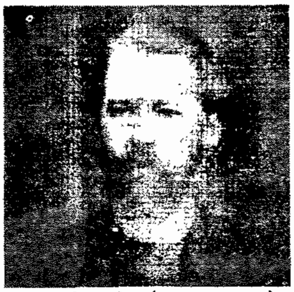
36 集合論が公式に是認されたことは、Hadamard と Hurwitz が解析学に対する集合論の重要な応用を報告した第一回国際数学者会議 (1897) 以来、はっきりしてくる.『ブルバキ数学史』[12]pp.44　そして、第二回国際数学者会議(1900)の Hilbert の講演で決定的となる.

4. 測度論的証明の背景と現在への影響

高木貞治は名著『解析概論』[83]の pp.430 で、次のような言葉でルベーグ積分の特徴を言い表した。

Lebesgue は一片の呪語(じゅご)[37] ‘ほとんど’ をもって、彼の積分論に魅惑的な外観をあたええたのであった。

しかしながら、この言葉を歴史的事実の説明として、不用意に捉えるとするなら、誤解が生じる。なぜなら、**積分論に’ほとんど’を導入したのはルベーグではなく[38]、A.ハルナック[39]だと言った方が実態に近いからである。**ルベーグが歴史的積分論を世に問う 20 年程前の話である。ここでは、ハルナックの仕事をカントールの影響を中心に眺めて見よう。



ハルナック（1851-1888)

1881 年のハルナックの著書『微分積分の基礎』[36]では、カントールを引用するところが 4 箇所ある。最初の pp.14 の脚注では「数の一般的概念」についての参照文献として三角級数論[40]が挙げられており、pp.235 ではカントールによる連続関数に各点収束するが一様収束しない例、pp.259 では前述の三角級数論にある 1 級集合と 2 級集合について言及し、離散集合ではない 2 級集合でも積分論では有限個の離散集合のように除外出来ることに注意している。更に、そのすぐ後に、次のような**零集合のアイデアの萌芽**とも見られるコメントが与えられている。

37 今ではあまり使われることのない言葉である.「まじない、呪文」と云った意味.

38 「現代式の解析学の多くの記述を簡単にするこの魅惑的なことば『ほとんどいたるところ』は本学位論文には登場していない. しかし 2 年後の 1904 年に出版されたルベーグの前掲『積分論教科書』には『測度 0 の集合を無視すれば、(sauf aux points d’un ensemble de mesure nulle)』という言い方で『presque partout」が導入されている. この『presque partout」に関するルベーグの弁がこの教科書第 2 版の pp.179 に脚注の形で述べられている.』『ルベーグ　積分・長さおよび面積』[48]pp.160-161 より引用　付録 12 参照

39 Axel Harnack (1851-1888)は、ルター派の神学者の家に生まれた. 彼の双子の兄は、著名な神学者、Adolf Harnack(1851-1930)であった. Harnack が早い時期から Cantor の数学に理解を示した背景に、彼自身の宗教的環境が影響していたかどうかを検証することは興味ある問題ではあるが本論では触れない.

40 三角級数の収束の一意性に関するもので n 次導集合がその道具として現れる. (Math Ann. Vol.5,1872 [16])

もしも我々が、その長さが2εである$x-\varepsilon$から$x+\varepsilon$の区間を点xの近傍と呼ぶならば、ここでεは任意に小さな有限の大きさであるとするのだが、局所的にある集合のすべての点を（これらの近傍で）取り囲むことが出来る場合、それらは離散集合や多様体の無限個の点集合であると呼ばれ、その（取り囲む近傍の）数が任意に増え得るにも拘わらず、その（近傍区間の長さの）合計は任意の小さな数よりも小さくさせることが出来る。

『微分積分の基礎』（ハルナック）[36]（拙試訳）

最後に、pp.261 では、「離散点集合の導集合がまた無限の点を持つ」ことが、カントールの例[41]によって示されたことをコメントし、同じページで**疎集合（discrete Menge）**[42]を定義している。これは本質的に零集合である。

翌年、1882年[37]には二つ関数が**概ね（im allgemeinen）**等しいと云う概念[43]がⅣ節で導入されている。これこそが実質的な、**「殆ど至る所等しい」の源泉**である。この概念が、「二つの関数が異なる点の集合がどの程度の大きさであったならば対応するフーリエ級数が等しいか」とか「与えられた関数とそのフーリエ係数の収束値とが異なる点の集合の大きさを詳しく調べること」と言った問題意識から生まれたことは、注目すべき事実と考える。つまり、デュガクもホーキンスも明言していないが、**フーリエ級数こそがa.e揺籃の地であった**のである。[44]

この論文[37]ではカントールの1871年[15]と1872年[16]の三角級数の論文[45]がpp.236で引用され、pp.237では、下記の文章の脚注として1872年[16]、1879年[18]、1880年[19]の論文が引用されている.

---

41 Harnack が引用した Cantor の例は紛うことなき天才の技である.（Math Ann. Vol.17,1880[19], pp.358）

42 集合 E が疎であるとは、この集合のすべての点を、長さの総和であらかじめ与えた任意の数よりも小さくなるような近傍の中に含めうること、を言う.

43 付録 6 参照　現代的な表現をすれば「**fとφが概ね等しいとは、どんな$\delta>0$に対しても、$|f(x)-\varphi(x)|>\delta$なる点xの集合が疎となることである.**」とも言えるが、本論ではこの定義は Fourier 級数による関数表現の文脈の中で語られており、一般の二つの関数の同値関係として Fourier 級数から切り離された定義にまでは至っていないように見える.

44 恐らく、彼らにとっては当たり前過ぎて、わざわざ断る必要もなかったのだろう. しかし、冒頭の高木の言葉や、Lebesgue の学位論文において、古代ギリシャの数学者 Archimedes の名前が、積分、曲線の長さ、曲面積の三箇所で引用されているにも拘わらず、一世紀程度前の同じフランス人である Fourier の名前が一度も引用されていないことから、a.e が「面積や体積とは何か」を深く考察する中から自然に生まれたものであるかのように考える人も少なからず居るであろう. ここで、きちんと断っておく必要はあると考える.

45 「三角級数展開の一意性決定すること、どのような条件のもとで三角級数が Fourier 級数になるかを示すこと」についての Riemann の研究を発展させたもの.

第二は、比較的適度な簡潔さを伴った積分計算のすべての命題に最大限の汎用性を付与し得る無限"疎"点集合の概念が結果として形成されたことである．この用語は、カントール、ディニ両氏によって扱われた複数の第1種の点集合[46]を含む．これらは、本質的に、まったく正しくないにも拘わらず、最初にハンケルの論文で示唆され、そしてしばしばデュ・ボワ・レイモンド氏に言及されてきた．

『フーリエ級数論における証明の簡易化』（ハルナック）[37]（拙試訳）付録6参照

上記の文は、測度論の歴史を考える上で実に意味深長な一節である．リーマンの仕事を進めようとした**ハンケルが位相的な疎性を測度論的な疎性と誤認**して導入した概念をハルナックが是正し得たことを述べているからである．**ハンケルのような誤認は彼一人のものではなく、1870年代を通じて多くの数学者に共通するものであったようで、カントールもその中の一人である．**

その後、「第Ⅱ節では、無限級数の"概ね"収束の概念を確立した後、三角級数における係数の消滅と一意確定についてのカントールの命題を含んでいる」ことを明示し、pp.238ではカントールの定理として「 疎集合はどんなに小さな区間においても至るところ非稠密である．[47]」が引用されている。

そして1885年の論文[41]は、次の冒頭から始まる．

一般的な定義、私は線形閉区間を含む疎点集合に対してそれを与えたのだが、一連の解釈を通じて以下の定理を発展させたい。これらの命題は G.カントール氏が同じ主題に対し少し違った定義に基づいて発表したばかりの定理(数学年報　第21巻, 第23巻)の一部を完全にする、そして部分的にはそれらはこれらに一致している。

『点集合の内点について』（ハルナック）[41]（拙試訳）

更に、pp.244 から pp.245 にかけて長大な脚注が付されており、無限論を過程無限と実無限の両方について、ライプニッツとベルヌイの論争からカントールの基数の概念に至るまでの経緯が興味深く論じられている。[48]pp.246 ではカントールの定理「点集合 P の内点は常に点集合 $P^{(\alpha)}$の内点に一致する．」が引用されている。

遂に、pp.242-243 において、**測度論的「実数の非可算性」の歴史的証**

---

46 あるnが存在して$E^{(n)}=\emptyset$であるような集合Eのことを言う．但し、$E^{(n)}$はn次の導集合．

47 原論文 "Die discrete Menge ist in keinem noch so kleinen Intervalle <u>nicht</u> überall dicht." には下線の nicht はなく、意味の通らない「"」がある．「至る所非稠密な集合」とは「どの小区間内の部分にも，それに含まれぬ小開区間の孔がある集合」

48 付録 13 参照．

明を見ることが出来る．明確な命題としては与えられていないが、著者の付した下線部分を見ればこれが実質的な証明であることは明らかであろう。

勘違いを避けるために、私はしばしば、ある意味で、**任意な“可算”点集合は、すべての点を区間で囲むことができて、その（区間の長さの）合計値を任意に小さくできると云う性質を持っている**こと、このことに注目している．それで我々は、例えば、0から1の間のすべての有理数は、それが区間上至る所稠密であるにも拘わらず、その合計が任意に小さい区間に含まれる．なぜなら可算な点集合$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$は長さが$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$で、それらの量をその合計$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n+\cdots$が任意に小さい$\delta$よりも小さくなるように選ぶことができるからである．例えば、このプロセスを上記の有理数の場合に実行し、そしてすべての区間の一つが常にεより小さい直線に過ぎないとした場合は、（この直線が）既に前の区間に該当することはない．最終的に、我々は総和がδよりも小さいばらばらの無限の区間たちで0から1までの長さを被覆する．これらの区間に被覆されない点たちは、実際のところ任意な区間の上で至る所近接しており、しかしその長さが$1-\delta$よりも大きな点集合を形成する．

『点集合の内点について』（ハルナック）[41]242-243ページ（拙試訳）

ハルナックはこの論文[41]中で、次のようにカントールの基数の概念の重要性を強調している。但し、この時点では、実無限は可算集合と連続体しか意識されておらず、昔から良く知られた**「離散と連続」が基数の概念によって整合的に区分**されることに興味をもっているようにも見える。

カントール氏によって導入された無限理論における基数の概念は寧ろ究極的に重要であると考えられる．そして、我々の見るところ、関連する同値な二つだけのクラスが可算集合と連続体（その次元に無関係）における点集合であると云う結果はとても興味深くて価値があり我々の知見を豊かにしてくれる．

『点集合の内点について』（ハルナック）[41] 脚注（拙試訳） 付録13参照

このようにハルナックによる積分論発展の流れを眺めると、その背景にカントールの影響がはっきりと見えるであろう[49]。ただ、よく言われていることだが、カントール自身は測度論に於いて決定的に有効な概念である零集合のアイデアを思いつくことは出来ず、位相的な概念である導集合か

---

[49] 当然のことであるが、Harnackが影響を受けたのはCantorだけではない．Hawkinsも指摘しているように、この証明の技術的な部分はHankelの影響が見て取れるし、そのHankelの仕事はRiemann関数の考察に由来している．[43]pp.31,64

らリーマンの積分論を発展させようとした。また、測度の定義も正鵠を外し、到底そのままでは使用出来ないものを提示した。[50]これは現在の眼から見ればミスリーディングであったと言わざるを得ない。[51]しかし、彼の測度論への取り組みはハルナックをはじめ、ペアノ、ジョルダン、ボレル等の研究者達によって軌道修正され、最終的にはルベーグで一渉り完成する。また、彼自身もカントール集合[52]を生み出すことで、測度論に本質的な貢献をし得たのであった。

さて、測度論的証明そのものの現状についてであるが、調べた限りでは、この証明方法を明記している著作は少なく、入門書レベルでこの証明を載せているのは『解析入門』[72]、『集合論・入門（無限への誘い）』[69]あるいは『数学とはなにか』[28]くらいしか見つけ出せなかった。探せばもっとあるのだろうが、数が少ないことは間違いあるまい。著者は、市場に出回っている書籍にある実数の非可算性の証明の 9 割以上は対角線論法であろう、と見ている。**小平邦彦氏**はこの対角線論法を評して、「簡単明瞭であるが、**何かうまく言いくるめられた感じがしないでもない。**そこで別証を考えて見る。(「数学の学び方」[71]より)」とされ、測度論的証明を自著『解析入門』[72]に書き記されている。更に、「これで実数全体の集合 R が非可算であることの別証が得られたのである。**別証は対角線論法による証明よりも面倒であるが、うまくいいくるめられたという感じは**

---

[50] これに対して Cantor は、一挙に空間 R^n に身をおき、有界集合 E と $\rho>0$ とに対して、E との距離が $\leqq\rho$ な点からなる E の近傍 $V(\rho)$を考え、$V(\rho)$の《体積》の下限をとる．この定義では、ある集合の《測度》は、その閉包の測度と等しく、その結果特に、共通点を持たない二つの集合の合併の《測度》が、それぞれの《測度》の和より真に小さくなることもある．『ブルバキ数学史』[12]pp.258－259

[51] このような**二つの位相的疎性（nowhere dense、the first species sets）と測度的疎性（null set）の混同が 1870 年代を通**じて、**数学界全体にあった**ことは特筆すべき事項であろう．例えば Hankel は nowhere dense ならば、今風に言えば、測度が零になると信じていたし、Harnack にしても、位相的密性（dense）であるにもかかわらず、測度的疎性（null set）になり得ることに大きな違和感を感じていた．著者は 30 冊程度の測度論のテキストを瞥見したが、測度が正値な全疎集合(nowhere dense)の存在について触れているものは一割程度であった．ただ、その反例には、なぜか「ハルナック集合」と云う名称が付されていた．(例えば、[90],[84]) 個人的見解ではあるが、歴史的に初めて発表した H.J.S. Smith (1875 年) とこのような集合を利用して原始関数は存在するが不定積分の存在しない例を構成した Vito Voltera (1881 年) 及び三進表示を発見し測度が零なのに実数濃度であることを発見した G.Cantor(1883)に因んで、Wikipedia で定義されているように、SVC 型集合とでも命名しておくことが望ましいように思う．ちなみに、Volteraの例は Lebesgue と Baire の両学位論文にも引用されている．付録 5、付録 14 の補注参照

[52] 1883 年秋に発表された論文の第 5 部の注釈に現れる．「濃度」だけでは積分を統制し得ないことを Cantor 自身も気づいていて、「Grosse(測度)」(1883 年夏　第 4 部で定義された) の必要性を感じていたようだが、この後、彼の興味は一般集合論に向かい、この問題を掘り下げることはしなかった．付録 15 参照

ない。別証によりRは非可算であるだけでなく、Rの可算部分集合はRの極めて小さい部を占めるに過ぎないことがわかる。(同上)」と、してこの別証明[53]の持つ意義を力説されている。

5. カテゴリー定理による証明の背景にある思想

カテゴリー定理を証明したベールは19世紀末期から20世紀初頭にかけて数学史に大きな足跡を残したフランス経験主義の代表的数学者の一人である。ここでは、フランス経験主義がコントの実証的精神から受けた影響を指摘した上で、彼らの目指した数学を具現性、指名可能性、所与性をキーワードとして瞥見する。併せて、フランス経験主義の影響を強く受けて生まれたモスクワ学派、ポーランド学派の人々の指向性についても簡単に触れることで、この当時の数学者の目線の一端を浮き彫りにしたいと思う。

このような当時の価値観の背景が明瞭になれば最終節に取り上げるブラウエルの証明した命題「完全集合が連続濃度を持つ」の方が、ベール流の「完全集合が非可算濃度を持つ」よりも魅力的に映った理由も明確となるであろう。

フランス経験主義の思想的背景にはルネ・デカルトとオーギュスト・コントがいた。特に、後者の実証主義は19世紀末のフランス哲学の主流であり、フランスの文教政策そのものもコントの哲学に則っていた[54]ことは特筆に値する。つまり、フランス経験主義者達が表立って引用していなくても、彼らはコントの思想を、空気のように纏っていたと考えられるからである。[55]コントの哲学の枢要は有名な「三段階の法則」と「分類の法則」

---

53 付録2参照　また、Borelが別の方法で「Rの可算部分集合はRの極めて小さい部を占めるに過ぎない」ことを示しているが、この証明ほど明快ではない．付録3(4)参照

54 B.Belhoste[7],pp.371-400.

日本ではKant、Hegel、Nietzscheのようなドイツ系の哲学の方が、A.Comte、JS.Mill、H.Spencerのような実証哲学よりも重要視されている傾向があるが、これは必ずしも世界的な動向ではない．日本においても、明治初期にはかなり異なった状況を呈していた．自由民権運動の思想的支柱はSpencerの思想であったし、明治政府も日本の諸制度の改造について何度か彼に意見を求めている．哲学と云う用語を創案した西周が哲学の範としたのはMillらの実証哲学であった．現在のドイツ哲学の優位は、明治20年頃に、井上哲次郎らが実証哲学を批判し、ドイツ哲学を喧伝したことの名残ではないかとも言われている．

55 例えば、「イギリス人は力学を実験科学として教授している．大陸では力学を多少の相違はあっても、いつも演繹的な、そうして先天的な科学として叙述している．ただしいのはイギリス人で、それはいうまでもない．」『科学と仮説』[55]pp.118

「私にとって分析とは、おおむね観察の科学だ．私から見ると分析家たちは、心の目で世界

にあるが、分けても前者はフランス経験主義者達の思想的基盤を与えていたように思われる。

コントによれば**人間精神は神学的、形而上学的、実証的と云う三つの段階を経て進歩**し、これらの進化の最終形である実証的精神の特徴は「現実性」、「有用性」、「確実性」、「正確さ」、「建設能力」、「相対性」にあるとしている。ここではこの差異や関係について詳しく考察することは行わないが、実証的研究について、フランス経験主義への影響が推察される三つのポイントについて触れておこう。

A.コント（1798-1857）

<1> 絶対的真理ではなく観察に基づいた相対的法則の追求

一言で言えば、人間の知性の成熟期を示す根本的革命とは、本来いかなる分野についても決定の不可能な、いわゆる「原因」を追求することをやめ、その代わりに「法則」、すなわち観察された諸現象間の恒常的関係のみを追求することにある。・・・・・・・・

実証的研究は、本質的には、事象の最初の起源や最終の目的などを発見することを断念し、存在するものをすべての分野で系統的に評価することに限られるべきであるが、それだけではまだ十分ではない。実証的な現象研究は、決して絶対的になってはならないのであって、常に人間の内的組織や外的状況に対して「相対的」でなければならない。

『実証精神論』（A.コント著、霧生和夫訳）[77]pp.156-157

<2> 計算と経験の重視

老練な精神は、二つの方法しか用いぬはずである。それは計算と経験である。与えられた原理から生ずる結果については計算を用い、法則の決定を左右するような事実に関して経験を用いる。宿命的に誤謬に導く、かの勝手気ままな想像などは最早行われない。我々の精神を誤多き無益な考察に没し去る、かの先天的推理なども最早行われない。

『フランス哲学思潮』（アンドレ・クレソン著、川口篤訳）[29]pp.382

<3> 有用な知識の追求

この意味では、「実証的」という根本語は、無用に対立する「有用」を意味する。この場合には、実りのない好奇心を無意味に満足させることではなく、個人および集団としての人間の真の条件を不断に改善するという、あらゆる健全な思索の必然的目標を哲学的に表現す

を自然と同じように、自分の外にあるものとして観察する人びとだ. その世界は決して彼らが創造したものではなく、彼らのそこにおける存在の必要性は、動物や植物と同様なのだ. だから、主観的な世界の探求は、洞察、つまり現実世界への概観を許容することになる.（エルミートがミッタグ・レフラーに宛てた1880年12月24日の手紙より）」『無限とはなにか』[35]pp.47

るものである。

『実証精神論』(A.コント著、霧生和夫訳) [77]pp.178

これらの実証主義のテーゼは現代を生きる我々の眼から見ても極めて妥当なものとして映るのではなかろうか。一方で、時代的には40年以上も後に書かれたカントールの以下の言葉の神学的・形而上学的な響きには驚かされる。

すなわち、我々は実無限を問題の三つの主要な関係の中に位置付けることが出来る：第一の場合はこの世を超越した全能なる神や能産的自然の永遠性であり、それは絶対的と呼ばれている.第二にそれが所産的自然の中で具体的に顕在化する場合、私はそれを超越的と呼ぶ.そして第三に、実無限は問題に対して抽象的に考察される、すなわち、実無限の形態に対する人智がない限り、あるいは私がそう呼んだように、超限数やより一般的な形態である超限順序型（想像可能数や直観可能数）として受け入れることが出来る.

『実無限に関する様々な立場について』[23] pp.224-233　(拙試訳) [56]

私が点集合論を研究するのは，単なる知的興味だけではない．それは数理物理学への応用を期してのことである．…… 私は自然現象を理論的に取扱うについて，今日行なわれている普通の仮説に対しては大いに不満である．理論物理学者は窮極的な「原子」に大きさを認めるか否かについて，まず立場をきめるべきである．私は躊躇なく，真正純粋の「原子」は実無限数(今日の超限数）で表わされるべきもので，空間的には完全に拡がりがなく，厳格に点状をなすものだと考える．…… この考えの実現のためにこそ，点集合論は必要である．ここでいう「原子」は，ライプニッツに従って「モナド Monaden」または「一者Einheiten」と名づけたい．そして物体質料(Körpermaterie）とエーテル質料(Äthermaterie)という2つの異質な質料に対応して，「物体モナド(Körpermonaden)」と「エーテル・モナド(Äthermonaden)」の2種類のモナドがあるとして，それによって自然現象を説明していきたいと思う．…… 私は多年，物体質料は物体モナドの集合として可算濃度であり，エーテル質料はエーテル・モナドの集合として第2級の濃度(彼の頭の中では恐らく連続の濃度）をもつ，との仮説を心の中にあたためてきた．詳しいことは後日述べるが，以上のことを仮定すると，各時刻における物体質料は，空間的な像として或る可算点集合Pで表わされ，エーテル質料は，同じく第2級濃度の点集合Qで表わされると考えられる．そしてPやQを孤立集合，自己稠密集合，完全集合などに分けることに対しては，気態・液態．固態の別，化学的差違，光，熱，電気，磁気などの現象などが然るべく対応するに違いない．

---

[56] 能産的自然（natura naturans)、所産的自然（natura naturata）と云う言葉は、中世の Averroes に由来し、Spinoza が明確な区分を与えたもので、自然の位置づけの二重性を表す．神を能産的自然とし、現象世界を所産的自然と捉える．Cantor は哲学的には Spinoza の影響をかなり受けていた．
付録15も参照のこと

……

『次元空間の点集合の種々の定理, 第 2 報』 (村田全訳) [96]

フランス経験主義者達はコントの指導原理に基づいて、どことなく中世のスコラ哲学の馨りのするカントールの集合論を数学にとって「有用な」実証的集合論へと進化させようとしたのではなかろうか[57]。実際、比較的早い時期から、彼らは測度論や関数論に集合論の一部を応用し、成果を収めている。

それではフランス経験主義では、どのような数学が実証的なものと考えられたのか。ここでのキーワードは **effectif** である。

フランス経験主義では、数学の対象には「真に存在するもの」と「仮想的なもの」があって、数学は前者を探求すべきであると主張する。従って、「数学に於いて真に存在するものとは何か？」が重要な問題となってくる。

ボレルは**具現性（effectivement）**をもって存在するものが、真に存在するもので、仮想的に存在するものとは単に言葉の上で存在するに過ぎないとする。素朴集合論に現れるパラドキシカルな集合は仮想的存在として排除される。超限順序数でも可算の第 2 級順序数[58]は認めるが、それ以上の順序数は考察の対象から外している。[59]「有限個の言葉によって精確に定義された」ものこそが具現的に定義されたものであり、彼の名を冠する「ボレル集合」[60]はその思想を体現したものと言えるであろう。ルベーグにより「ベール関数」は丁度、その双対的関係に位置付けられ、やはり具現性を持った対象と見なされた。

一方、**ルベーグ**自身は**指名可能性**をもつものが、真に存在すると考えた。

ある対象は、有限個の言葉が、その対象だけを表すのに使われたとき、定義されたといえる。そのような場合こそ、その対象の固有性が「名づけられた」と言える。

ルベーグ（1905 年）『無限とはなにか』[35]pp.81

---

57 Hermite と Poincaré は Cantor の論文のフランス語訳を行うことを推薦していながら、一方で、論文の哲学的な箇所を省略するように提案している. それどころか、何箇所かの数学的な部分でさえも形而上学的に映ったようだ.「高次の無限は、実体のない空気のゆらぎのような形態で、フランス的な精神とは相いれない.(Poincaré)」『無限とはなにか』[35]pp.49

58 $1,2,3,\cdots,n,\cdots,\omega,\omega+1,\cdots,\omega^2,\cdots,\ \omega^{\omega},\cdots\omega^{\omega^{\omega}},\cdots\ (<\Omega)$

59 それどころか Liouville の超越数のように、具体的に計算可能なものでさえ、数学への「実効性（effectivité）」に疑義があるが故に effectif とは見なしていない. 一方、シェルピンスキーはこれを effectif とみなした. 付録 17 参照

60 彼に依れば、最も基本的な集合は有理長方体で、最も基本的な演算は σ 算法($\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$)と δ 算法($\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$)である. 従って、有理長方体に σ 算法と δ 算法を繰り返して得られる Borel 集合こそは「精確に定義された集合」と云うことになる.

また、ベールは、**対象が実際に与えられていること『解析学のある立場』[71]**が、真に存在するために必要な条件であると強調する。従って、この点からツェルメロの整列可能定理の証明を強く批判し、具現的に与えられる関数は第1級のベール関数である、とした。つまり、構成的処理が極めて困難な第2級以上のベール関数は具現的とはみなさなかった。

このようにフランス経験主義者達にもそれぞれ個性があるが[61]、概して、カントールの順序数や選択公理のような超越的概念、操作は忌避され、解析学に直接的に有用な点集合論を発展させる方向に向かっていった。この延長線上の有力な数学的沃野の一つに記述集合論[62]があった。

フランス経験主義の思想はフランス本国での停滞とは裏腹に、モスクワ学派とポーランド学派に受け継がれて深化していく。この辺りの様子は、物語的ではあるが、『無限とはなにか』[35] や『無限からの光芒』[78]が判り易い。

ただ、『無限とはなにか』のように、この停滞の理由を「フランスの極度に論理性を重んじる伝統のせい」だけとするのはいささか説得力に欠ける。ここでは、もう少し別の視点、第一次世界大戦(1914-1918)の影響、からこの問題を捉えた方がよかろう。

マシャルは「1911年から1914年までに入学した数学専攻のノルマリアンの約半数が戦死した。[63]」『ブルバキ　数学者達の秘密結社』[51]pp.67と云う恐るべき事実を伝えているが、これはフランスの数学者の予備軍がまるまる一世代消失してしまったことを意味する。モスクワ学派、ポーランド学派の代表的な数学者たちと初期ブルバキメンバー、前ブルバキ世代の数学者たちで生年が 1869~1909 の者を次頁の表[64]にしてみたので、読者はゴシックにした 1885~1898 生まれ(第一次大戦勃発年に29歳から終戦年に20歳）の数学者の他の年代に比較した分布状況を確認して見て頂きたい。

---

61 Lebesgue<Borel<Baire の順に具現性の定義が厳しくなる．(『実関数論』[74] pp.91)

62 教科書的な表現をするなら、記述集合論とは、ωやR及びその定義集合について研究することを主目標とする現代集合論の一分野であり、その動機付けに眼を向けると、解析学への貢献を考慮にいれて展開される集合論とも言える．

63 運よく生き残った数学者の中に Paul Lévy と Gaston Maurice Julia がいるが、前者は開戦の年から3年後に病気で倒れるまで高射砲部隊に従軍し、後者は戦争で鼻を失い、生涯覆いを付けて暮らした．このような例からも、「半分は生き残ったのだから、この世代の数学者が半分になったに過ぎない.」と考えるのは単純過ぎるように思われる．

64 人選はかなり恣意的であり、例えば、Smirnov や Vinogradov をモスクワ学派に入れるのは異議があるだろう．しかし、ここでの目的にはそれは本質的ではないと考え、「等」とした．

前ブルバキと初期ブルバキ世代のフランス数学者	モスクワ学派　等	ポーランド学派
E.カルタン(1869-1951)	エゴロフ(1869-1931)	ウカシュヴィッチ（1878-1956)
ボレル(1871-1956)	フロレンスキー(1882-1937)	ニコディム(1878-1974)
ベール(1874-1932)	ルージン(1883-1950)	シェルピンスキー(1882-1969)
ルベーグ(1875-1941)	スミルノフ(1887-1974)	ヤニシェヴィスキ(1888-1920)
フレッシェ(1878-1973)	ヴィノグラードフ(1891-1983)	マズルキェヴィッチ(1888-1945)
ファトウ(1878-1929)	ベシコヴィチ(1891-1970)	シュタインハウス(1887-1972)
ヴィラ（1879－1972)	ススリン(1894-1919)	ルジェヴィッチ(1889-1941)
ダンジョワ（1884-1974)	ヒンチン(1894-1959)	バナハ(1892-1945)
P.レヴィ(1886-1971)	アレキサンドロフ(1896-1982)	クナスター(1893-1980)
ジュリア(1893-1878)	ウリゾーン(1898-1924)	カッチマジ(1895-1939)
S.マンデブロー（1899-1983)	リュステルニク(1899-1981)	クラトフスキー(1896-1980)
デルサルト(1903-1968)	ラブレンチェフ(1900-1980)	サクス(1897-1942)
H. カルタン(1904-2008)	ペトロフスキー(1901-1973)	シャウダー(1899-1943)
クーロン（1904-1999)	ニナ・バリ(1901-1961)	ツィグムント(1900-1992)
エーレスマン(1905-1979)	ノビコフ(1901-1975)	タルスキー(1901-1983)
ポッセル(1905-1974)	コルモゴルフ(1903-1987)	アウエルバッハ(1903-1942)
ベイユ(1906-1998)	シュニレルマン(1905-1938)	オルリッチ(1903-1990)
デュドネ(1906-1992)	ティホノフ(1906-1993)	ボルスク(1905-1982)
ルレイ(1906-1998)	ゲルファント(1906-1968)	マズール(1905-81)
エルブラン(1908-1931)	ポントリャーギン(1908-1988)	ウラム(1909-1984)
シュバレー(1909-1984)	ソボレフ(1908-1989)	シュライエル(1909-1943)

デュドネは「戦死した若い数学者が、ポアンカレやピカールの仕事を続けるべきであったのだ。」と、語っているが、このポアンカレとピカールの名前をルベーグとベールにすることも勿論可能であろう。彼は続ける、「我々の年代はこの 15 年にわたる断裂を痛感した。我々の教師達はいずれも 20 歳から 30 歳より年長で、彼等はその若い頃の数学はよく知っていたが、新しい理論の知識は教えてくれなかった。しかし、数学では教師がその学生よりも高々10歳､多くても15歳しか年長でない場合に初めて、その時代の数学をうまく教えることができるのだ。」

他のヨーロッパの国でも同様であったと思われそうだが、例えば、ドイツでは事前に「エリート達」を保護して前線には行かさないようにしてい

たらしい。[65]アンドレ・ヴェイユは自伝のなかで、フランスの「間違った平等の概念」によって惨憺たる結果を招致したと記している。

さて、フランスに留学し、ボレルやルベーグから集合論を学んでいたエゴロフとルージンは、フランス経験主義の影響を強く受けつつも、フランス経験主義者達が忌避したカントール直系の無限をより前面に出した数学を発展させ、モスクワ学派を創設した。科学史家のローレングラアムは、その著書『無限とはなにか』[35]において、このような両者の対応の差の底流に、エゴロフとルージンの両者が異端扱いとなった賛名派の信者であったことを挙げているのは、いささか眉唾ではあるが、興味深い。少なくとも、次のルージンの言葉[66]などは単なるルベーグからの影響を超えて、賛名派のドグマが紛れ込んでいるように見えなくもない。

「命名」に関する定義が存在することがきわめて望ましいのだが、それは現在では不可能のようだ。私は以下のことを提案する。

名づけるとは、個別性を与えることを意味する。「個体」という概念は根源的なものだと思えるから、これは自然な定義づけだと思われる。だからこれにはさらなる定義は必要ない。だが、実例を見ると、困難が生じてくる。

ルージン(1915 年)『無限とはなにか』[35]pp.332

ワルシャワ生まれの、**シェルピンスキー**[67]は 1914 年（32 歳）に帝政ロシアによって捕えられ、モスクワに送還されたが、そこでエゴロフとルージンの計らいにより、数学の研究をすることが出来た。4 年後、ルブフに戻った彼は、同年、新生ポーランドのワルシャワ大学で専任教授となり、ポーランド学派を開く。1 年年下のルージンとは共同研究を通じて長く交流が続いた。彼はロシアの数学者たちとは胸襟を開いて研究することが出来たが、祖国ポーランドを支配していたロシアという国に対しては反感を憶えていた。彼の処女論文は本人の強い意志でロシア語の雑誌への掲載は取り下げられ、少し遅れてポーランド語の学術雑誌に発表された．第二次

---

65 前ページの数学者の表をドイツについて作ることはそれ程難しいことではないが、1885~1898 生まれの主なドイツの数学者を掲げるに留める．その陣容を見れば著者の主張を裏付けていることが容易に見て取れよう．ただ、このような話は程度問題であり、例えばジーゲルなどは戦線に送られている．
ワイル(1985-1955), グレーリング(1986-1942),ヘッケ(1987-1947),クーラント(1888-1972), ジーゲル(1896-1981),アッカーマン(1896-1961),ハッセ(1898-1979) ,ベーンケ(1898-1979) , クネーザー(1898-1973)

66 後に、彼は Suslin とともに解析集合を発見し、指名可能な集合は解析集合である、つまり解析集合は具現的であるとの立場を取った．

67 具現性や非具現性の具体例については、付録 17 を参照せよ．

大戦中、1944 年の暴動のとき、彼の自宅はナチスによって焼かれ、蔵書も破壊された．彼自身も投獄されるのだが、幸い連合軍によって解放された．反骨の人だったのだろう．彼の碑文は、本人の要望で、「無限の追究者」[68]となっている。

『無限からの光芒』[78]によると、クラトフスキの大著について次のような意味深長な所見が与えられているが、彼がポーランド学派に属していたことを考え合わせると得心が行くであろう。

《Topologie》のどの章を見ても、位相空間の公理から、全く抽象的に、人工的に作り上げられていく位相空間の例など一つも挙げられていない。このような例をたくさん作ってみせることなど、クラトフスキにとっては易々たるものであったろう。しかし、彼は、抽象数学のもつ抽象性を、そのような方向に向けようとはしなかった。彼の感覚では、有限次元または無限次元のユークリッド空間の中にある点集合は、汲みつくせぬような複雑さをもった数学的実在であり、それに較べれば、単に抽象性だけを意図して作られた位相空間など、脆い、頼りない存在にみえたに違いない。　　『無限からの光芒』(志賀浩二)[78](pp.51-52)

とりとめもなく、フランス経験主義、モスクワ学派、ポーランド学派の人々の一部の声を拾い上げたが、選択公理に対する警戒心、あるいは不信感[69]、及び構成的・具現的[70]・表現可能・指名可能なものに対する偏愛が見て取れるであろう。カテゴリー定理の背景には、カントールによる数学そのものの枠組みに対する革命的な変革とそこから生まれ出た鬼子のような「数学の危機」を肌感覚で知っている当時の数学者たちの、明らかにそれ以前の数学者たちとは異なる「意味のある数学」(価値のある数学ではない！)に対する模索の跡が窺われる。それは、抽象数学を当然のものとして受け入れて学んだ現在を生きる我々とも異なる具体性への強いこだわりとして顕現していた。

---

[68] Badacz Nieskończoności

[69] 三学派の数学者が全員選択公理を拒否したというわけではない．個人差もあるし、同じ人物でも時期によって変化している．少なくと、それまで無意識に使われていたものを意識にのぼらせ、素朴な直観に反する結果を世に知らしめたのは彼らの功績であろう．

[70] effectif の訳語として「具現的」を採択されたのは**近藤基吉**氏(1906－1980)である．氏は数学基礎論の草分け的存在で、戦前(1938)に発表された「近藤の一意化定理：補解析集合は補解析集合によって一意化できる」は Lusin の予想を覆す画期的な結果であった．氏は『フランス経験主義の数学』の立場から『解析学の基礎』を展開しようとされ、はっきりと『公理主義の数学』の立場ではないことを「解析学のある立場」[76]で明言されている．著者は、1958 年当時に優れた基礎論学者が堂々とこのような発言をしていたことを知って、大変驚いた．この時期、既に、数学の基礎をめぐる論争では、実質的に、Hilbert の形式主義が勝利していたと言われており、公理主義はこの形式主義と密接な関係にあったからである．

6. カントールの基本定理（Cantorsche Haupttheorem）

カントール・ベルンシュタインの定理は集合論の教科書ならば必ず扱われる定番の定理であるが、**カントール・ベンディクソンの定理**[71]を載せている集合論の教科書は、少なくとも日本では、少数派ではなかろうか。しかし、20 世紀初頭、この定理はカントール数学の中心的な存在と見なされていた。実際、位相空間論の成立に決定的な影響を与えたと言われているハウスドルフの『集合論概要』(1914) [42]では、この定理は **Cantorschen Hauptsatz** と記されており、ブラウエルも 1909 年の論文[72]やフランケルへの 1927 年の手紙[73]で**カントールの基本定理**と呼んでいる。現代関数解析の嚆矢と言われるフレッシェの学位論文を補完する 1910 年の論文[34]も、中心テーマの一つはカントール・ベンディクソンの定理を無限次元空間に拡張することであった。

この定理は現在でも記述集合論の教科書の最初の章に提示されることが多く[74]、その古典的な重要性は既に定着しているとも言えよう。この定理への途中段階で「ベール流」の命題[75]に似た次のような定理が提示されている。

定理. C**をカントール集合とすると、任意の空でない完全ポーランド空間** P **に対し、連続単射** $f: C \to \mathrm{P}$ **が存在する．特に** $\mathrm{Card}(\mathrm{P}) = 2^{\aleph_0}$**.**

この定理は任意な完全完備な可分距離空間が実数濃度を持ち、しかもカントール空間を内部に持っていることまで主張している。単に、完全完備な距離空間が非可算であることを保証する「ベール流」の命題よりも情報量が多い。取り分け、一般の数学者が取り扱うことが少ない一般非可算無限よりも、強い実在性を感じ得る実数濃度に限定出来ることはかなり魅力

[71] Cantor-Bendixson の定理：ポーランド空間において、Aが閉集合ならば、$A = P \cup S$ である．ここでPは完全集合、Sは可算集合でありかつ$P \cap S = \emptyset$であるとする．更に、そのような分解は一意的である．

[72] 付録 7 §2 参照.

[73] 1927 年 1 月 12 日の Fraenkel への手紙の中で、「Cantor の基本定理は完全に分解可能な点集合に対しては "明らか" であるが、一般的な点集合に対しては成立しない。基本概念の "漸進的精錬" 以外に成す術がない。」と書いている。彼のこの定理に対する興味は一時的なものではなかったのであろう。

[74] 例えば、『Descriptive Set Theory』[53] pp.50, 上記の定理は pp.12

[75] 付録 9 参照.

的である。

また、古典的な集合論の教科書の中には、次のような「ベール流」の命題をも完全に含んだ、より完全な形の定理を掲げているものもある．[76]

定理．すべての完全な完備距離空間<X,d>はカントール集合を含む．これより$|X| \geq 2^{\aleph_0}$．選択公理の使用は<X,d>が可分な場合は必要ない．この結果、<X,d>が完全ポーランド空間ならば$|X| = 2^{\aleph_0}$である．

このように、定理の内容に限定するならば「ベール流」に利するところはない。しかし、次節で再説するが、これらの定理はカントール集合が実数濃度であることを事前に証明しておく必要があり、従って、これらの定理の系として実数の非可算性の証明は出来ないことを注意しておく。

さて、これらの定理の延長線上にカントール・ベンディクソンの定理があるのだが、そもそもこの定理の動機付けは、カントールが終生の問題とした連続体仮説の証明への戦略的な足がかりと云う技術的側面もさることながら、根本的には連続体[77]と云うものの本性を解明することだったのではなかろうか。更に言えば、それは無限概念を離散と連続に峻別すると云う、潜在的には古代ギリシャ以来の発想に由来する問題意識かも知れない。実際、ハルナックにも同様の傾向が垣間見えた[78]。また、カントールの脳裏には、そのようないにしえからの歴史的難題に終止符を打ちたいと云う野心と伴に、天才リーマンへの憧憬があったかもしれない。村田全氏はこの辺りの状況を次のように分析する。「…、これはリーマンの思想に対するカントルなりの反響かもしれない。リーマンは『幾何学の基礎をなす仮説』(1854) の中で，自然数による数え上げで定まる離散的多者と，測定によって定まる連続的多者とを区別しているが，カントルは離散的多者を無限集合の彼方にまで拡大して，その二つを濃度という「量」によって統一しようとしたと見られるからである。」『カントルにおける数学と哲学』[97]　カントールは、自らが発見した濃度と云う武器によって、仰ぎ見るリーマンの思想に共鳴しつつもそれを乗り越えたいと渇望していたのであろう。

---

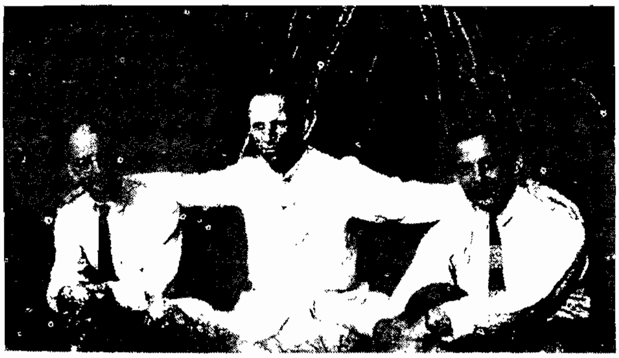
76 例えば、『Basic Set Theory』[4] pp.226

77 **Cantor は連結な完全集合を連続体と呼んでいた．**

78 付録 13 参照

しかしながら、現代の眼から見ると、カントール自身の連結性の定義[79]が適切なものではなかったことや、三進集合のような疎な完全集合の存在[80]から、カントールの連続体の定義付けは必ずしも成功したとは言い難い。

このような状況にあって、彼に続く数学者たちがそれまではどちらかと言えば哲学的な問題であった連続体の本質論を、カントールの点集合論によって、数学モデルの理論として取り扱い、数学の問題としての回答を得ようとすることは極めて自然な成り行きであったと言わざるを得ない。実際、20世紀に入ってからであるが、カントールの点集合論の嫡嗣と目されるハウスドルフ(1914)が、連結な距離空間が連続濃度を持つ、ことを示し、ウリゾーンがこの問題をより広い位相空間のクラスに対して決定することを問い、彼の人生最後の論文において次のような結果を提示することで一応の解決[81]を与えている。



アレキサンドルフ、ブラウエル、ウリゾーン
(1896-1982) (1881-1966) (1898-1924)
アムステルダムのブラウエル邸の庭にて、1924年

定理A：少なくとも２点を含む連結な正規空間の濃度は≧ℵである.

---

79 現在の用語で言えば一様弧状連結に相当するものと思われる. 付録15参照

Katz は Cantor の連結性の定義が位相的ではなく、距離に基づくものであることに注目し、Young 夫妻の著書『The theory of sets of points』で位相的な定義が試みられたことの意義を強調する. 更に、Hausdorff の教科書で現代的な位相の定義が与えられていることにも触れられているが、連結性の現代の定義の発案者については全く言及されていない. 本論から少し外れるが、100年後もおそらく使用されている可能性の強いこの基本概念の定義を与えた研究者は **N. J. Lennes** (1911) [50]であり、示唆したのが Jordan(1893)[44]であることを明記しておきたい. 詳しくは Zitarelli の論文[67]を参照のこと.

80 付録15参照

81 Urysohn の最後の論文の表題は "Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen" (連結集合の濃度について)[65]で、定理Aはここで証明されている. 彼はこの論文提出の日付の3日後、1924年8月17日、Alexandroff と遊泳中に溺死する. この辺りの状況や、Alexandroff の衝撃、悔恨について『無限とはなにか』[35]に詳しい.

また、志賀浩二氏はいくつかの著書 ([79], [80], [81]) でこの問題に触れ、その重要性を強調されている. 私見ではあるが、Hausdorff の著書が第一次大戦勃発の年(1914)に発行されたことや、終戦時(1918)の Urysohn の年齢 (20歳) を考慮した上で、彼の論文を読むと、Hausdorff の結果から、勿論彼の天賦の才を前提としてだが、殆ど必然に近い形でこの問題は形成されているように見える. そして、その底流には、ギリシャ以来綿々と続く離散と連続体の対立についての、Cantor の問題意識が確実に脈打っており、彼の距離付け問題もこの問題意識の延長線上にあったのではないか、と推察している.

ここではウリゾーンの論文の最初の下りを紹介しておこう。

1. 問題. ハウスドルフによると、一つの位相空間が、交わりが空な、二つの部分集合に分離し得ないとき、その位相空間の位置関係は連結集合と呼ばれる. 二つの集合 A,B の交わりがなく、しかも、一方が他方の触点を含まないとき、即ち、$A\bar{B}+B\bar{A}=0$であるとき、我々は二つ集合 A と B を分離されていると呼ぶ. 簡潔のために、我々は集合$A\bar{B}+B\bar{A}$をH(A,B)と表記する. 一点集合は明らかに連結である. しかしながら、この場合を除いて、1点よりも多くの点を含む場合だけに対して、連結集合を考察する. 次の命題はハウスドルフ氏が証明した.

命題. 連結距離空間における点集合は少なくとも連続濃度である.

すべての位相的な結果は純粋に位相的な基盤ーすなわち、位相的条件（距離空間を適切に選ばれた位相空間に取替えること）とそのような手段ーに基づいて証明することが出来るはずであると云う確信から、私は、上記の命題において依然として正しい、位相空間の可能な限り広いクラスを模索していた. 特に、少なくとも第二可算公理を満たす位相空間である場合かそうでない場合かを決定する必要があった.

私はここでこのようにして得られた結果を伝えるつもりである. それらはおそらくまったく予期しなかったものであった.

『連結集合の濃度について』（ウリゾーン）[65]（拙試訳）

如上の連続体概念へのアプローチは、歴史的本流の一つであると考えるが、これ以外の選択肢がなかったわけではない。位相空間論の歴史を紐解けば様々な連続体概念が考察されていたことを知るであろう。ここでは、その中の一つとして、別の角度からの連続体へのアプローチを紹介しておく。[82]

定理 B：集合 M は、コンパクト、連結、局所連結であるとき、かつそのときに限り、I の連続像である.

定理 B はハーン・マズルキー・ウィッチの定理と呼ばれるもので、もともとは 1913 年に、ハンス・ハーンが、ウィーンで開催されたドイツの科学者と物理学者の会議において、必要条件[83]を、翌年、ウィーンの帝国

---

[82] 以下の部分はすべて『空間充填曲線とフラクタル』[57]による

[83] ここで初めて、**局所連結性**が現れた. つまり、この概念は、**集合が I の連続像であるた**

王立協会の会議録で十分性を発表したものに遡る。当時は、35 ページもの長い証明であったが、既述のハウスドルフの『集合論概要』の第 2 版（1927）[42]にあったハウスドルフの定理（あらゆるコンパクト集合は、カントール集合の連続像である）を使うことで、著しく簡易化された。

7. なぜベール流の証明は広まらなかったのか？

表題に挙げたベール流の証明とは 1905 年にベールによって示された定理「完全集合は非可算濃度である」の証明方法を意味する。第 2 節で触れたように、この定理そのものは有名なのだが、現在では前節で述べたようにより精緻な定理がカントール・ベンディクソンの定理の証明途中に現れ、その証明手法は実数の非可算性を前提とするブラウエル流が標準的になっている。ここでは先ず、ベール流の証明の一部を瞥見し、しかる後にブラウエル流の証明が歴史に現れた経緯を概観する。

線分AB上に完全集合Pが与えられ、$\alpha\beta$は少なくもPの1点を内点に含むAB上の区間であるとせよ．一方、MをPの確定された点とせよ．区間$\alpha_1\beta_1$を見つけることができて、この区間は任意に小さな長さで$\alpha\beta$の内部にとれて、Pの 1 点をその内部に含み、Mを含まない．

. . . .

これより、完全集合Pが非可算であることを示している、と言える．

もしPが可算であるとするならば、我々は（Pの）点を次のように$M_1, M_2, \ldots, M_v, \ldots$と整数に対応させて、並べることが出来るであろう．$P$の一点をその内部に含むような一つの区間$\alpha\beta$を考える．$M_1$を含まず、かつ$P$の点を内部に含まない区間$\alpha_1\beta_1$を$\alpha\beta$の内部に見つけることが出来て、同様に、$M_2$を含まず、かつ同様の条件下の区間$\alpha_2\beta_2$を$\alpha_1\beta_1$内に見つけることが出来る．以下同様である．これは無限個の区間を決定する．それぞれ（の区間）はその前に決定された区間の内部であり、$\alpha_v\beta_v$が点$M_1, M_2, \ldots, M_v$を含まないと云う条件を伴って、Pの点を含んでいる．自分自身を $\alpha_v\beta_v < \frac{\alpha\beta}{2^v}$ に制限することで、$\alpha_v\beta_v$が0に近づくと云う必

めの条件として発案されたものだった．

初めての局所連結の定義(1913)：集合 E が点 a で局所連結であるとは、点 a の任意な近傍 U に対して a のある近傍 U′ が存在して、U′ にある E の任意な点 b と a が U に完全に含まれる E の連結部分に横たわっていることを言う;E のすべての点が局所連結であるとき E は局所連結であると言う．『連続函数による区間像について』（H. Hahn）（拙試訳）

現在の局所連結の定義：位相空間 X がその点 p で局所連結であるとは、p の任意の近傍 U に対し、V⊂U となる p の連結な開近傍 V が存在することである．すべての点で局所連結であるとき、X は局所連結であるという．『岩波数学辞典　第 4 版』[91]

須条件を前の条件に追加する.

これらの条件下で、ある点Hが存在する.それは区間たち$\alpha_v\beta_v$の共通の極限点である. Hはすべての区間$\alpha_v\beta_v$の内部にあり、その結果、すべての点M_vと異なる. それは極限点なのでPの点である. Hをその内部に含むすべての区間に対し、ある区間$\alpha_v\beta_v$とその内部にPの点が存在し得る. このようにPは異なる点たち$M_1, M_2, \ldots, M_v, \ldots$を含む. これは仮定に反する. それで、完全集合$P$は非可算である. それ故、それは区間$\lambda$の端点以外の点を含んでいる.

要するに、完全集合は可算では有り得ない;可算集合は完全では有り得ない.

『不連続関数講義』(ベール、ダンジョワ)(拙試訳) 付録 9(2)参照

上記の定理での完全集合は R の部分集合であり、通常の距離を前提にしていることに注意する必要がある. それ故、完備性は条件として明示されていないが、下線部分で使用されている。従って、一般の距離空間ではこの条件が無ければこの定理は成立しない。(付録 9(1)参照) 更に、この下線部の点 H は区間縮小原理によって存在が証明されていることから、この H が非述語的に定義されていることも判る。また、二重下線部分で選択公理が使われていることも明らかであろう。

「完全なポーランド空間が連続濃度を持つ」ことの現代に繋がる証明を考えたのはブラウエルである。1909 年 3 月 26 日の会議で伝えられ、翌年に、彼にしては珍しく英語で書かれた論文[84]で、その結果が報告されている。距離空間の概念は、1906 年に M.フレッシェが導入したばかりであるから、ブラウエルはカントールの点集合論の上で証明を行った。彼は、有界な完全集合μを巧みに二つの完全集合μ_0、μ_2に分割し、それらに対し更に同様の分割を行ってμ_{00}、μ_{02}、μ_{20}、μ_{22}とし、以下同様に分割を続けることで 0 と 2 からなる異なる無限数列とμの点との間に 1 対 1 対応を与えた。そしてこの無限数列をカントール集合に対応させている。この様子を下記のブラウエルの原論文で確認していただきたい。

…この分解の過程で達成される最も単純な様式はすべてのm_kを2に等しく取ることで得られる. それで、第 1 階の分解の二つの(構成)要素がμ_0とμ_2によって表され、第2階のそれらがμ_{00}、μ_{02}、μ_{20}、μ_{22}によって表され、以下同様であるならば、このようなやり方で、異なるμの要素は数字0と2からなる異なる基本列と1対1に対応する. それらの基本列に対し

84 付録 7 参照 ベルリン大学の関係する委員会による Brouwer の業績のまとめでは「ドイツ語に堪能である」と明記されている. なぜ、彼がこの論文を得意であってしかも数学研究では、当時もっとも有力であったと思われるドイツ語ではなく、英語で書いたのかは著者には判らない.

共通して引き起こされた分割が無限に増加するとき、二つの要素（基本列）はそれぞれ収束し、しかもただ一つに収束する．

一方で、0と1の間の実数の線形連続体の中の、無限個の数0と2によって三進システムで表現され得る、これらの数の完全点集合π[85]について考えよう．πの幾何学的型の位数を我々はζによって表現するであろう．

それらの数列に対し共通して引き起こされた分割が無限に増加するとき、πの二つの数列はそれぞれ収束し、しかもただ一つに収束する．

それで、もしわれわれがそのような、μの要素とπの数の間の1対1対応、μのそれぞれの要素に対する添字の列はπの対応する数の数列に等しい、に気づくならば、μの要素の基本列の極限要素はπの数列に対応する極限の数に対応する．それで我々は次のように定式化することが出来る：

定理3．それぞれの完全集合の要素は位数ζの幾何学的型を持つ．

『完全点集合の構造について』（ブラウエル）[14]（拙試訳）

注意すべきは如上の証明ではカントール集合そのものの非可算性が所与とされていることである。つまり、彼の証明は結果だけを見るとベールの命題に似ているのだが、ここから実数の非可算性を証明することは出来ない。一方、ベールの証明ではこのような所与条件は必要ないが、単に非可算性を示し得るだけで、完全集合が実数濃度であることまで保証するような証明方法ではない。

さて、現代の記述集合論や古典的集合論の教科書では、上記の命題の証明はベール流ではなく、ブラウエル流が圧倒的に優勢であることは既に触れたが、更に、ブラウエル流の場合は特徴的な近傍表記、ブラウエル自身は近傍ではなく分割した完全集合たちに対して与えていたのだが、の手法に「ススリン木」と云う用語が付される場合が多い。これは有名な「ボレル集合の射影がボレル集合である。」と勘違いしたルベーグの過誤を指摘したススリン、彼はルージンの学生だった、の論文に由来するものと思われる。確かにこの論文で導入された A 算法は上記のブラウエル流の近傍表記を遥かに一般的にした概念であった。この論文により解析集合という新しいタイプの集合が出現し、同時に「記述集合論」が生まれたと言う数学史家もいる。従って、現行の「記述集合論」の教科書がブラウエル流の証明を使っているのは、ススリンの影響と考えるのが自然であろう。しかし、もしそうだとするならば、数学の世界では「ススリン木」の名前は残

85 いわゆる Cantor の三進集合

すにしても[86]、数学史の世界ではこの名前に付随してブラウエルの忘れられた業績を適切に言及しておく必要はあると考える。[87]

ベール流の証明に基づく実数の非可算性の証明は、抽象空間にどの程度の条件が付与されていれば非可算集合になるか、と云う基本的な疑問に対する回答から導きだされた証明方法であるとみなすことが出来る。その意味では、他の証明にはない効用があり、これまで殆ど省みられなかったことに、著者は当初違和感を覚えた。しかしながら、この問題がカントール・ベンディクソンの定理により、かなり見事な回答が与えられており、しかもその現代的な証明の過程で現れる「完全なポーランド空間（完備可分距離空間と同相）が連続濃度を持つ」が、記述集合論の最も基本的な結果の一つであり、かつベール流の命題よりも優れた結果であったので、ベール流の命題は無視された、と考えれば自然な成り行きであったとも言えよう。

最後に個人的なコメントを付記して、本論を終えたい。

実数の非可算性の証明方法を、簡潔性、応用性、基本性（選択公理の不使用）などの面から、多角的・大局的に見れば対角線論法が最も優れた証明方法なのかもしれない。そう云う意味で、殆どの出版物で、実数の非可算性の証明方法が対角線論法に傾いているのにはそれなりの理由があっ

---

86 彼はこの論文が発表された2年後(1917)、わずか24歳の若さで腸チフスにより夭折する.

87 Moschovakis の著名な教科書[53] pp.85 によると A 算法に類似したアイデアを Alexandroff が 1916 年に 3ページのノート（付録 18 参照）で発表していた、としている.

一方、『無限とはなにか』[35]pp.193-201 では次のようなスキャンダラスな話を暴露している. Suslin が Suslin-木と伴に定義した重要な概念にたまたま「A 算法」や「A 集合（現在の解析集合）」と云う名前を付けたのを利用して、60 年以上後に Alexandroff は自伝のなかで、この「A」は「自分」のイニシャルを指しており、これらの発見に彼が関与していると仄めかした. しかし、彼が公にされることはないと踏んでいた資料、それは Luzin の公聴会で「A 集合に関する業績は Luzin と Suslin に帰することを彼自身が認めた」ことを裏付けるもの、がソビエト崩壊によって公開されたことで、彼の慾深い思惑は潰えた. Loren Graham と Michel Kantor はこの奇矯な行動を指して「彼(Alexandroff)の性格には重大な欠陥があったことを物語っている.」と厳しく切り捨てている.

ただ、Suslin-木との類似性だけに制限して言うならば、Alexandroff のノートには、著者が見た個人的感想ではあるが、Brouwer に肉薄した閃きがあり、Suslin-木の先駆者の一人としても良いのではないか、と感じられた. つまり、Suslin の発見には関与していないが、部分的には独立に先行していたと言えよう.

いずれにせよ、これらの手法や概念の発見には、Alexandroff ほどの傑出した数学者をも惑わせる程の魅力があった. 現代数学における評価はともかくとして、少なくとも当時を知る数学者にとって、これは決して些末な業績ではなかった. 我々はこの辺りを念頭において先駆者 Brouwer を評価すべきであろう.

たのであろう。また、他の別証もそれぞれの特徴と利点を併せ持っていることは既述の通りである。

既に、これだけの優れた証明があるにも拘わらず、徒に、別証明を求めるならば不毛な努力との誹りを甘受せざるを得まい。著者自身も、何か斬新なアイデアを内包しているか、歴史的な価値を付与するものでない限り、101 番目のピタゴラスの定理の証明を与えることに、趣味性以上の意義を感じることはない。

一方で、ガウスが単なる趣味で平方剰余の相互法則や代数学の基本定理にいくつもの別証明を与えたとも考えてはいない。あのような基本的な定理は様々の理論の交差点に位置していることがあり、別証明は定理の持つ種々の理論に於ける輻輳的様相を浮き彫りにすることを良く知っていたのだろう。そう云う意味で、世に出回る「実数の非可算性」の証明の 90% 以上が対角線論法であると云う現状には、いささかの寂寥の情を感じざるを得ない。

小平邦彦氏が推奨された測度論的証明や能代清氏や吉田洋一氏が採択されたベール流の証明、区間縮小原理を巧妙に使ったシェルピンスキーの証明[88]、これらのカントールによらない実数の非可算性の証明が、対角線論法ほどではないにしても、もう少し種々の教科書や啓蒙書で紹介されても良いのかもしれない。

[88] 付録 1(1)参照　これを「カントールによらない証明」と言うのは言い過ぎで、「カントールの証明を改良した証明」と言うのが適切かもしれない.

引用文献

1 **P. Alexandroff,** Sur la puissance des ensembles measurables B, Comptes Rendus Acad. Sci., 162(1916), pp.323–325.

2 **Arie Hinkis,**Proofs of the Cantor-Bernstein Theorem. [書籍]Springer(2013)

3 **C.E.Aull,R.Lowen(編集)**,Handbook of the History of General Topology, 第 1 巻.[書籍]

4 **Azriel Levy**, Basic Set Theory. Reprinted by Dover, 2002.

5 **R.Baire**,Sur les fonctions de variabies réelles,Ann.di Mat.(3).t.Ⅲ (1899),pp.1-123.

6 **R.Baire,A.Denjoy**,Leçons sur les fonctions discontinues, [書籍] Gauthier-Villars (1905)

7 **B.Belhoste**,L'enseignement secondaire français et les scinces au début du XXe siècle: La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes, Revue d'Histoire des Sciences,53(1990),pp.371-400.

8 **Von Paul Du Bois-Reymond,** Ueber asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösungen von Gleichungen. Mathematische Annalen. Volume 8(1875), pp. 363 - 414.

9 **B. Bolzano、藤田 伊吉(訳),** 無限の逆説 [書籍] みすず書房(1978)

10 **Émile Borel**, Éléments de la théorie des ensembles , Éd. Albin Michel (1949)
エミール・ボレル著　平野次郎訳,一般集合論. [書籍]白水社 (1957)

11 **Émile Borel**,Les Nombres Inaccessibles. [書籍] wook worm (1952)

12 **N.Bourbaki**, **村田全(訳),清水達雄(訳)**,ブルバキ数学史 [書籍] 東京図書(1970/60)

13 L.E.J. **Brouwer**, Over de grondslagen der wiskunde (1907)

14 **L.E.J. Brouwer**, On the structure of perfect sets of points, Proc. Akad. Amstersdam 12 (1910), pp.785-794.

15 **G. Cator**, Ueber die trigonometrischen Reihen, Math. Ann. 4 (1871), pp.139–143.

16 **G. Cator**, Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Ann. 5 (1872), pp.123–132.

17 **G. Cator**, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen,J.Reome Angew,Math.77(1874),pp.258-262.

18 **G. Cator**, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten,

Math. Ann. 15 (1879), pp.1–7.
19 **G. Cator**, Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, Math. Ann. 17 (1880), pp.355–358.
20 **G. Cator**, Ueber unendliche, lineare punkt mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 21 (1883), pp.545–591.
21 **G. Cator**, Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. (Fortsetzung des Artikels in Bd. XXI, pag. 545.), Math. Ann. 23 (1884), pp.453–488.
22 **G. Cator**, De la puissance des ensembles parfaits de points, Acta Math.,4(1884),pp.381-391
23 **G. Cator**, Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche , Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Bd. 88(1886)
24 **G. Cator**, Über eine elementare Frage derMannigfaltigkeitslehre, Jber.D.M.V.,Bd. I (1890-91) pp.75-78.
25 **G. Cator**, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann. 46 (1895), 481-512. Math. Ann. 49 (1897), pp.207-246.
26 **G. Cator**, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, 1895-97(超限集合論)[書籍]/訳 功力金二郎,村田全(訳・解説). 共立出版(1979/09).
27 **G.Cantor,R.Dedekind,E.Noether,J.Cavaillès**,Briefwechsel Cantor-Dedekind herausgegeben. [書籍] Hermann (1937)
28 **R. Courant,H. Robbins**,revised by I.Stewart, What Is Mathematics. [書籍] Oxford Univ Pr (1995) pp.82-83.
29 **André Cresson、川口篤（訳）**,フランス哲学思潮. [書籍] 白水社(1951)
30 **Dirk van Dalen** ,L.E.J.Brouwer–Topologist,Intuitionist,Philosopher. [書籍] Springer(2012).
31 **J. W. Dauben**, Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. [書籍] Princeton University Press(1990) pp.187-189
32 **R.Dedekind、渕野昌（訳）**,数とは何かそして何であるべきか [書籍] 筑摩書房 (2013)
33 **B.Fine,G.Rosenberger**,The Fundamental Theorem of Algebra.[書籍]Springer New York (2012)
34 **M.Fréchet,** フレッシェ 抽象空間.[書籍] / 訳 斉藤正彦、森毅（解説・討論）、杉浦光夫（討論）. 共立出版（1987/11).
Les Ensembles Abstraits Et Le Calcul Fonctionnel. Rendiconti del Circolo Mathmatico di Palermo,tom. XXX(1910), pp.1-26

35 **L. Graham,J-M. Kantor, 吾妻靖子（訳）**,無限とはなにか?［書籍］，一灯舎（2011）
36 **A. Harnack**, Die Elemente der Differential und Integralrechnung, Teubner, Leipzig(1881).
37 **A. Harnack**, Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihen, Math. Ann. 19 (1882), pp.235-279.
38 **A. Harnack**, Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabeln mit ihren Ableitungen , Math. Ann. 23 (1883), pp.244-284.
39 **A. Harnack**, Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige., Math. Ann. 23 (1883), pp.285-288.
40 **A. Harnack**, Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen(Ⅱ), Math. Ann. 24 (1884), pp.217-252.
41 **A. Harnack**, Ueber den Inhalt von Punktmengen, Math. Ann. 25 (1885), pp.241-250.
42 **F. Hausdorff**, Grundzüge der Mengenlehre. [書籍] Veit & co(1914)
43 **T.Hawkins**, Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development. [書籍] American Mathematical Soc., (2001)
44 **C. Jordan**, Cours d'analyse, vol. I,1893, pp.25.
45 **A. Kanamori, 渕野 昌(訳)**, 巨大基数の集合論. [書籍]シュプリンガー・フェアラーク東京(1998)
46 **V. Katz** , A History of Mathematics. [書籍] Addison-Wesley (1998)
47 **John N. Crossley** (編), Logical Methods: In Honor of Anil Nerode's Sixtieth Birthday Anil Nerode(1993) pp.705-712
Who Put The "Back" In Back-And-Forth ? J.M. Plotkin
48 **H.Lebesgue,** ルベーグ 積分・長さおよび面積.[書籍] / 訳 吉田耕作、松原稔（訳・解説）. 共立出版（1969/10).
49 **H.Lebesgue,** Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives (1904,1927) pp.179
50 **N. J. Lennes,** Curves in Non-Metrical Analysis Situs with an Application in the Calculus of Variations, American Journal of Mathematics,Vol.33, (1911),pp.303
51 **M. Mashaal, 高橋礼司（訳）**,ブルバキ 数学者達の秘密結社. ［書籍］シュプリンガー・フェアラーク(2002)

52 **B.Minnigerode**, Bermerkung über irrationale Zahlen, Math. Ann.4 (1871), pp.497–498.
53 **Yiannis N. Moschovakis**, Descriptive Set Theory. [書籍] American Mathematical Soc (2009).
54 **H. Poincaré,** Dernières pensées. [書籍] E. Flammarion(1917)
55 **H. Poincaré, 河野伊三郎(訳)**,科学と仮説. [書籍],岩波書店(1959)
56 **Pontryagin, 柴岡 泰光 (訳)**, 連続群論. [書籍]岩波書店(1957)
57 **H. Sagan , 鎌田 清一郎 (訳)** 空間充填曲線とフラクタル [書籍]シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998)
58 **J.A.Serret**,Cours D'algèbre Supérieure Tome2, [書籍]Gauthier-Villars,1866
59 **Sierpinski,W.**, Les exemples effectifs et l'axiome du choix. Fund. Math. 2, 112-118. 1921a.
60 **Sierpinski,W.**, O TEORII MNOGOŚCI Wybrane zagadnienia dla szkół srednich. [書籍]PZWS,Warszawa,1965
シェルピンスキー (著)、熊谷孝康 (翻訳)、集合と位相. [書籍]東京図書(1968)
61 **Charles L. Silver**, "WHO INVENTED CANTOR'S BACK-AND-FORTH ARGUMENT?" Modern Logic, Vol 4, No. 1, January (1994),pp.74-78
62 **H. J. S. Smith,** On the Integration of Discontinuous Functions. London Math. Soc. Proc., 6(1875), pp.140-53.
63 **Spinoza, 畠中尚志 (訳)** エチカ [書籍]岩波,(1951)
64 **M. Suslin**, Sur une definition des ensembles measurables B sans nombres transfinis, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 164(1917), pp.88–91.
65 **Urysohn, P.**,Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen in: Mathematische Annalen 94 (1925) ,pp.262 – 295
66 **R.L.Wilder**,Evolution of the topological concept of "connected", Amer. Math. Monthly 85(1978), pp.720-726.
67 **David E. Zitarelli**, Connected Sets and the AMS, 1901–1921, Notices of the American Mathematical Society 56 (2009), pp.450-458.
68 **彌永昌吉**,ガロアの時代 ガロアの数学 第二部, [書籍]シュプリンガー・フェアラーク東京(2002)
69 **上江洲忠弘**, 集合論・入門 (無限への誘い). [書籍]遊星社(2013)

70 倉田令二朗，平方剰余の相互法則―ガウスの全証明.
[書籍]日本評論社(1992)
71 小平邦彦（編),数学の学び方．[書籍] 岩波書店(1987) pp.77-93.
72 小平邦彦，解析入門．[書籍] 岩波書店(1997) pp.49-52.
73 小柴洋一， Volterra と H.J.Smith の論文に見られる、その導関数が Riemann 積分可能でない関数の古典例について.
数理解析研究所講究録 1064 巻 1998 年 pp.1-5
74 近藤基吉， 実関数論．[書籍]朝倉書店(1968)
75 近藤基吉， 現代数学入門．[書籍]日本評論社(1975)
76 近藤基吉，解析学のある立場．科学基礎論研究(1958/12)
77 清水幾太郎(監),霧生和夫(訳),清水礼子(訳)，世界の名著 46 巻コント・スペンサー．[書籍] 中央公論新社(1980)
78 志賀浩二，無限からの光芒．[書籍] 日本評論社(1988)
79 志賀浩二，位相への 30 講．[書籍] 朝倉出版(1988)
80 志賀浩二，数学の流れ 30 講（下)．[書籍] 朝倉出版(2009)
81 志賀浩二，数学という学問（Ⅲ)．[書籍] 筑摩書房(2013)
82 赤摂也，実数論講義．[書籍] SEG 出版(1996)
83 高木貞治，解析概論．[書籍] 岩波書店
84 竹之内修， ルベーグ積分．[書籍]培風館(1980) pp.26-27
85 田中一之，数の体系と超準モデル．[書籍] 裳華房(2002)
86 田中一之，鈴木登志雄，数学のロジックと集合論.[書籍] 培風館(2003)
87 田中一之，対角線論法なしの数学基礎論．数学のたのしみ(2004)
88 田中尚夫， 選択公理と数学[増補版].[書籍] 遊星社(1999) .補遺Ⅳ
89 辻正次,小松勇作改訂,集合論.[書籍]共立出版(1974)110-111.初版(1934)
90 中西シズ， 積分論．[書籍]共立出版(1973)
91 日本数学会（編)．数学辞典 第 4 版[書籍]岩波書店(2007)
92 能代清，極限論と集合論.[書籍] 岩波書店（1944）
93 一松信，解析学序説（下)．[書籍] 裳華房(1963)
94 村田全，ボレルのエフェクチフ概念の形成.高崎論叢 創刊号（1953）初出、『数学と哲学との間』（1998 年 2 月，玉川大学出版部）補注
95 村田全，数学におけるフランス経験主義．数学基礎論研究 第 3 号（1958)
96 村田全，数学史の世界．[書籍] 玉川大学出版部（1977）
97 村田全，カントルにおける数学と哲学.『数学と哲学との間』[書籍] 玉川大学出版部（1998)
98 村田全,スピノーザの無限とカントールの超限．数理解析研究所講究録

1064 巻 1998 年 pp.114-128
99 森下 四郎, ピタゴラスの定理 100 の証明法―幾何の散歩道. [書籍] プレアデス出版 (2010)
100 盛田建彦, 実解析と測度論の基礎. [書籍]培風館(2001)
101 山下純一,ガロアのレクイエム. [書籍] 現代数学社(1986)
102 吉田洋一,点集合論. [書籍] 培風館(1960)

あとがきと謝辞

シンポジウムの後、たまたまさる高名な数学史研究者の方の私的な懇親会に参加させていただいたのだが、その方が開口一番「数学の出来ない数学史家ほど惨めなものはないのですよ。」と言われたことに強烈な印象を受けた。話の前後関係から考えるに、あの一言は一般論を言われていたのであって筆者に直接意見されたわけではなかったと思うのだが、今回の論文をまとめるにつけて、この言葉の重みをいやという程感じさせられた。

殆どが 100 年以上も前の数学について話なのだから、歴史的な考証や当時の解釈はともかくとして数学そのものは、それ程難しくはないだろうと高を括っていたのが大間違いで難行苦行の連続であった。例えば、ブラウエルの原論文は、言語も英語であり、最終的な結論は極めて簡単な話なのだが、読み進めていくうちに藪のなかを歩いているような気持ちにさせられた。他の論文についても、翻訳はしたが、理解が不十分なところが幾つも出てくる始末。いっそのこと、翻訳はやめて原文だけを載せようかとも考えたが、いろいろ思案した結果、拙くてもやはり翻訳を載せることにした。原文はリンク先さえ明示してあれば簡単にネットから入手できる時代なので、読者は拙訳をざっと見て面白そうだとおもったら原文に直接当たれば良い。拙訳はその程度の水先案内として使ってもらえれば十分と考えたからである。

このような考え方は真っ当な伝統的アカデミズムからは大きく外れたもので真面目な研究者からは反発されることは充分承知しているが、一方で、数学史の一般的な愛好家からは支持していただけるのではないかとも考えている。例えば、カントールが歴史上初めて実数の非可算性を証明した 1874 年の論文はドイツ語で書かれており、邦訳がない。今回の著者のように、何か余程の理由がなければわざわざ原文を入手して読み込もうなどとは思わないであろう。専門家の方にとっては、読むことへの障壁はないが、自分の専門の論文を書くことに何の寄与もしそうにない論文である

が故に、読む動機づけがなく、一方、一般的愛好家の方にとっては、読んでみたいという動機はあっても、原文の入手方法が判らないとか、ドイツ語であるとかの理由から二の足を踏む方が少なくないのではなかろうか。拙くとも、日本語で書かれていれば、気軽に眺めることができ、通説が無視するガロア理論への言及なども簡単に確認できて多くの読者諸氏にとって有益な情報を提供できることになると考えた次第である。そういう訳で、付録にある拙訳は本物（原文）への興味の誘い水に過ぎないとご理解いただきたい。

この論文の原案は随分前に出来上がっていたのだが、その後の執筆中にいろいろな歴史的あるいは数学的な事象に対する気づきがあり、当初予定していたものとは随分と様変わりした。そのような気づきには、著者自身の孤独な調査とは別に、著者の不躾な照会に対して、真摯に応えてくださされた諸先生方や、間を取り持って下さった出版社の方のご助力があってのことであった。非述語的定義と云う本質的な着眼点をお教えくださった田中尚夫氏、ボルテラの論文の重要性に目を開かせて頂いた小柴洋一氏、深い文明論を便せん 4 枚も書いてくださった志賀浩二氏、そして忙しい業務の合間に先生方への連絡の労を取ってくださった朝倉書店森田豊氏、遊星社西原昌幸氏、皆様方にこの場を借りて深く御礼申し上げます。

最後になりましたが、このような論文を発表する場を与えてくださいました津田塾大学数学・計算機科学研究所の三宅克也氏と立教大学、津田塾大学数学・計算機科学研究所佐藤文広氏、津田塾大学数学科長岡一昭氏に深く感謝致します。

付録

1. 区間縮小原理を使った証明（現在の証明とカントールによる原論文）

（1）現代の区間縮小法による証明

定理：R は可算ではない.

（証明）

$R=\{a_n : n\in N\}$ として矛盾を導く. まず、$a_0 < a_1$ かつ（$n\neq n'$ ならば $a_n\neq a'_n$）と仮定してよい. そこで、$r_0=a_0, s_0=a_1$ とおく. $r_0<a_n<s_0$ をみたす最小の n を n_0 とし、$r_1=a_{n_0}$ とおく.

次に、$r_1<a_n<s_0$ をみたす最小の n を n_1 とし、$s_1=a_{n_1}$ とおく. すると、$r_0<r_1<s_1<s_0$ であり、すべての $n<n_1$ に対して、$a_n\notin(r_1,s_1)$ となる. とくに、$n_1\geq 4$ であるから、すべての $n<4$ に対して、$a_n\notin(r_1,s_1)$ となる. 同様に、一般の k に対して、$r_0<r_1<\cdots<r_k<s_k<\cdots<s_1<s_0$ であって、すべての $n<2k+2$ に対して、$a_n\notin(r_k,s_k)$ となるような区間 (r_k,s_k) がとれる.

さて、$\{r_n : n\in N\}$ は上に有界な集合であるから、ワイエルシュトラスの公理から上限 $sup\{r_n : n\in N\}$ が存在し、それを $t=a_k$ とおく. すると、t はすべての開区間 (r_n,s_n) に属するはずであるが、$a_k\notin(r_k,s_k)$ となり、矛盾が生じる. よって、$R=\{a_n : n\in N\}$ であるという仮定が否定された.

Q.E.D.

シェルピンスキーは本質的には上記と同じだが巧みな次のような証明を自著[89]に載せている.

（証明）

直線P上の点全部の集合が可算である、すなわち、点全部を無限列 $p_1, p_2, p_3, \ldots$（※）として並べることができると仮定しよう. 明らかに、点p_1を含まない線分d_1を作ることができる. さらに、線分d_1の部分であって点p_2を含まない線分d_2を作ることができる. このためには、線分d_1を 3 等分して、それらのうち内部にも端にも点p_2を含まない部分をd_2とすればよい（もし、d_1の部分でこの性質をもつものが 1 つだけでなければ、たとえば最も左の部分をとることにしよう）. それから同じように、線分d_2の部分であってp_3を含まない線分d_3を作ろう. それから、さらに同じように続ける. アスコリの公理によって、線分$d_1, d_2, d_3, \ldots$全部に共通な点Pが存在する. この点は点列（※）のどの点とも一致しない. なぜなら、任意の自然数nに対してPは線分d_n上にあるのに反して、点p_nは（線分d_nの作り方から導かれるように）線分d_n上にない. したがって、点列（※）は直線P上の点全部を含むという仮定は矛盾をきたす. ゆえに、直線上の点全部の集合は非可算である.

Q.E.D.

[89] 『集合と位相』[60]p30-31

（2）カントールによる区間縮小法による原証明

G. Cator,Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen .[Crelles Journal f . Mathematik Bd . 77 , 8 . 258 - 262 (1874)][17]より抜粋[90]

すべての実の代数的数のつくるクラスの一性質について[91]

（ハレ大学のカントール氏による）

一つの代数的数は一般的に次の恒等式ではない等式を満たす実数量 ω であると理解される：

(1)
$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

ここで$n, a_0, a_1, \cdots$は整数であるとする；n, a_0は正値で、係数$a_0, a_1 \ldots$は共通因子がないものとして取れて、等式(1)は既約であると出来る；実代数的数は（ω)と表記されるであろう全体として可算量のクラスを形成する；それ自身が、単純な観察から判るように、次のような性質を持つ、（実数の中で）任意に想定された数 α のそれぞれの近傍において無限に多くの(ω)の数が存在する；そのクラス(ω)はすべての正値整数たち ν(これを記号（ν)で表記する）との間に明らかな対応関係が設定し得て、それ故、それぞれの代数的数 ω に対して、異なった正値整数 ν との間の対応が存在し、逆に、それぞれの正値整数 ν に対して、異なる実代数的数 ω との間の対応が存在する、つまり、クラス(ω)は次のような無限個の規則に基づく数列の形式と考えられる.

(2)
$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots,$$

この中に(ω)のすべての要素が存在し、そしてそれらのそれぞれは(2)の、対応する添数によって与えられた、ある位置に見いだされる、と考えられる. ひとたび一つの規則が見いだされたならば、同じことがすべて（の項に対して）変更され得る；もし§1 で、最低限の背景が必要とされそうな、それらの割り当て方法が共有されたならば、それで十分であろうと思われる.

実代数的数全体からなるクラスが持つこの特性の応用を与えるために、私は§1 に§2 を追加し、その中で、私は形式(2)の任意な実可算量の列が与えられたとき、任意に与えられた区間(α…β)の中に(2)に含まれない数たち η を定義することが出来ることを示した；これらの節の両方の内容を併せると、リウヴィルによって初めて証明された定理、任意な与えられた区間(α…β)の中に無限に多くの超越数、すなわち非実代数的数、が存在する、の新しい証明が与えられる. 更に、§2 の定理はなぜいわゆる連続体(例えば≥ 0 かつ ≤ 1 であるようなすべての実数)を形成する実数量のクラスがクラス(ν)と一対一に関係付けられないかを示

[90] http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN243919689_0077&DMDID=DMDLOG_0014

[91] ここでの「集合」は現在の“Menge”ではなく“Inbegriff”が使われている. 未だ、この段階では用語が定まっていなかったことが窺われる. これを考慮して訳語は「集合」ではなく敢えて「クラス」を使用した.

す；そういう訳で、私はいわゆる連続体とすべての実代数的数の全体の型のクラスとの間の明確な違いを発見した．

§1.

我々が、代数的数 ω が満たしそして概念的な規定によって完全に決定される、等式(1)に戻るとき、係数の絶対値たちの合計を数 $n-1$（ここで n は ω の位数である）増加させて、それを ω の高さと呼んで、N と表記する；従って、今共通の表記法を使えば、次式を得る．

(3) $$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

それ故、高さ N はそれぞれの実代数的数 ω に対して特定された正値整数となる；逆に、N のそれぞれの正値整数の値に対し、高さ N での有限個の実代数的数が存在する；これらの数を $\varphi(N)$ とおく：例えば、$\varphi(1)=1; \varphi(2)=2; \varphi(3)=4$ である．クラス(ω)における数たち（すなわち、すべての実代数的数）は、それ故、次のように並べられる；第1の数は ω_1 として高さ $N=1$ での一つの数を取る；それ(ω_1)を残したままにして、大きさの昇順に、高さ $N=2$ での $\varphi(2)=2$ 個の実代数的数たちをならべ、それらを ω_2, ω_3 と表記する．これらと同様に、大きさの昇順に、高さ $N=3$ での $\varphi(3)=4$ 個の数たちを(ω_3 の後に数列として)つなぐ；一般の場合も同様に、ひとたび(ω)からのすべての数たちがある高さ $N=N_1$ に至るまで列挙されてこのような方法で特定の位置に指定されるならば、高さ $N=N_1+1$ での実代数的数たちは、実際に大きさの昇順に並ぶ；そういう訳で、次の形式でのすべての実代数的数のクラス(ω)を得る．

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

そしてこの順序に参照することで ν 番目の実代数的数を、クラス(ω)の一つの要素も除外することなく、数え上げることが出来る．

§2

任意な規則によって与えられた互いに異なる無限個の実数列

(4) $$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

が存在したとすると、任意に与えられた区間$(\alpha \ldots \beta)$ の中に一つの数 η（それ故、そのような数は無限個ある）が決定され、その数は決して数列(4)の中に現れることはない；このことが証明されるであろう．

この目的のために、$\alpha < \beta$ であるような、任意に与えられた、区間$(\alpha \ldots \beta)$から始める；この区間（端点は除かれている）に現れる数列(4)の最初の 2 数は同様に α', β' と表示され、$\alpha' < \beta'$ であるとする ;全く同様に、区間$(\alpha' \ldots \beta')$に現れる数列(4)の最初の 2 数は α'', β'' と表示され、$\alpha'' < \beta''$ であるとする．そして同様のやり方で次の区間$(\alpha''' \ldots \beta''')$などを構成することが出来る．それ故、定義により数列(4)のある確定した数列 $\alpha', \alpha'' \cdots$ が存在し、それらは添字の並びで順々に増加している．そして同様のことが数列 $\beta', \beta'' \cdots$ に対しても成り立つ．更に、数列 $\alpha', \alpha'' \cdots$ は順々に大きくなっていき、逆に数列 $\beta', \beta'' \cdots$ は順々に小さくなっていく;区間列$(\alpha \ldots \beta), (\alpha' \ldots \beta'), (\alpha'' \ldots \beta''), \cdots$ のそれぞれすべてに含まれるのは以下の通りである — ここで、二通りの場合が有り得る．

このようなやり方で形成された区間列が有限個の場合；それらの（区間列の）最後の区間は$(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$であるとせよ；この区間の内部に数列(4)の数は高々一つ有り得るだけである．それ故、この区間に(4)に含まれることはない一つの数 η が存在すると想定され得る．従って、それは証明すべき命題であった．

または、この区間列の数が無限大である；そのような場合、数列 $\alpha, \alpha', \alpha'' \cdots$, は特別なタイプの極限 α^∞ を持つ．なぜなら、（この数列は）大きさ順に連続的に増加するが、無限には増加しないからである；同様のことが数列 $\beta, \beta', \beta'' \cdots$ に対しても成り立つ．なぜなら、（この数列）大きさの順に連続的に減少し、その極限は β^∞ である；$\alpha^\infty = \beta^\infty$ の場合（すべての実代数的数のクラス(ω)で常に起こるような例)、それで区間列の定義を振り返るだけで、数 $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ がこの数列に含まれることはあり得ないと容易に確信される[92]；しかしながら $\alpha^\infty < \beta^\infty$ の場合、区間$(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$の内部に含まれるか、さもなければその境界上で同じ配置要件を満たす任意な数 η は、数列(4)に含まれない．—

この論文の中で証明された定理は異なるいろいろな方向に拡張することができるのだが、その一つだけは言及されるべきであろう：

$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$ は互いに線形独立な一つの有限または無限数列（それは、整数係数の一次式 $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n = 0$ ならば、すべての係数が 0 の場合しか有り得ない）であり、それらすべての数 Ω のクラス(Ω)は与えられた整数係数の有理関数として ω で表現され、任意な区間$(\alpha \ldots \beta)$中に(Ω)に含まれない数が無限に存在する．

実際、§1 と同様の理由から、一次式の列

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_\nu, \ldots$$

のクラス(Ω)は（可算であり)、結果として、この§2 の定理の正しさに従う（つまり、任意な区間$(\alpha \ldots \beta)$は非可算なので、その中に(Ω)に含まれない数が無限に存在する)、と考え得ると確信する．

ここで示したこの定理の特別な場合（列 $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$ が有限であり、クラス(Ω)を生成するような有理関数の位数が与えられている）はガロアの原理[93]に帰着し、B.Minnigerode

---

[92] （原注）もしその数 η がこの数列に含まれていたならば、$\eta = \omega_p$ である．ここで p は特別な添数である．しかし、これは可能ではない．なぜなら ω_p は区間$(\alpha^{(p)} \cdots \beta^{(p)})$の内部にはないのに、一方、定義によればこの区間の内部にあるからである．

[93] Galois の数学は Cantor の数学からは、一見違いもののように見えるが、Cantor 自身が数論学者として研究者のキャリアをスタートしていたことに注意しなければならない．彼の学士論文(1867)は二次の不定方程式に関するものであり、博士論文(1970)は三元二次形式の変換をテーマにしている．

氏によって証明された．(数学年報,第4巻,497ページ参照) [94]

ベルリンにて、1873年12月23日

(拙試訳)

(補注1)

カントールは、1873年11月29日付の手紙で、「私にとって理論的に興味深い問題」として、デデキントに正整数と正実数の間に1：1対応がとれるかどうかを問題提起した。デデキントは本論の§1とほぼ同じ結果、但し複素数まで含めた代数的数に対してのもの、を直ぐに得て送り返したらしいが､カントールは代数的数を実数の範囲で考察することに固執した.また、デデキントはカントールの質問に対して、最初は「どうなるか自分は知らない」し、「実際的な興味がないと云う理由で、苦労して考えるに及ばない」と回答している．しかし、わずか8日後の、12月7日付の手紙でカントールがその証明を送ってきたとき、本論にあるリウヴィルの定理の別証明を与えていることが明確となったことを受け､デデキントは当初の意見を撤回している.

カントールは、12月22日にワイエルシュトラスに本論の結果を報告し、翌日、証明を伝えている。このとき、ワイエルシュトラスは論文の表題を「すべての実の代数的数のつくるクラスの一性質について」とするように助言している。これは当時のこの雑誌（クレレ）の監修がクロネッカーであったことを意識してのことであった。同日、12月23日、には上記の論文が提出されているのだから、この慌ただしい論文作成時にB.Minnigerodeの結果を見つけたとは考えにくい．問題提起の前から熟知しており、この問題を考えるヒントにもなっていたと考える方が自然であろう．[95]

(3)カントールの実数の非可算性命題のアイデアの源泉の一つとなった論文

B.Minnigerode, Bermerkung über irrationale Zahlen, Math. Ann.4 (1871)(無理数についての所見) [52] 497–498 より[96]

無理数についての所見

ゲッチンゲン大学のMinnigerodeによる

[94] 次頁以降参照.

[95] この辺りのカントールとデデキントの遣り取りは、『Briefwechsel Cantor-Dedekind herausgegeben（カントール・デデキント書簡集）』[27]を参照のこと．日本語なら『数学という学問III』[81]がダイジェスト版として適している.

[96] http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN235181684_0004&DMDID=DMDLOG_0047&LOGID=LOG_0047&PHYSID=PHYS_0509

与えられた（代数的）無理数を変数とし、与えられた有限位数の有理係数の有理関数によってすべての（実）数を表現することは出来ない、と仮定することは極めて自然なことである．この命題は多くの研究において前提となっているので、そのことが証明されることは望ましいであろう．以下においてその証明が与えられる.

与えられた無理数の冪を取ることで生成される数を一つの新しい無理数として導き､次のことが見て取れる．その数たちが以下の式で表されるとき、未踏の一般的分析がなされる：

$$F=\frac{m_1r_1+\cdots+m_pr_p}{n_1r_1+\cdots+n_pr_p}$$

が与えられていて、ここで$r_1,\cdots,r_p$はある一次独立な定められた数たちを表示するものとする．つまり、この数たちは一つの（0でない）有理係数の線形斉次方程式の中には（同時に複数は）存在しない；$m_1,\ldots,m_p,n_1,\ldots,n_p$は不定な有理数である．式$F$で表現することが出来ない数たちが存在することが今示された.

その分析は容易に一般化される．mとnは複素数であると仮定する；すなわち、それらは有理係数の次数λの既約代数方程式の根ωについての有理係数の有理関数である．それで前提からrはまた明らかにこれらの複素数たちと線形独立である.

証明すべきその命題の正しさは､$p=1$の場合は、直ちに明らかである．その場合、Fはωによって有理的に表されたすべての数を表現することが出来るが、他のものは、特に、その次数がλよりも大きな既約代数的方程式の根の場合はそうではない.

証明すべきその定理の一般的妥当性を論証するために、以下のことを示す．もし任意な数rがp個の数によって、仮定された方法で、表現されるならば$p-1$個[97]の数によっても表現することが出来る.

mとnに対し、それらの数（mとn）はFが数εと等しいように設定してよい、それ（ε）は代数的方程式の根であり、しかしωによって有理的には表現されない．それは虚の方程式ではないようで、rの一つのおかげで、r_pについては、残りの項によって線形表現される、ここでの係数たちはωとεの有理関数たちである.

良く知られたガロアの定理によると、ω と εは一つの変数η、それは有理係数の代数方程式の根であるのだが、の有理関数で表現することができる．もしこのことが起これば、そのときは：

$$F=\frac{\mu_1r_1+\cdots+\mu_{p-1}r_{p-1}}{\nu_1r_1+\cdots+\nu_{p-1}r_{p-1}},$$

ここでμ と νはη の有理関数である．それ故、実際、Fは仮定から$p-1$個の数rによって表現される．この手順を繰り返し適用すれば容易にその定理は証明される.

ゲッチンゲンにて、1871年7月

(拙試訳)

[97] 原文は“1p−”とあるが、これは誤植で“p−1”とすべきと思われる

（補注１）

この論文には、未だ１：１のアイデアはないが、「表現する」と云う言い回しの中に、カントールによる実数の非可算性命題のプロトタイプが見て取れる．ざっくり言えば、代数的数に有理係数が掛かった有理関数程度では実数全体を表現することが出来ない．つまり、実数の方が有理数よりも遥かに多くの要素がありそうに見える．少なくともカントールはそのように捉えたのではなかろうか．カントールの初期の思想の源泉の一つと考えてよかろう．

（補注２）

Minnigerode がどのような定理を指して、ガロアの定理と呼んでいるのかは興味ある問題である．デデキントの現代的なガロア理論の講義は 1857-58 年に行われてはいるがその結果はこの当時には公表されていなかったし、実際、上記の「有理関数で表現される」はデデキント流ではなく、ガロアのオリジナルの理論を踏襲したものであることを伺わせている．既に、リウヴィルの編集によってガロアの論文は 1846 年に発表されていたので、次の定理は良く知られていたのかもしれない．

また、間接的にせよ、以下のようにアーベルの名前まで現れたのには更に驚かされた．

補助定理Ⅱ　重根のない任意の方程式が与えられたとし、$a,b,c,\ldots$をその根とする．そのときそれらの根の（有理整）関数Vを作り、（Vにおいて）根（$a,b,c,\ldots$）の順列をどのように換えても、（Vの）値がすべて異なるようにすることができる．

例えば$V = Aa + Bb + Cc + \cdots$　とし、$A,B,C,\ldots$は適当に選ばれた整数とすることもできる．

補助定理Ⅲ　上に（補助定理Ⅱで）示されたような関数Vは次の性質をもつ、すなわち与えられた方程式のすべての根（$a,b,c,\ldots$）はいずれもVの有理関数として表される．

この命題はアーベルの楕円関数に関する遺稿のなかで、証明なしで引用されている．

定理：$a,b,c,\ldots$をm個の根としてもつ方程式が与えられたとしよう．そのときいつも次の性質１,２をもつ$a,b,c,\ldots$の置換からなる群がある．

1．根の関数でこの群の置換によって変わらないものは、必ず有理的に知られる．
2．逆に有理的に決定される根の関数は、この群の置換によって変わらない．

『ガロアの時代　ガロアの数学』[68] pp.235-237

あるいは、ガロアの理論は解説が現れ始めていた頃でもあったので、そちらの方を参照している可能性もある．例えば、有名なジョルダンの置換論は 70 年に出版されている．しかし、それよりも 66 年の J.A.セレの『高等代数学教程』第３版[58]（この版からガロア理論が扱われるようになった）あるいはそのドイツ語版（68 年）あたりから Minnigerode はガロア理論を学んでいた可能性の方が高いと推察される．この本の第２巻 582 節に次のような補題がある．

補題Ｉ．$F(x) = 0$　を任意な位数nの既約多項式とし、$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$　はそのn個の根とする．もし形式x_k, x_{k+1}の置換$\binom{k+1}{k}$（モデュラスnに従い、指数はガロアが行ったように取られる）によって根が不変であるようなすべての関数が有理関数であるならば位数 $n-1$ の整関数$\varphi(x)$を有理的に決定することが出来て、それは次のようになる．

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_{k+1} = \varphi(x_k), \ldots, x_{n-1} = \varphi(x_{n-2})$$

（補注３）

「ブルバキ数学史」[12]によれば、カントールは「解析学から出発したひと」とみなされており、彼が実数の非可算性命題に興味を持った動機も、フーリエ級数の収束問題と実数論に対する深い考察に由来するとされている．カッツを含め、多くの数学史書がこの「ブルバキ」説を踏襲し、ほぼ通説となっているが、既に注意したように、カントールは「数論から出発した人」である．1874 年のカントールの論文では、偉大な数論学者デデキントの予想をも覆すリウヴィルの定理（超越数の存在定理）の別証明が与えられており、そういう意味で本論は「集合論の始まり」を知らしめるものであると同時に、これとは別に 7 本の数論の論文を書いた「数論学者」としてのカントールの最高傑作であるとも言えよう．

「ブルバキ数学史」の考察は大筋においては正鵠を射ているのだろうが、いささかカントールの学識の幅を過小評価していると考える．

2.　測度論的証明（現在の証明）

(1) 定理：実数全体の集合は非可算である

（証明）

実数全体の集合Rが可算、すなわち

(2)　　$R = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n, \ldots\}$

であると仮定して矛盾を導く．各nについてρ_nを含む開区間

$$U_n = (a_n, b_n), \quad a_n < \rho_n < b_n$$

を一つ定める．そうすれば(2)により

$$R = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \ldots \cup U_n \cup \ldots$$

となるから、数直線R上に閉区間$[a,b]$を任意にとったとき

(3)　　$[a,b] \subset U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \ldots \cup U_n \cup \ldots.$

区間の幅について考えると(3)から$[a,b]$の幅$b-a$は区間$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$の幅の総和より小さいことが従うであろうと想像される：

(4)　　$b - a < \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$

実際(4)が成り立つことはつぎのようにして容易に確かめられる．閉区間$[a,b]$が開区間

$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$で覆われているから、Heine-Borel の被覆定理により、$[a,b]$は$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$の有限個で覆われる：

$$[a,b] \subset U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \ldots \cup U_m$$

このとき

$$b - a < \sum_{n=1}^{m} (b_n - a_n)$$

であることは明らかであろう．ゆえに(4)が成り立つ．

実数ε、$0 < \varepsilon < b - a$、を一つ定めてU_nとしてρ_nを中心とする幅$\frac{\varepsilon}{2^n}$の開区間$U_n = (a_n, b_n)$,　$a_n = \rho_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$,　$b_n = \rho_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ をとれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon < b - a$$

となるが、これは(4)に矛盾する．ゆえにRは可算ではない．　Q.E.D.

この証明は『数学の学び方』[71]pp.91-92 より引用した．簡便のため、「(1) 定理：」と云う表題を挿入してある．ハルナックによる歴史的証明は本論第４節を参照のこと．

3. 対角線論法による証明（現在の証明とカントールによる原論文）

（１）現在の対角線論法による証明

補題：a, bは実数で$a < b$とする．このとき、開区間(a,b)は数直線Rと濃度が等しい．

（証明）

関数$y = -1 + 2(x - a)/(b - a)$は開区間$(a,b)$と開区間$(-1,1)$との間の全単射である．また、関数$y = \tan((\pi/2)x)$は、開区間$(-1,1)$と$y$軸との間の全単射である．

Q.E.D.

定理：実数全体Rは非可算である．

（証明）

補題により開区間$(0,1)$とRは濃度が等しいので、Nから$(0,1)$への全単射Fがあるとして矛盾を導く．各々の自然数nに対し、実数$F(n)$は 10 進小数で表されているものとし、その小数$i + 1$位を$f_n(i)$で表わそう．すなわち、

$$F(n) = 0.f_n(0)f_n(1)f_n(2)\ldots$$

とする．ただし、0.15 のような有限小数は、0.14999…と表すことにしておく．

さて、(0, 1)に属する実数aを次のように定義する．各自然数nに対し、aの小数第$n + 1$位a_nを、以下の規則に従って決める：$f_n(n) \neq 1$のときは$a_n = 1$; $f_n(n) = 1$のときは$a_n = 2$．つまり、下の図の太字で表されている部分（対角線上に並んでいる部分）$f_0(0), f_1(1), f_2(2), \ldots, f_n(n), \ldots$に着目し、すべての自然数$n$に対して$a_n \neq f_n(n)$となるように$a$を定義[98]したわけである．

$$F(0) = 0.\mathbf{f_0(0)}f_0(1)f_0(2)\ \ldots\ f_0(n)\ \ldots$$
$$F(1) = 0.f_1(0)\mathbf{f_1(1)}f_1(2)\ \ldots\ f_1(n)\ \ldots$$
$$F(2) = 0.f_2(0)f_2(1)\mathbf{f_2(2)}\ \ldots\ f_2(n)\ \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(n) = 0.f_n(0)f_n(1)f_n(2)\ \ldots\ \mathbf{f_n(n)}\ \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

いま、$F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, …は(0,1)に属するすべての数のリストであるから、とくにaもこのリストのどこかに現れているはずである．したがって、ある自然数kに対して$a = F(k)$となる．すると$a_k \neq f_k(k) = a_k$となり矛盾．

以上により、背理法でNから(0,1)への全単射がないことが示された．

Q.E.D.

（２）現在の集合論的対角線論法による証明

補題１：数直線Rは$P(N)$[99]と同じ濃度をもつ．

（証明）

$R \preccurlyeq P(N)$の証明．（１）の補題により、開区間(0,1)とRは濃度が同じである．そこで、$(0,1) \preccurlyeq P(N)$を示せばよい．$0 < x < 1$となる実数xに対し、その２進小数展開の小数点以下第$n + 1$位の数字を$f_x(n)$で表す．すなわち、

$$x = 0.f_x(0)f_x(1)f_x(2)\ldots f_x(n)\ldots.$$

ただし、0.11 のような有限小数は、0.10111…と表すことにしておく．すると、関数f_xは集合$\{n \in N : f_x(n) = 1\}$を一意に定める．したがって、開区間(0,1)から$P(N)$への単射がある．

$P(N) \preccurlyeq R$の証明．上と同様にして、集合$A \subset N$には関数$f : N \to \{0,1\}$が一意に対応する．すなわち、$A = \{n \in N : f(n) = 1\}$．そこで、実数$x_f$を

$$x_f = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2f(i)}{3^{i+1}}$$

のように定めれば、P(N)から閉区間[0,1]への単射が得られる．

以上により、$R \preccurlyeq P(N)$かつ$P(N) \preccurlyeq R$が成り立つことがわかった．よってカントール・ベルンシュタイン・シュレーダーの定理により、$R \sim P(N)$が成り立つ．

Q.E.D.

[98] これは 区間 (0, 1) 全体に関係して定義されたもので，しかも a はこの区間に属する実数である．従って　a の定義は　impredicative　である．

[99] 集合Nの部分集合すべての集まりをNのべき集合とよび、$P(N)$で表わす．

補題 2：$X \preccurlyeq P(X)$であるが、$P(X) \not\preccurlyeq X$.

（証明）

各$x \in X$に$\{x\} \in P(X)$を対応させる単射があるので、$X \preccurlyeq P(X)$は明らか. もし$P(X) \preccurlyeq X$であれば、$P(X) \sim X$となるので、Xから$P(X)$への全単射Fがあるとして、矛盾を導けばよい. いま、集合$A \subseteq X$を

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \notin F(x)$$

のように定義する. Fは全射なので、$A = F(a)$となる$a \in X$がある[100]. このとき、$a \in A$ならば$a \notin F(a) = A$となり、$a \notin A = F(a)$ならば$a \in A$となって、いずれにしても矛盾. 以上により、背理法で$P(X) \not\preccurlyeq X$が示された. Q.E.D.

上の補題 2 から直ちに以下を得る.

定理：$P(N)$は非可算集合である.

この定理と補題 1 から、次の求める結果が得られる.

定理：Rは非可算集合である.

（3）カントールによる対角線論法の原証明

G. Cator, Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre(集合論の基本的な問題について)[Jber.D.M.V.,Bd. I (1890-91) 75-78.][24] より抜粋[101]

集合論の一つの基本的問題について[102]

「実の代数的数の全体の集合の一つの特性について」（*Journ.Math.* Bd.77, S.258）という標題の論文には、有限の自然数$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$の全体と一対一の対応がつけられない無限集合—私の常用の言い方でいえば、数列$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ の濃度を持たない無限集合—が存在するという定理に対して、おそらく初めての証明が出ている. すなわち、その論文の§2 で証明されていることから、たとえば任意の区間$(\alpha \ldots \beta)$のすべての実数の全体は、

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

という系列の形には表現できないということが、直ちに導き出されるのである.

ところがこの定理については、もっとずっと単純で、無理数に関する考察と無関係な証明を与えることができる.

すなわち、m とw をたがいに区別のつく或る二つの文字とし、ここで、無限に多くの座標 $x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots$ に依存して定まるもの

$$E = (x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots),$$

で、その各座標がm かw であるような要素の集合Mを考察する. M は要素E の全体である.

M の要素の中には、たとえば次の三つの要素などが属してしる.

$$E^{I} = (m, m, m, m, \ldots),$$
$$E^{II} = (w, w, w, w, \ldots),$$
$$E^{III} = (m, w, m, w, \ldots).$$

私はここで、このような集合M は、列 $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ の濃度を持っていないということを主張する.

それは次の定理から得られる.

"$E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ を、集合M の或る要素からなる任意の単一な無限列であるとすると、Mの要素で、そのどのE_ν とも一致しないようなE_0 が必ず存在する."

これを証明するため、

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots),$$
$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

とおく. ここで、$a_{\mu,\nu}$ はm あるいはw のどちらかに定まっているものである. さてここで一つの列$b_1, b_2, b_\nu, \ldots$を定義するのだが、その際、b_νもまたmまたはwに等しいが$a_{\mu,\nu}$とは違ったものであるようにする.

要するに、もし$a_{\mu,\nu} = m$ ならば $b_\nu = w$であり、$a_{\mu,\nu} = w$ ならば$b_\nu = m$ であるとするのである.

次にM の要素

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

を見てみると、いかなる正の整数値μに対しても、等式

$$E_0 = E_\mu$$

は決して成立しえないことが直ちに分る. というのは、もしそれが成り立つとすると、このμに対しては、あらゆる整数値νについて

$$b_\nu = a_{\mu,\nu}$$

となるはずであり、そうなれば特に、

$$b_\mu = a_{\mu,\mu}$$

ともなるはずであるが、これはb_ν の定義から見て、ありえぬことだからである. この定理から、M のすべての要素の全体は[単一な]列の形,$E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ には書けないことが直ちに得られる. それは、もしそう書けたとすると、一つの対象E_0 が、M の要素であり、

100 前ページの注と同様で、a はX全体に関連して定義されており、しかも$a \in X$であるのだから a の定義は impredicative である.

101 http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN237853094&DMDID=DMDLOG_0033

102 訳は「カントール 超限集合論」[26]pp.116-119 より引用.

しかもM の要素ではないという矛盾に陥るからである.

この証明は、まことに簡単明瞭であるが、それだけの理由でなく、むしろ根底的に見ても注目に値する. というのは、この証明の底に働いている原理は、そのまま或る一般的定理に拡張できるからである. すなわち、明確に定義された集合の濃度に最大者はないという定理、または同じことだが、与えられたどんな集合L に対しても、L の濃度より強い濃度をもつ別の集合M が、Lに伴って現われるという一般的定理がそれである.

一例としてL をある線状連続体、たとえば$\geqq 0$ かつ $\leqq 1$ であるような集合とする.

また一価関数$f(x)$の中で、xが $\geqq 0$ かつ $\leqq 1$ なるあらゆる実数値x を動くときの値として、0または1の一方だけをとる関数全体の集合をMで表わす.

M がL の濃度よりも小さい濃度をもたないことは、M の部分集合でL と同じ濃度のものが指定できることから直ちに得られる. たとえば、xの関数で、x の或る特定の値x_0に対しては値1を取り、それ以外のすべてのxの値に対しては値0をとるようなものの全体、という部分集合などがその例である.

ところがMはLと同じ濃度にはならない. なぜか、それは、もし両者が同じ濃度だとすると、集合M は変数zの全体と一対一の関係になるはずであり、ひいては、M を、二変数x,z の或る一価関数

$$\varphi(x,z)$$[103]

の形で考えることができるはずである. すなわち、zのとりうる個々特定の値を与えるごとにMの或る要素 $f(x)=\varphi(x,z)$が得られ、また逆に、M の各要素$f(x)$は、zに或る特定の値を定めることによって$\varphi(x,z)$から導かれる、というふうにすることができるはずなのである. だが、このことから矛盾が生ずる. なぜなら、$g(x)$を、0か1かの値だけとるようなx の一価関数で、ただしx のおのおのの値に対して$\varphi(x,x)$とは相異る値をとるものとすると、一方で$g(x)$はM の一つの要素でありながら、他方、$g(x)$は$\varphi(z_0,z_0)$と$g(z_0)$とが違っているために、どんな特定の値 $z=z_0$ に対しても、$\varphi(x,z)$から得られることにはならないからである.

こうしてM の濃度はL の濃度より小でもない、またそれに等しくもないということになると、M の濃度はL の濃度より大であることが導かれる理屈である (Crelles Journal Bd.84,S.242)

私は以前に、"一般集合論の基礎 (Leipzig 1883; *Math.Ann.*,Bd.21) "という論文の中で、これとは全く別の補助手段によって、もろもろの濃度の中に最大者のないことを示した. 要するにその論文では、濃度をその大小の順に並べたと考えるとき、ありとあらゆる濃度の集合が或る"整列集合"を形づくること、しかも濃度なるものの性質上、おのおのの濃度にはすぐ次に大きい濃度が存在し、かつ種々の濃度からなるどんな増大集合にも、そこに最大の濃度がないときは、すぐ次に大きい濃度がその先に必ず存在することが示されていたのである.

もろもろの"濃度"は、有限の"基数"[つまり個数]の唯一にして必然的な一般化を表わしている. それらが実無限大的な基数に他ならない. そしてそれらの基数には有限の基数と同様の実在性および確定性が現われる. ただし、それらの数に関する"整数論"が、有限領域の場合とはいささか様子を異にしているという点は別にしての話である.

この先この分野を開拓する仕事は未来の課題である.

(4) 連続体集合から可算集合を取り除いても、連続体集合が残る証明

このことから次のようなことが導かれる. すなわち、それは、連続体集合Cからある可付番集合Dのすべての点を取り除いても、なお、無限集合C'が残るということである. このC'はCと同じ濃度、すなわち連続体としての濃度を持っている. このことを証明しよう.

まず、C'からある可付番集合D'を取り除く. これは、Cから集合Dを取り除き次いでD'を取り除くこと、すなわち、可付番集合$D+D'$を取り除くのと同じことである. したがって、なお、無限集合C''が残る. ここでC'とDとは共通点をもたず、また、C'', DおよびD'も共通点をもたないから、

(1) $C=C'+D$

(2) $C'=C''+D'$

と書くことができる.

たとえば、Cが0と1との間に含まれる点の集合ならば、Dとしては、0と1との間に含まれる有理数p/qを横座標とする点の集合をとることができるだろうし、D'としては、0と1との間に含まれる$p/q\sqrt{2}$を横座標とする点の集合をとることができるだろう.

ところで、(1)と(2)とから

(3) $C=C''+D+D'$

が出る.

(2)と(3)とを比較すれば、CとC'とが同じ濃度をもつことがわかる. (2)においても、また(3)においても、同じC''に、ある可付番集合が加えられている. すなわち、(2)の場合にはD'が、(3)の場合には$D+D'$が加えられているのである. ところが、可付番的な2つの集合は同じ濃度をもっている. すなわち、D'の点と$D+D'$の点との間には一対一の対応を立てることができる. したがって、C''の点は各々それ自身に対応するものと規約すれば、Cの点とC'の点との間には一対一の対応をうち立てることができる.

それで、可付番集合から有限個の点を取り除いても、残りはやはり可付番集合であるのと同様に、連続体としての濃度を持つ集合から可付番集合を取り除いても、あるいは、同じこ

[103] この一行が翻訳では抜けていたので補足しておいた.

とであるが、可付番的点集合を可付番的に限りなく取り除いても、残りはやはり連続体としての濃度をもっていることになる.

『一般集合論』(平野次郎訳) [10] pp.43-44
※平野訳では、訳者の独自の考えで、敢えて「濃度」を「容度」とされていた. 訳者の見識には敬意を払いつつも、読者の便宜を優先して、通常の「濃度」に替えさせていただいた.

4. 往復論法による証明 (選択公理を使わない往復論法とカントールによる原論文)

本論の3節で既に述べたように、カントール自身は、往復論法を、「復」部分が抜けていると云う意味で、現在の往復論法とは若干異なる証明を行ったが、ツェルメロが注意しているように証明そのものは正しい. また、彼の証明には無意識に選択公理が使われていると評する学者[104]もいるが、実際には、彼の証明には選択公理は使われていない. ここでは、現代の選択公理を使わない往復論法の証明とカントールの原論文と功力金二郎氏による訳文を併記しておく.

(1) 現代の往復論法の証明

定理:全順序集合$(A,<)$が可算で、最大元、最小元をもたず稠密であれば$(Q,<)$と順序同型である.

(選択公理を使わない証明)

$(A,<)$を可算な稠密全順序で、最大元、最小元をもたないものとする. Aの要素の重複のなく並べ上げ(Nとの対応)を$a_0, a_1, a_2, \cdots$とし、Qの要素の重複のない並べ上げを$q_0, q_1, q_2, \cdots$としておく. これから、$(A,<)$と$(Q,<)$の間の順序同型写像$h \subset A \times Q$を逐次構成してゆく. つまり、最終的な同型を

$$h = \{(a_{i_0}, q_{j_0}), (a_{i_1}, q_{j_1}), \ldots, (a_{i_n}, q_{j_n}), \ldots\}$$

として、各自然数nについて、$h \restriction \{a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\}$ は、$(\{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\}, <)$と$(\{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_n}\}, <)$の間の順序同型になるようにつくっていく.

$(n=0)$

$i_0 = 0, j_0 = 0$ と定義する. つまり、$h(a_{i_0}) = h(a_0) = q_0 = q_{j_0}$ によって第0項に対するhを定義する.

$(n=1)$

$j_1 = min\{\nu \in N \mid q_\nu \in Q - \{q_{j_0}\}\}$ と置いたとき、当然、$q_{j_0} \neq q_{j_1}$である.

1) $q_{j_0} < q_{j_1}$ ならばAが最大元をもたないので

104 『Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite』[31]pp.187-189

$i_1 = min\{\nu \in N \mid a_\nu \in A - \{a_{i_0}\}$ かつ $a_{i_0} < a_\nu\}$と定義出来る.

2) $q_{j_0} > q_{j_1}$ ならばAが最小元をもたないので

$i_1 = min\{\nu \in N \mid a_\nu \in A - \{a_{i_0}\}$ かつ $a_{i_0} > a_\nu\}$と定義出来る.

これより、第2項に対するhの対応を$h(a_{i_1}) = q_{j_1}$ で定義出来る.

ここから先は一般項としてhの構成を行う. 但し、ここでのkは $k \geqq 1$ なる自然数とする.

$(n=2k)$

$i_{2k} = min\{\nu \in N \mid a_\nu \in A - \{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2k-1}}\}\}$ と置いたとき、

1) $a_{i_{2k}} > max\{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2k-1}}\}$ ならばQが最大元をもたないので

$j_{2k} = min\{\nu \in N \mid q_\nu \in Q - \{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{2k-1}}\}$ かつ $q_\nu > max\{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{2k-1}}\}\}$と定義出来る.

2) $a_{i_{2k}} < min\{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2k-1}}\}$ ならばQが最小元をもたないので

$j_{2k} = min\{\nu \in N \mid q_\nu \in Q - \{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{2k-1}}\}$ かつ$q_\nu < min\{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{2k-1}}\}\}$と定義出来る.

3) 1)でも2)でもないならば

$l, l' \leqq n$ が存在して、 $a_{i_l} < a_{i_{2k}} < a_{i_{l'}}$ かつ 任意な $m \leqq n$ に対し $a_{i_l} < a_{i_m} < a_{i_{l'}}$ ではないのである. するとQの稠密性より

$j_{2k} = min\{\nu \in N \mid q_\nu \in Q - \{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{2k-1}}\}$ かつ$q_{j_l} < q_\nu < q_{j_{l'}}\}$と定義出来る.

よって、$h(a_{i_{2k}}) = q_{j_{2k}}$ の対応が定義出来る.

$(n=2k+1)$

$n=2k$の場合におけるAとQの役割を交代するだけで、あとは同様であるが、一応明記しておく.

$j_{2k+1} = min\{\nu \in N \mid q_\nu \in Q - \{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{2k}}\}\}$ と置いたとき、

1) $q_{j_{2k+1}} > max\{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{2k}}\}$ ならばAが最大元をもたないので

$i_{2k+1} = min\{\nu \in N \mid a_\nu \in A - \{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2k}}\}$ かつ$a_\nu > max\{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2k}}\}\}$と定義出来る.

2) $q_{j_{2k+1}} < min\{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{2k}}\}$ ならばAが最小元をもたないので

$i_{2k+1} = min\{\nu \in N \mid a_\nu \in A - \{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2k}}\}$ かつ$a_\nu < min\{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2k}}\}\}$と定義出来る.

3) 1)でも2)でもないならば

$l, l' \leqq n$が存在して、$q_{j_l} < q_{j_{2k+1}} < q_{j_{l'}}$ かつ任意な$m \leqq n$に対して $q_{j_l} < q_{j_m} < q_{j_{l'}}$ ではないのである. するとAの稠密性より

$i_{2k+1} = min\{\nu \in N \mid a_\nu \in A - \{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2k}}\}$ かつ$a_{i_l} < a_\nu < a_{i_{l'}}\}$と定義出来る.

よって、$h(a_{i_{2k+1}}) = q_{j_{2k+1}}$ の対応が定義出来る.

こうしてつくっていけば、$k = 0,1,2,\ldots$に対し、どの$a_k \in A$も$\{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2k+1}}\}$に含まれ、どの$q_k \in Q$も$\{q_{j_0}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_{2k}}\}$に含まれるので、最終的に得られる$h$は$A$から$Q$への全単射になっている. また、$h$が順序を保存することも構成から明らかであり、$h$は$(A,<)$から$(Q,<)$への順序同型写像になる.

Q.E.D.

往復論法から実数の非可算性を証明する部分

系：Rは可算でない．

(証明)

もし R が可算であれば、上記の定理から $(R,<)$ と $(Q,<)$ は同型になる．しかし、$\sqrt{2}$ に収束する有理数列を Q のなかで考えれば極限が存在しないのに、それらを同型写像でうつした実数列には極限が存在するので、両者は同型ではありえない．

Q.E.D.

(2) カントールによる往復論法の原証明

G. Cator, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre（超限集合論の基礎に対する寄与）,1895-97[26]　§9 より抜粋[105]

定理[106]：もし集合Mが単一順序をもち、M およびその順序が

1）$\bar{\bar{M}}=\aleph_0$,

2）M には最低の序列をもつ要素もなく、最高の序列をもつ要素もない,

3）M は至る所稠密である,

という三条件を満たすならば、Mの順序型はη [107]である：

$$\bar{M}=\eta$$

(証明)

条件１）によって、M は順序型ωである整列集合に並べることができる．このような形の一つを固定して、その場合の M をM_0で示すことにし、

$$M_0=(m_1,m_2,\cdots,m_\nu,\cdots)$$

とおく．

さて、ここでわれわれは

$$M\cong R^{108}$$

となることを示さねばならない．換言すれば、われわれが証明すべきことは、Mにおけるその任意の二要素間の序列関係が、それらに対応するＲの二要素間の序列関係と同じになるように、MをＲ上に写像することである．

Ｒの要素r_1には M の要素m_1が対応しているとしてよい．

要素r_2は要素r_1に対してＲ内において或る一定の序列関係をもつ．すると条件２）により、M の要素のうち、M においてm_1に対してもつ序列関係が、（Ｒの中で）r_2がr_1に対してもつ序列関係と同じになるような要素m_νは無数に多く存在するのであるが、そのうちM_0における番号νが最小のものを選んでこれをm_{ι_2}とし、これをr_2に対応させよう．

Ｒの要素r_3は、r_1およびr_2に対してＲにおいて一定の序列関係をもつのであるが、条件２）および条件３）によると無限に多くの M の要素m_νが存在して、m_1とm_{ι_2}に対する（M 内の）序列関係が、r_3がＲ内でr_1およびr_2に対してもつ関係と同じになる．そのようなm_νの中でM_0内での番号が最小のものを取り、これをm_{ι_3}とし、それをr_3に対応することにする．

以下、この規則にしたがって対応をつける操作を続けてゆく．つまり、Ｒのν個の要素

$$r_1,r_2,r_3,\cdots,r_\nu$$

に、M 内の定まった要素

$$m_1,m_{\iota_2},m_{\iota_3},\cdots,m_{\iota_\nu}$$

が像として対応し、しかもこれらはＲにおける対応要素の間の序列関係と全く同じ序列関係を M 内でもつとするとき、Ｒの要素$r_{\nu+1}$に対応させる$m_{\iota_{\nu+1}}$は、M の要素の内で、M において

$$m_1,m_{\iota_2},m_{\iota_3},\cdots,m_{\iota_\nu}$$

に対してもつ序列関係が、$r_{\nu+1}$がＲにおいて$r_1,r_2,r_3,\cdots,r_\nu$に対してもつ序列関係と全く同じになるもののうち、M_0における番号が最小のものとするのである．

このようにすれば、Ｒのすべての要素r_νに対し M の定まった要素m_{ι_ν}が対応の像として指定されることとなり、その上 M の定まった要素m_{ι_ν}はＲにおける対応要素r_νと同じ序列を M 内でもつこととなる．

しかし、この場合、なお証明しなければならないことは、M の要素m_{ι_ν}が M のすべての要素m_νを尽くすこと、あるいはそれは全く同じことになるのではあるが、数列

$$1,\iota_2,\iota_3,\cdots,\iota_\nu,\cdots$$

は単に数列

$$1,\ 2,\ 3,\cdots,\nu,\cdots$$

の置換にすぎないということである．

われわれはこれを完全帰納法によって証明しよう．すなわち、もしすでに$m_1,m_2,\cdots,m_\nu$が写像の値の中に現われたと仮定すると、これに次ぐ要素 $m_{\nu+1}$ もまた同じ事情をもつことを示そう．

いま、λは十分大きくて、

$$m_1,m_{\iota_2},m_{\iota_3},\cdots,m_{\iota_\lambda}$$

の中に、（仮説によって写像の値になっている要素）

$$m_1,m_2,\cdots,m_\nu$$

が現われているものとしよう．そのとき、$m_{\nu+1}$がすでにこの中に現われることもありうるが、その場合には $m_{\nu+1}$は主張通り写像の値の中に現われていることになる．

しかし、$m_{\nu+1}$が要素

[105] http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN237853094&DMDID=DMDLOG_0043&LOGID=LOG_0043&PHYSID=PHYS_0318

[106] 訳は「カントール　超限集合論」[26]pp.34-37 より引用．簡便のため、原文にない「定理：」と云う表題を挿入し、統一性から「到る所」を「至る所」とした．

[107] 0 より大きく、1 より小なるすべての有理数に自然に序列をもたせて得られる集合の順序型

[108] 0 より大きく、1 より小なるすべての有理数に自然に序列をもたせて得られる集合

$$m_1, m_{i_2}, m_{i_3}, \cdots, m_{i_\lambda}$$

の中に現われていない場合でも、$m_{\nu+1}$はこれらの要素とMの中で一定の序列配置をもつのであるが、Rにおいては$r_1, r_2, \cdots, r_\lambda$に対し無限に多くの有理数がこれと同じ序列配置をもつこととなり、その中でR_0[109]において最も番号の小さいものが$r_{\lambda+\sigma}$であると考えてよい。

すると、容易に確認できることではあるが、$m_{\nu+1}$は$m_{\nu+1}$がMにおいて

$$m_1, m_{i_2}, m_{i_3}, \cdots, m_{i_{\lambda+\sigma-1}}$$

に対してもつ序列配置は、$r_{\lambda+\sigma}$がRにおいて

$$r_1, r_2, \cdots, r_{\lambda+\sigma-1}$$

に対してもつ配置と同じとなる．ところで、$m_1, m_2, \cdots, m_\nu$はすでに写像の像の中に現われているので、$m_{\nu+1}$はMの中で

$$m_1, m_{i_2}, m_{i_3}, \cdots, m_{i_{\lambda+\sigma-1}}$$

に対して上の序列配置をもつものの中で、M_0では最小の番号をもつものであり、したがって、上記のわれわれの対応の定義の規則によれば

$$m_{i_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}$$

が得られる．

よって、この場合もまた要素$m_{\nu+1}$は写像の像の中に現われ、しかも$r_{\lambda+\sigma}$がこれに対応するRの要素であることまでわかる．

結局、上記のわれわれの対応規則により、全集合Mが全集合Rの上に相似に写像され、MとRはたがいに相似となり、これでわれわれの証明も完了するのである．

Q.E.D.

5. カテゴリー定理による証明(選択公理を使わないカテゴリー定理とBaireによる原論文)

本論の2節で既に触れたように、カテゴリー定理は、ポーランド空間に対しては選択公理を必要としないが、ベールの原証明では不如意に選択公理が紛れ込ませてしまっていた．ベール自身が選択公理に反対する立場を取っていたことを鑑みれば、この当時の数学者にとっては、この公理を意識して顕在化させることがいかに難しかったかが推し量られよう．

ここでは、選択公理を使わない現在の証明とベール自身の原証明の両方を併記しておく．

（1）選択公理を使用しないカテゴリー定理の証明[110]

（カテゴリー定理）

完備距離空間Xにおいて、空でない開集合Oは痩でない．また、Xが可分でもあるならばその証明に選択公理を使用する必要はない．

（証明）

仮に、Oを空でない開集合であるにも拘わらず、痩であったとする．Oは痩なので定義より、$O = \bigcup_{i \in N} C_i$と書ける．ここでそれぞれの$C_i$は全疎集合[111]である．

一方、O（$\neq \phi$）は開集合なので、それは開球の合併として表される．それ故、ある開球$B(z_0, 2r_0)$が存在してOに含まれる．$D_0 = \overline{B}(z_0, r_0)$と定義すれば、$D_0 \subseteq O$を満たす．$i \in N$に対して、$D_i = \overline{B}(z_i, r_i)$が定義されたと仮定したとき、次のように帰納的に$D_{i+1}$を構成する．$C_i$は全疎集合なので、開球$B(z_i, r_i)$に対し、ある開集合$E_i$（$\neq \phi$）が存在し、$E_i \cap C_i = \phi$　かつ　$E_i \subseteq B(z_i, r_i)$　とできる．

更にE_iは空でない開集合なので、それはある開球$B(z_{i+1}, 2r_{i+1})$を含む．ここで、$r_{i+1} = \min(\frac{r_i}{2}, 2^{-i})$と置き、$D_{i+1} = \overline{B}(z_{i+1}, r_{i+1})$と設定する．このように$z_{i+1}$を選んでいくところに（従属）選択公理を使用している．その構成方法より　$D_{i+1} = \overline{B}(z_{i+1}, r_{i+1}) \subseteq B(z_{i+1}, 2r_{i+1}) \subseteq E_i \subseteq B(z_i, r_i) \subseteq \overline{B}(z_i, r_i) = D_i$が成り立ち、$E_i \cap C_i = \phi$　なので$D_{i+1} \cap C_i = \phi$もまた成り立つ．$D_{i+1} = \overline{B}(z_{i+1}, r_{i+1})$の半径$r_{i+1}$の取り方より、$D_{i+1}$の直径$d_{i+1}$は　$d_{i+1} \leq 2 \cdot 2^{-i} = 2^{-(i-1)}$　を満たす．故に、$\lim_{i \to \infty} d_i = 0$である．よって、この減少列　$(D_i | i \in N)$に対して　Xの完備性よりある$z \in X$　が存在して$\bigcap_{i \in N} D_i = \{z\}$　と出来る．$D_0 \subseteq O$　なので$z \in O$　が言える．一方、すべての　$i \in N$　に対して、$D_{i+1} \cap C_i = \phi$、よって、$z \notin C_i$　が成り立つ．これより、$z \notin \bigcup_{i \in N} C_i = O$．故に　$z \notin O$　であり、$z \in O$と矛盾する．

次に、Xが可分であるならば如上の証明におけるD_iの構成に選択公理を必要としないことを示そう．Xが可分ならば　Xで稠密な可算部分集合が存在しなければならい．これを$\{y_i | i \in N\}$とおき、$\left\{B\left(y_i, \frac{2}{j}\right)\right\}_{(i,j) \in N \times N}$　なる可算近傍系をとる．C_0は全疎集合であるからある$(i_0, j_0) \in N \times N$が存在して

$$B\left(y_{i_0}, \frac{1}{j_0}\right) \subset\subset O - C_0$$

しかも、(i_0, j_0)の選び方として、上記の関係式を満たす$N \times N$の中で先ず、第一成分の最小値i_0を定め、その第1成分のもとでの最小の第2成分と0+1（第1項の0はj_0の0による）の大きい方をj_0と定めることにしておけば(i_0, j_0)は一意的に定まる．こうして$D_0 = \overline{B}\left(y_{i_0}, \frac{1}{j_0}\right)$が定義できる．

次にC_1は全疎集合なので、ある$(i_1, j_1) \in N \times N$が存在して

$$B\left(y_{i_1}, \frac{1}{j_1}\right) \subset\subset B\left(y_{i_0}, \frac{1}{j_0}\right) - C_1$$

(i_1, j_1)の選び方として、先ほどと同様に、上記の関係式を満たす$N \times N$の中で先ず第一成

---

109 $R_0 = (r_1, r_2, \cdots, r_\nu, \cdots)$（但し、$r_\nu < r_{\nu+1}$）は$\omega$という順序型をもっている整列集合である．

110 『Basic Set Theory.』[4] pp.212-213を参考にした．

111 全疎集合とは閉包の内部が空であるような集合

分の最小値i_1を定め、その第1成分の下で最小の第2成分j_1と1+1（第1項の1はj_1の1による）の大きい方を改めてj_1と定める．こうして$D_1 = \bar{B}\left(y_{i_1}, \frac{1}{j_1}\right)$ が定義できる．

以下同様にして、数学的帰納法によって次のような閉球の列が得られる．

$$\bar{B}\left(y_{i_0}, \frac{1}{j_0}\right) \supseteq \bar{B}\left(y_{i_1}, \frac{1}{j_1}\right) \supseteq \cdots \supseteq \bar{B}\left(y_{i_n}, \frac{1}{j_n}\right) \supseteq \cdots$$

$$D_0 \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \cdots \supseteq D_n \supseteq \cdots \quad D_n\text{の直径} = \frac{2}{j_n} \leq \frac{2}{n+1}$$

この減少列　$(D_i | i \in N)$に対して　X の完備性よりある$y \in X$　が存在して $\cap_{i \in N} D_i = \{y\}$ と出来る．以下の証明は上記と同様である．

Q.E.D.

ベールのカテゴリー定理から実数の非可算性を証明する部分

系：Rは可算ではない．

（証明）

R の任意な一点aよりなる集合$\{a\}$は、その閉包が自分自身に一致し、内点を持たないのでRの全疎集合である．いま、Rが可算集合であると仮定しよう．そのとき、$R = \cup_{a \in R}\{a\}$が示すようにRは全疎集合の可算和であるので、定義からRは痩せである．ところがベールのカテゴリー定理より空でない開集合は痩せでないことになり、矛盾．よって、Rは非可算集合である．

Q.E.D.

上記の系の証明より、次のような命題も自然に導出されるであろう．

系′：一点が開集合でない完備な距離空間は、可算集合ではない．

『解析学序説（下）』[93]pp.260 では、これをベールのカテゴリー定理を経由せずに直接証明している．本質的には「完全な完備距離空間の非可算性」の証明と同じである．

（２）　Baire によるカテゴリー定理の原証明

R. Baire, Sur les fonctions de variables réelles(実変数関数について)　［Ann.di Mat.(3).t.Ⅲ(1899)］[5]より[112]

Ⅳ．一般的性質

55．前節に於いて、不連続関数を完全に決定するカテゴリーの特徴づけを得た．それらは以下のような性質である：**任意なこれらの関数は、それぞれの値xにおいて各項が連続であり、収束する関数列によって表現される．**既に、この叙述が結局次のようになることを注意しておいた：**この関数は連続関数列の極限である．**

[112] https://archive.org/details/surlesfonctions00bairgoog　※Baire の学位論文である．

ここでワイエルシュトラスの（多項式近似）定理（※）を使おう：もし関数が連続で、任意に小さく取れる数εが与えられたとすると、各点でその関数との差がε未満であるような多項式を見つけることが出来る．

不連続関数$f(x)$を連続関数列$f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$の極限とする．0に近づく次のような正数の列を考えよう：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$　一般に、関数$f_i(x)$に対して多項式$\varphi_i(x)$をその差がε_iで抑えられるように取ることが出来る．このような条件の下で、次の多項式列をとる：

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x), \ldots$$

（この関数列は）関数列$f_i(x)$の極限$f(x)$を極限とする．それで、この連続関数列の極限はこの多項式列の極限としても見なすことが出来て、（この命題は）多項式列に拡張し得る．次の定理を主張することが出来る：

多項式列の収束関数列によって表現される関数であるための必要十分条件は、その関数が任意なある完全集合に関してのみ不連続であることである．

(*)ワイエルシュトラスの定理の非常に簡単な証明は次の注記のなかでルベーグ氏によって与えられた：**関数の近似について．**（数理科学紀要、1898年11月）

56．**表現可能な関数のいくつかの例を示す．**すべての**半連続関数は表現可能であると言う．**12節で、任意の点で上半連続性の有する関数は、例えば、各点的に不連続であることを見てきた．我々は同じことを、この方法で、より一般的な命題として示している．**完全集合に関して半連続関数は、この集合上で各点的に不連続である．**これは、**任意の半連続関数**が、任意の完全集合に関して各点的に不連続であると云う条件を満たし、したがって**連続関数または多項式関数の関数列の上限と考えることができることより得られる．**

57．異なった順序のもう一つの応用を与えておく．**連続関数$f(x)$がすべての点で導関数**$f'(x)$を持つと仮定する．これは次のことを意味する．

yが0に近づくとき、

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y},$$

がある　つの定まった極限に近づき、それは$f'(x)$である．

ここで次のように定義された関数$\varphi(x,y)$を考えよう：

$$y > 0 \text{ に対しては、} \varphi(x,y) = \frac{f(x+y)-f(x)}{y},$$

$$y = 0\text{に対しては、} \varphi(x,0) = f'(x).$$

その2実変数x、yの関数$(\varphi(x,y))$は、0xに属していない平面上の任意の点において（x、y）の連続関数である．更に、各点0xのそれぞれの点において、それ$(\varphi(x,y))$は、yに対して連続である．だから、**導関数$f'(x)$は一連の連続関数たちで表現可能関数である．**

もし各点での関数$f(x)$の右導関数の存在だけを前提とした場合でも、上記の論法をこの関数$f_d(x)$に適用すると、その結果、$f_d(x)$は表現可能な関数であることが判る．

58．ここで、それらを特徴づける基本的な条件の結果を表し、表現可能関数の性質を深めることを提案する．

先ず、各点的に不連続であると仮定する関数$f(x)$について考察する．特徴的な性質は、任意な区間において、その関数が連続である点が少なくとも一つあることである；変動幅が$\geq\sigma$である点の集合は疎集合であると推定される．今、0に近づく正数の減少列を取る、例えば以下のように：

$$\sigma, \frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2^2}, \cdots \frac{\sigma}{2^n}, \cdots$$

私は変動幅ωが$\geq \frac{\sigma}{2^n}$であるような点集合をP_nと名付ける．もしAが$f(x)$に対する不連続点である場合、正数pが存在して、nがpと等しいかまたは大きいとき、AがP_nの一部である．すべての不連続な点の集合をPと呼び、Pは、集合P_nの極限であると言う．ここでnは無限大に増大するものとする．集合Pは明らかにP_nとは全く異なる種類のものであってもよい；特にそれは任意の区間で稠密であることができる；更に、その極限点が関数の連続的な点であるように、それは必ずしも閉じている必要はない．

59．しかし、これらの所見が自然に次の条件を満たす線形集合Pの性質の研究に導かれることを知る：それぞれが疎な可算無限個の集合$P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$が存在し、$P$の任意な点が集合$P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$の少なくとも一つの要素である．このような性質を持つ集合を第１類と呼ぶことにする．そして、この性質を持たない集合を第２類と呼ぶことにする．

私は先ず次の命題を証明する；もしPが第１類の集合であるならば、Pが定義されている区間$\alpha\beta$の任意な部分で、少なくとも１点（それ故無限個の）Pに属さない点が存在する．[113] 実際、仮定より、我々は$\alpha\beta$内にP_1の任意の点を含まない一つの有限区間$\alpha_1\beta_1$を決定することが出来る；$\alpha_1\beta_1$内にP_2の任意の点を含まない一つの有限区間$\alpha_2\beta_2$を決定することが出来る．以下同様にして$\alpha_{n-1}\beta_{n-1}$内に最初のn個の集合$P_1, P_2, \ldots P_n$の任意の点を含まない一つの区間$\alpha_n\beta_n$を決定することが出来る．[114]少なくとも、すべての区間$\alpha_n\beta_n$の内部に含まれる点Mが存在する．この点Mは、任意な集合P_nの要素ではない、それ故Pの要素でもない．

これより連続的な第２類の集合が存在することが直接結論付けられた．実際、我々は可算無限個の疎集合によって連続区間のすべての点を得ることが出来ないことを示した．[115]

有限個または可算無限個の第１類の集合の合併によって構成された集合は依然として第１類集合である；これはその定義から結論付けられる．

連続体の集合、それは第１類の集合を差し引いたものであり、第１類集合の補集合でもあるのだが、これは第２類の集合である．

先ず、連続体Eからの第１類集合の補集合$E-P$を取り、次に第２類集合として知られているQを取るならば、我々は$E-P$とQは共通点を持つと主張することが出来る．実際、もしそうでなかったなら、Qのすべての点がPに属し、Qは第１類集合と云うことになってしまうからである．

これらの集合の二つのカテゴリーの間には深淵な違いを見ることが出来る．この違いは可算性にも連続区間における圧縮性にも宿っていない．第１類の集合は連続体の基数を持ち得るし、また考えている区間内全体において稠密でもあり得るからである．しかし、それは二つの概念のある種の組合せである．

60．各点的に不連続な関数に戻ろう；そのような関数に対する、不連続点の集合は第１類であるように見える．これに反して一方、連続点の集合は第２類であり、相反する．

これから、私は1881年（*）にボルテラによって与えられた定理の先行する研究に取りかかる．有限個、または同様に可算無限個の各点的に不連続な関数について考察し、同じxの可変区間を定義する．少なくとも一つの関数が不連続である点の集合Pは、集合$P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$の組み合わせによって形成されていて、ここで$P_n$は$f_n(x)$の不連続点の集合である．それ故、我々が見てきたものより、Pは第１類カテゴリの集合である．任意な区間において、すべての考察されている関数が連続であるような点が存在する、と推定される．

前述の提案の結果を導き出そう．各点的に不連続な関数列$f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$が一様に極限$f(x)$に近づくと仮定しよう．すなわち、$x$とは独立に$\varepsilon$をどんなに小さく取っても、$n$が十分大きいときは、$|f(x)-f_n(x)|$が$\varepsilon$よりも小さくなることを言う．これらの条件の下で、$f(x)$は各点的に不連続である．$A[x_0]$がすべての$f_n(x)$に対して共通な連続点であるとすると、それは$f(x)$に対してもまた連続点であることを示せば良い．実際、任意の点で次の関係式が成り立つようなεが与えられるように、最初にnを十分大きく取っておこう．

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

それは特に以下のようになる：

$$|f(x_0)-f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

そのあと、Aの周囲に、下記の関係を満たすように、かなり小さな区間を取る．

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

これらの不等式から下記の不等式が導出される．

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon,$$

これは$f(x)$が点Aで連続であることを示している．

113 この命題こそカテゴリー定理である．
114 ここで（従属）選択公理が使われている．
115 ここで既に実数の非可算性が示されている．

(※)ボルテラ、点集で不連続な関数についてのいくつかの観察結果 (Battaglini ジャーナル、1881 年) [116]

61. ここで、59 節で、陳述された連続性の代わりに完全集合の基礎として与えられた概念を一般化することが出来ることを注意しておきたい.

Gは任意な完全集合とする. 以下ではGの点だけを含むような集合については考察しない. もしPが可算無限個の集合たち$P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$の合併によって形成され、それぞれの集合が$G$に関して稠密ではないとするならば、**$P$は$G$に関して第 1 類である**、と言う. §59 で述べたのと同様、この定義からすべての点に対しての結果を引き出すことができる.

また完全集合G上に定義された可算無限個の関数が存在し、それらの各々がこの集合上で各点的に不連続である場合、Gの任意の点の近傍が存在して、Gの点においてすべての関数は連続であることが判る. もしそれらが一様に極限関数$f(x)$に近づく場合は、すべてのこれらの関数が共通して連続な点では$f(x)$も連続となるであろう.

ここで、一様に極限関数$f(x)$に近づく表現可能な関数列$f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$をもっと仮定する. 任意な完全集合を考えるとき、これまで見て来たように、関数$f(x)$は、それぞれの関数$f_n(x)$のように、この完全集合上で各点的に不連続である；これより$f(x)$は表現可能である.

そこで我々は既知の定理に近い結果を得る：**一様収束する連続関数列は連続関数に収束する**. それを次のように述べることが出来る：**各項が表現可能な関数列の一様収束は表現可能関数に収束する.** (拙試訳)

6. 「殆ど至る所等しい」のルーツ (A. Harnack)

A. Harnack, Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihen(フーリエ級数論における証明の簡易化), Math. Ann. 19 (1882)[37]より抜粋[117]

IV.

もし疎な点集合上で二乗可積分関数が任意に変わるとしても、そのフーリエ級数の係数は変わらない. 故に、最初からの$f(x)$の値が$\varphi(x)$の値に例外なく一致することは必要とされない. と言うのは、$f(x)$の値はこの級数に影響を与えない特定の任意性があるためである. それ故、次の定義は、三角級数に対する第 2 論文の結論で既に強調されていたように、以下の通り正当化される.

[116] 付録 14 の補注を参照のこと.

[117] http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN235181684_0019&DMDID=DMDLOG_0026

あるフーリエ級数がある関数$f(x)$を"概ね"表現するとは、その関数$f(x)$の値（それぞれ、不確定極限値）とその級数の値（それぞれ、不確定極限値）の差異が任意に小さく取った正数δよりも大きくなるような点が常に疎集合しか形成しない場合を言う.

この定義に基づいて、次の命題を設定することが可能である：フーリエ級数、**その係数は被積分関数$f(x)$の二乗積分として形成されるのだが、もまた"概ね"この関数を表現する.**

$\lim f(x+0)$ と $\lim f(x-0)$ がそれぞれ異なる値を取るような点は、無限個の振動を除いて、 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ の値が適用されることが見出された. しかしながら、$f(x)$が積分可能なので、二つの値がδよりも大きくなるこれらの点は疎集合である；それ故"概ね表現可能"であることを妨げるようなことはない. 更にまた、明確なあるいは不明確なやり方で$f(x \pm h)$が無限である点や、または有界な振動による無限個の最大値または最小値がその上でのみで得られるような疎集合；それ故、もしこれらすべての点で、そのフーリエ級数が任意な有限値、無限大かまたは消失発散量を取るならば、未だその表現は概ね無効とはなっていない. [118]

しかし、差異値の消失による変動はあり得る；$f(x)$の積分可能性を除いて、すべての最小の区間で（変動は）存在する. 今、もしフーリエ級数がこれらすべての点で$f(x)$の値により指定可能な大きさの違いがあるならば、そのような提示は概ね存在しないであろう. しかし、実際はそうではないことを、上記の主張の正当性を証明することによって、間接的に知ることが出来る. その式から

$$\varphi(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

ここで$\varphi(x)$は、明らかに、可積分関数であり、右辺の級数は項別に積分されており、差$f(x) - \varphi(x)$が$g(x)$によって表記されるものとするならば.

$$f(x) - \varphi(x) = g(x) = f(x) - b_0 - \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

そして

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\} dx = \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\} \sin kx dx = \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \sin kx dx = 0,$$

[118] つまり、疎集合上で値がどうであっても、概ね表現可能だから.

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\{f(x)-\varphi(x)\}\cos kx dx=\int_{-\pi}^{+\pi}g(x)\cos kx dx=0,$$

その差$f(x)-\varphi(x)=g(x)$はこのように並べられて、これらの積分全体は、その(三角関数の中の助変数)値がkであるかあるいは0である．それは次のとおりである．$g(x)$は"概ね"0である、すなわち、$g(x)$の絶対値（あるいは、その不確定極限）がδよりも大きな点が常に、疎集合だけを形成する．

$-\pi$から$+\pi$の区間内の任意に小さなx_0からx_1の区間を考え、この区間で値1を取り、この区間の外側では値0を取る関数$\Psi(x)$を構成する．この関数は前節のディリクレの定理によりフーリエ級数で表現可能である．それは"概ね"一様に収束し、$\varphi(x)$の値の跳躍点を除いて至る所一致する．その跳躍点での、その級数の値は$\frac{1}{2}$となる．

$$\Psi(x)=\beta_0+\sum_{k=1}^{k=\infty}\alpha_k\sin kx+\beta_k\cos kx,$$

$$\left(\alpha_k=\tfrac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_1}\sin kx dx\quad \beta_k=\tfrac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_1}\cos kx dx\right).$$

それ故、

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\Psi(x)g(x)dx\doteq\beta_0\int_{-\pi}^{+\pi}g(x)dx+\sum_{k=1}^{k=\infty}\alpha_k\int_{-\pi}^{+\pi}g(x)\sin kx dx+\beta_k\int_{-\pi}^{+\pi}g(x)\cos kx dx=0,$$

そしてまた、

$$\int_{x_0}^{x_1}g(x)dx=0.$$

今、$g(x)$の積分が境界の十分近くまで存在するならば、$g(x)$自身もまた"概ね"同様に存在しなければならない．それによれば$g(x)$の積分は、指定された区間$x+\varepsilon$から$x+\varepsilon'$のそれぞれの点に任意に近くとることが出来、関数$g(x)$の値は任意な数δよりも十分小さい．今、

$$\int_{x+\varepsilon}^{x+\varepsilon'}g(x)dx=\{g(x+\varepsilon)\pm(<\delta)(\varepsilon'-\varepsilon)\}=0,$$

すなわち、$g(x+\varepsilon)$の総計はδよりも小さい．

これより次のことが証明された．任意な近傍でそれぞれの点が指定された区間に存在する．差$f(x)-\varphi(x)$の積分の総計が任意に小さな大きさよりも小さく取れる．それで総量がδよりも大きなすべての点は疎点集合だけを形成する．

この二つの定理より、次の二つの重要な結論が導き出される：

1. 各三角級数は、その二乗可積分関数が明確に定義されていることにより、フーリエ級数となる．$f(x)$が三角級数の総和値であるので、それは$f(x)$の積分によって形成されるフーリエ級数になり、一つの関数$\varphi(x)$を決定する．それは$f(x)$と比較して指定された大きさによって定義された$f(x)$の疎集合部分だけが異なり得る．この二つの級数の差は一つの三角級数となり、"概ね"同じ値を取り、それの係数は第二節の第二命題により消滅しなければならない．

2. もし連続関数の値が疎集合上を除いて与えられたならば、連続関数は常に完全に決定されることが知られている．今、$f(x)$（それぞれの最小の区間の中の無限の点に対して無限個の最大値と最小値を保持することを排除するわけではないが）が一貫して連続関数ならば、そのフーリエ級数は一貫して連続関数$\varphi(x)$を提供するわけではないが、それは"概ね" すなわち疎集合を除いて連続な関数を提供する．疎集合は任意に小さな正数δよりも大きく$\varphi(x)$の値が$f(x)$の値から異なる点の集合である．もしxがそのような例外的な位置にあったとするならば、$\varphi(x)$の値は、それが明確に$Lim\,\varphi(x\pm\varepsilon)$であるとき、$f(x)$の値に一致する．次のことは後で決定されるであろう．すなわち、フーリエ級数がある点で発散するとき、$\varphi(x)$の値と連続関数$f(x)$の値との最大の差異の大きさだけこの点で指定することができる；それ（フーリエ級数）が収束する所ならばどこでも、その値は$f(x)$に一致する．

εが0に収束するに従って、$\varphi(x\pm\varepsilon)$の値の数列がそれで存在し、（$\varphi(x)$の）そのような性質により、疎集合上では不確定な跳躍が発生し得る．これらの値を除去することによって、$\varepsilon=0$に対する$Lim\varphi(x\pm\varepsilon)$は、実際、ある一定の大きさとなる。それ故、その命題は証明されるであろう：

もし$f(x)$が常に連続関数ならば、$f(x)$の積分によって形成されたフーリエ級数は至る所で$f(x)$の値を提供し、その級数が発散する点、そしてこのようなの点は疎集合においてにしか存在しないのだが、に於いて、その級数の値は

$$\lim_{\varepsilon=0}\lim_{n=\infty}=\left[b_0+\sum_{k=1}^{k=n}a_k\sin k(x\pm\varepsilon)+b_k\cos k(x\pm\varepsilon)\right].$$

によって明確に与えられる．

一つの特別な制約が与えられているが、それにも拘わらずフーリエ級数は究極の十分性をもった例外のない連続関数の表現である．

（拙試訳）

7. 完全集合のカージナル数（Brouwer によるオリジナルの証明（1910 年発表））

L.E.J. Brouwer, On the structure of perfect sets of points(完全点集合の構造について), Proc. Akad. Amsterdam 12 (1910),[14] pp.785-794.より抜粋[119]

完全点集合の構造

[119] http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00013496.pdf

L. E. J. ブラウエル博士（コルトヴェーグ[120]教授により伝えられている）
(1909 年 3 月 26 日の会議において伝達).

§1.
点集合と要素[121]の集合.

次の直線内で議論される点集合はSp_nの有限領域の内に横たわっているあるものとする.

閉点集合μの要素（という用語）により、我々は（それが）1 点か連結閉点集合であるかであると理解する．従って、それはμに属しており、しかもμに属する他の連結閉点集合には含まれることはない.

我々はμの要素をその点と同様にその要素と見なす．換言すると、我々はμを一方では、点集合として考察し、他方では要素の集合として考察する.

μの要素の中から基本列$S_1, S_2, S_3 \ldots$を選ぼう．そうすると一つあるいはそれより多くの要素 ${}_1S_\omega$、${}_2S_\omega$、…がμに属していて、次の条件を満たす：ここでS_nは完全にあるSp_nの有限領域の内に横たわっており[122]、無限に増加するnに対して要素 ${}_\alpha S_\omega$の一つから（S_nへ）の距離ε_nは無限に減少するものとする．これらの部分 ${}_\alpha S_\omega$を、我々は基本列$S_1, S_2, S_3 \ldots$の極限要素たちと呼ぶ.

それで集合μは要素のその基本列のそれぞれに少なくとも一つの極限要素を含むので、閉点集合は要素の集合としても同様に閉じている.

μの孤立要素によって、我々は一つの要素がμにおけるその残余集合から有限だけ離れている．つまり、一つの要素の残余集合が閉じていることを理解する.

定理 1.　それぞれのμの要素は極限要素か、又は孤立要素のどちらかである.

Sを非孤立要素とする．そのとき、μの中に基本列c^dが存在して、その点$t_1, t_2, t_3, \ldots$はSに属さず、Sのただ一つの点tに収束するとできる．もしt_1がS_1の上にあるならば、S_1はSからある距離ε_1を持つ．基本列のある点t'_2が存在して、（t'_2は）Sから距離$< \varepsilon_1$を持ち、それ故、（t'_2は）S_1上にはなくて他の要素S_2上にある．ε_2をS_2のSからの距離と置くならば、基本列のある点t'_3が存在して、（t'_3は）Sから距離$< \varepsilon_2$を持ち、それはS_1上にもS_2上にもなく、第 3 の要素S_3上にある．このやり方を続けていくと、我々は要素S_1、S_2、S_3…の基本列で、Sの他のいかなる点でもあり得ない唯一の極限要素に収束するものを決定することが出来る.

要素の完全集合であることよって、我々はそれぞれの要素が極限要素であるような閉集合であることを理解する.

要素の完全集合はまた点集合としても完全である；しかし逆は成立しない． なぜなら、完全点集合は孤立要素を含み得ることもあるからである.

我々は次のように言うことが出来る．二つの集合の要素が 1：1 に対応付けがされ得て、一方の集合の基本列の極限要素が他方の集合の基本列の極限要素に対応するならば、二つの集合の要素は同じ幾何学的型の位数である．それで一般的に、要素の集合として見なされた閉集合は、点集合として見なされた場合と同様には、同じ幾何学的型の位数を持たない.

連結部分を持たないとき、つまりすべての要素が点であるとき、我々は（そのような）閉集合を各点的（punctual）であると呼ぶ.

§2.
カントールの基本定理とその拡張

点集合論の基本定理は次の通りである：

もし我々が閉集合の中の孤立点を除去し、残った集合から再び孤立点を超越的に取り除き続けるとするならば、この手続きは可算回で終了する.

カントールとベンディクソンは、2級の超越基数Ω[123]の概念の助けによって、この定理を証明したのだが、しかしながら、この定理の発見がすべての数学者から認められているわけではない．リンデレーフはこの概念と独立な証明を与えた．しかしながら、考えられないものを残すその除去手続き、その結果は多少の驚きをもって得られた.

線形集合に対してのみ、基本定理の証明は与えられてきた．同時にその証明は除去手続きに従い、Ωと独立である.

この除去手続きの完遂の後に残る残余集合は、それは我々がカントールの残余集合と呼ぶことのあるものなのだが、カントールによると完全点集合である．しかしながら、最も一般的な意味では、一般に要素の完全集合ではない.

基本定理の拡張はショーンフィールドによって明確に述べられ、私によって証明された．それは以下のように定式化され得る：

もし我々が閉集合の中の孤立要素を除去し、残った集合から再び孤立要素を超越的に取り除き続けるとするならば、この手続きは可算回で終了する.

この定理に対して私が与えた証明は形式的にはリンデレーフの方法の一般化となっているが、同時に私は除去手続きに従う証明を公表した．今、それをここで与えよう；それは基本定理の証明に含まれるが、既存のものよりも著しく簡単で、Ωとは独立であり、除去手続きに従う.

Sp_{n-1}が直交系を含んでいることにより、我々はSp_nを辺aを持ったn次元立方体に分ける、これらの立方体のそれぞれを$\frac{1}{2}a$の辺を持った2^nの立方体に分け、後者のそれぞれを$\frac{1}{4}a$の辺

[120] Diederik Korteweg (1848 - 1941)　KdV (Korteweg–de Vries) 方程式で有名なオランダの数学者．Brouwer の指導教官である.
[121] 現代の定義なら「連結成分」にあたるものを指しているものと思われる.
[122] ここは "finite domain of a Sp_n" を補って訳した.
[123] 本論の脚注 58 参照

を持った2^nの立方体に分ける、以下同様.

すべてのこのようなやり方で構成された立方体は立方体の可算集合Kを付随して構成する.

今、μを与えられた閉集合とすると、Kは類似の可算集合K_1、これはμの点を内部や境界に含むそれらの立方体からなるのだが、を部分として保持する.

それぞれのμの孤立点や孤立要素の除去に対し、K_1の少なくとも一つの[124]立方体の除去について、今、答えよう；しかし後者の除去は可算だけで可能である. 前者も同様で、カントールの定理とショーンフィールドの定理が両方一緒に証明される.

残余集合を、すべての孤立要素の除去の後の残余のことなのだが、ショーンフィールド残余集合と呼ぶことにする. そのとき定理1の見地に立って、我々は次のように形式化することが出来る：

定理2. ショーンフィールド残余集合は要素の完全点集合である.

§3.
要素の完全集合の構造

S_1とS_2を完全要素集合μの二つの要素とする. μの有限個の要素を、S_1をその最初の要素としS_2を最後の要素として有するように、一行の中に分けて設置することは可能である. その行の二つの連続的な（つまり隣同士の）要素の間の距離が（常に）aよりも小さい. このとき、S_2はS_1のaグループに属すると呼ぶ.

もしS_2とS_3の両方がS_1のaグループに帰属するならば、S_3もまたS_2のaグループに属し、μはaグループのある数に分かれる. この数は有限である. なぜなら異なる二つのaグループの距離がaよりも小さいことはあり得ないからである. （もし小さかったら同じaグループということになる）

もし$a_1 < a_2$で、μのa_1グループとa_2グループが与えられていたならば、これらは完全に分離されているか、又はa_1グループがa_2グループに含まれるかのどちらかである.

もしμの2要素S_1とS_2が与えられているならば、ある一つのaの最大値が、μの異なったaグループにあるS_1とS_2に対して、存在する. その値を我々はμに於けるS_1とS_2を分離する境界と呼び、それを$\sigma_\mu(S_1、S_2)$と表す.

更に、もしS_1とS_2の距離を$\alpha(S_1、S_2)$で表すならば、$\sigma_\mu(S_1、S_2)$は$\alpha(S_1、S_2)$が0に収束するとき$\alpha(S_1、S_2)$に収束する. しかし、逆にまた、$\alpha(S_1、S_2)$は$\sigma_\mu(S_1、S_2)$（が0に収束するとき$\sigma_\mu(S_1、S_2)$）に収束する. と言うのは、もしそうでないならば$\sigma_\mu(S_1、S_2)$の0への収束性がμの連結部分の存在を伴っており、その（連結成分の）中にμの異なる要素が含まれるので、それは不可能である、

我々がμの変動の幅と呼び、異なるaグループに分かれるμに対するaの最大値は、それを

[124] （原注）無限個でさえも.

$\delta(\mu)$で表す. このμの変動の幅は、同時に、$\sigma_\mu(S_1、S_2)$がμの二要素S_1, S_2で取ろうとする最大値である.

少なくともn個の異なるa-グループに分かれるμに対するaの最大値は、我々がμのn-分割に対する変動の幅と呼び、それを$\delta_n(\mu)$で表す. 明らかに、$\delta_n(\mu) \leq \delta(\mu)$である.

更に、μに対して、$n_{k-1}(\mu)$と$n_k(\mu)$の間のnに対して$\delta_n(\mu)$が$\delta_{n_{k-1}(\mu)}(\mu)$に等しいというやり方で増加正値整数列$n_1(\mu)$, $n_2(\mu)$, $n_3(\mu)$,…が存在する. この量$\delta_{n_k(\mu)}(\mu)$を**k階のμの変動の幅と呼び**、$\delta^{(k)}(\mu)$と表す.

我々は、今、μをm_1個の完全要素集合μ_1 ,…μ_{m_1}に分けて、$\delta(\mu_h) \leq \delta_{m_1}(\mu)$でありかつ$\alpha(\mu_{h_1}、\mu_{h_2}) \geq \delta_{m_1}(\mu)$であることが可能であると断言する.

即ち、$\delta_{m_1}(\mu)=\delta^{(k)}(\mu)$と置く；すると我々は求める数$m_1$を、同じ$\delta^{(k-1)}(\mu)$-グループに属する$\delta^{(k)}(\mu)$-グループのある数に対してそれぞれの$\mu_h$を構成することで、得ることが出来る. それで我々はまた条件$\alpha(\mu_{h_1}、S\mu_{h_2}) \geq \delta_{m_1}(\mu)$を満たすことを確信する.

更に、我々は同じ$\delta^{(k-1)}(\mu)$-グループの$\delta^{(k)}(\mu)$-グループを、二つの隣接するそれらの間の距離が$\delta^{(k)}(\mu)$に等しいように、一行の中に置くことが出来る. もし我々がそれぞれのμ_hが抵触しないそのような行の線分からなっていることに気を付けるならば、そのとき条件、$\delta(\mu_h) \leq \delta_{m_1}(\mu)$もまた満たされる.

今、同様のやり方でそれぞれのμ_hをm_2個の完全要素集合μ_{h_1},… $\mu_{h_{m_2}}$に、$\delta(\mu_{h_i}) \leq \delta_{m_2}(\mu_h)$で、かつ$\alpha\left(\mu_{h_{i_1}}, \mu_{h_{i_2}}\right) \geq \delta_{m_2}(\mu_h)$を満たすように、分けよう. そして、この手続きを無限に続けよう.

それで、もし我々が添字νの任意な行をF_νによって表すならば、我々は常に次式に出くわすであろう.

$$\delta_{m_\nu}(\mu_{F_{\nu-1}}) \leq \delta_{m_1+m_2+\cdots m_\nu+1-\nu}(\mu) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

μが完全要素集合なので、変動の幅$\delta(\mu_{F_\nu})$は、νの無限の増加に対してのみ、0に収束する；しかしながら公式（A）の対象外では、νの無限の増加に対して、0への収束が常に起こり、実際、すべての同時の分解のν階要素に対して（0への収束は）一様である.

同時に、一つとそれと同じ分解のν階要素にあるそれぞれの二要素を分離する境界は一様に0に収束する；それでこれらの分解要素たちはそれぞれ一様に一要素に収束する.

結局、もしμの要素の可変な対が与えられたとするならば、最小の分解要素の順番、両方がそこに含まれているのだが、が無限に増加するとき、それらの距離は0にだけ収束する.

この分解の過程が達成される最も単純な様式はすべてのm_kを2に等しく取ることである. それで、第1階の分解の二つの（構成）要素がμ_0とμ_2によって表され、第2階のそれらがμ_{00}、μ_{02}、μ_{20}、μ_{22}によって表され、以下同様であるならば、このようなやり方で、異なるμの要素は数字0と2からなる異なる基本列と1対1に対応する. それらの基本列に対し共通して引き起こされた分割が無限に増加するとき、二つの要素（基本列）はそれぞれ収束し、しかもただ一つに収束する.

一方で、0と1の間の実数の線形連続体の中の、無限個の数字0と2によって三進システムで表現され得る、これらの数の完全点集合π（いわゆるカントール集合）について考えよう．πの幾何学的型の位数を我々はζによって表現するであろう．

それらの数列に対し共通して引き起こされた分割が無限に増加するとき、πの二つの数列はそれぞれ収束し、しかもただ一つに収束する．

それで、もしわれわれがそのような、μの要素とπの数の間の1対1対応、μのそれぞれの要素に対する添字の列はπの対応する数の数列に等しい、に気づくならば、μの要素の基本列の極限要素は対応するπの数列の極限の数に対応する．それで我々は次のように定式化することが出来る：

定理3. 任意な要素の完全集合は位数ζの幾何学的型を持つ.

考察の対象となる集合が各点的で、しかも平面上にある場合、その定理は直接、次の良く知られた性質から保証される：

我々は一つの単純曲線の弧をそれぞれ平面上の閉各点的集合に移すことが出来る.

§2で述べたシェーンフリースの定理を定理3と組み合わせることで、我々は次のことが言える：

定理4. 任意な閉集合は２つの要素の集合からなる；それらの一つは保持する．もし消えないならば、それは位数ζの幾何学的型であり、他方（つまり消えた方）は可算である.

（拙試訳）

8. 完全集合のカージナル数（辻正次、『集合論（1933年）』からの抜粋）

完全集合[125]のカージナル数はcであることを証明しよう．完全集合は定義により各点が集積点である閉集合である．故にMを完全集合とすれば、Mは少なくとも二点P_0, P_1を含む．P_0, P_1を中心として円U_0, U_1を書き、その半径は１より小さく且つU_0とU_1は交わらないようにする．P_0, P_1はMの集積点なる故、U_0, U_1の中にそれぞれP_0, P_1とは異なるMの点$P_{00}, P_{01}; P_{10}, P_{11}$が選べる．これらの点を中心にして半径が1/2より小さく且つ互いに交わらないようにまたU_0, U_1の中にあるように円を書き、これを$U_{00}, U_{01}; U_{10}, U_{11}$と名づける．$U_{00}, U_{01}; U_{10}, U_{11}$のおのおのの中に更に二点をとりこれらを$P_{000}, P_{001}; \cdots$とし以下同様に進むものとする．かくして$P_{a_1,a_2,\ldots a_n}$のような無数の点が得られる．ここに$a_1, \cdots a_n$は０または１である．上の半径の選び方から

$$P_{a_1}, P_{a_1,a_2}, \ldots P_{a_1,a_2,\ldots a_n} \cdots \qquad (1)$$

なる点列は一点Pに収束する．このPはMが完全集合なる故、Mに属する．次に（１）とは異なる点列

$$P_{b_1}, P_{b_1,b_2}, \ldots P_{b_1,b_2,\ldots b_n} \cdots \qquad (2)$$

をとる．点列が違うとは

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

をくらべてみた時、すべて $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots a_n = b_n, \ldots$にはなっていないことである．それ故どこかで$a_k \neq b_k$のようなところがある．この時は$U_{a_1 \ldots a_k}$と$U_{b_1 \ldots b_k}$とは交わらない円になる．それ故$P_{a_1}, P_{a_1,a_2}, \ldots$の極限点P(これは明らかに$U_{a_1 \ldots a_k}$の中にある)と$P_{b_1}, P_{b_1,b_2}, \ldots$の極限点$P'$（これは明らかに$U_{b_1 \ldots b_k}$の中にある）とは異なる．それ故数列$(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$に対しては、$P_{a_1}, P_{a_1,a_2}, \ldots P_{a_1,a_2,\ldots a_k} \cdots$の極限点Ｐが対応し、数列$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$とは異なる数列$(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$に対応する$P_{b_1}, P_{b_1,b_2}, \ldots P_{b_1,b_2,\ldots b_k} \cdots$極限点$P'$は$P$とは異なる故、数列$(a_1, a_2, \ldots)$をあらゆる仕方でとれば、それに対して$M$の異なった点が得られる故、$M$は数列$(a_1, a_2, \ldots)$全体の集合と同等なる部分集合を含む．然るに数列$(a_1, a_2, \ldots)$全体の集合はとりもなおさず（1,2,…,n,…）なる可付番集合を{0,1}なる二要素からなる集合で覆った集合にほかならない故、そのカージナル数は$2^a = c$ である[126]．

故に定理30[127]により

$$M\text{のカージナル数} \geqq c.$$

然るにMはカージナル数cをもつ平面全体の点の集合[128]の部分集合なる故、定理30により

$$M\text{のカージナル数} \leqq c$$

であるから

$$M\text{のカージナル数} = c.$$ [129]

定理70. 完全集合のカージナル数はcである．

上の簡単な証明はブラウワーによるものである．

[125] ここでの完全集合は現代のものと少し異なる．また、本書での議論は「点集合論」であって、距離空間ではない．従って、前提としてR^n（ここではR^2）での話であり、可分性などは暗黙の裡に仮定されている．

[126] ここで既に実数の濃度cが非可算であることが前提となっている．

[127] 定理30：Ｍのカージナル数をm,Nのカージナル数をnとし、且つＭがＮの部分集合に同等な時はm≦n.

[128] ここで平面全体の点の濃度もcであることが前提となっている．

[129] 特に断ってはいないがCantor－Bernsteinの定理による．

9. 完全集合のカージナル数 (現在の証明と Baire によるオリジナルの証明(1905 年発表))

(1) 現在のベール流の証明

下記の定理は、1905 年にベールが証明した「完全集合は非可算」をブラッシュアップしたものである。

(定理)　完全[130]な完備距離空間Xは非可算集合である．また、X が可分でもあるならばその証明に選択公理を使用する必要はない.

(証明)

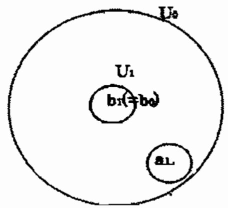
$X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$　と仮定する．先ず、a_0に対しては、Xは完全集合なので、a_0とは異なる$b_0 \in X$を取ることが出来る.

Xは距離空間なので、ある実正数r_{a_0}, r_{b_0}が存在して、

$\bar{B}(a_0, r_{a_0})$[131] $\cap \bar{B}(b_0, r_{b_0}) = \emptyset$

と出来る．簡単の為、$U_0 = \bar{B}(b_0, r_{b_0})$とおく.

次にa_1に対して以下のようにb_1を取ることが出来る.



(Case 1)

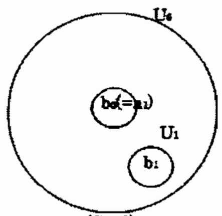
(Case1)　$b_0 \neq a_1$ の場合　$b_1 = b_0$ とおき、

$\frac{1}{2} r_{b_0} > r_{b_1}$　かつ　$\bar{B}(a_1, r_{a_1}) \cap \bar{B}(b_1, r_{b_1}) = \emptyset$

を満たすように実正数r_{a_1}, r_{b_1}を取る.

$U_1 = \bar{B}(b_1, r_{b_1})$ とおくと、$U_1 = \bar{B}(b_1, r_{b_1}) \subset \bar{B}(b_0, r_{b_0}) = U_0$であり、

$b_j \in U_j$ $(j = 0,1)$ $a_0 \notin U_0$, $a_0, a_1 \notin U_1$　である.



(Case2)

(Case2)　$b_0 = a_1$ の場合 Xは完全だから

ある点$b_1 \in B(b_0, r_{b_0}) \subset U_0$が存在して、$b_1 \neq b_0$と出来る.

$\frac{1}{2} r_{b_0} > r_{b_1}$　かつ　$\bar{B}(a_1, r_{a_1}) \cap \bar{B}(b_1, r_{b_1}) = \emptyset$　かつ　$\bar{B}(b_1, r_{b_1}) \subset U_0$

を満たすように実正数r_{a_1}, r_{b_1}を取る.

$U_1 = \bar{B}(b_1, r_{b_1})$ とおくと、

$U_1 = \bar{B}(b_1, r_{b_1}) \subset \bar{B}(b_0, r_{b_0}) = U_0$であり、

$b_j \in U_j (j = 0,1)$ $a_0 \notin U_0$, $a_0, a_1 \notin U_1$ である.

一般に、a_n に対して次のようにb_n を取ることが出来る．そして、そのように取り続けることが出来るところに（従属）選択公理を使用している.

(Case1)　$b_{n-1} \neq a_n$ の場合　$b_n = b_{n-1}$ とおき、

$\frac{1}{2} r_{b_{n-1}} > r_{b_n}$　かつ　$\bar{B}(a_n, r_{a_n}) \cap \bar{B}(b_n, r_{b_n}) = \emptyset$

を満たすように実正数r_{a_n}, r_{b_n}を取る.

$U_n = \bar{B}(b_n, r_{b_n})$ とおくと、$U_n = \bar{B}(b_n, r_{b_n}) \subset \bar{B}(b_{n-1}, r_{b_{n-1}}) = U_{n-1}$であり、

$b_i \in U_i (i = 0,1,2 \dots n), a_j \notin U_{n-1} (j = 0,1,2 \dots, n-1), a_k \notin U_n (k = 0,1,2 \dots, n)$である.

(Case2)　$b_{n-1} = a_n$ の場合 Xは完全だから

ある点$b_n \in B(b_{n-1}, r_{b_{n-1}}) \subset U_{n-1}$が存在して、$b_n \neq b_{n-1}$と出来る.

$\frac{1}{2} r_{b_{n-1}} > r_{b_n} > 0$ かつ$\bar{B}(a_n, r_{a_n}) \cap \bar{B}(b_n, r_{b_n}) = \emptyset$ かつ$\bar{B}(b_n, r_{b_n}) \subset U_{n-1}$を満たすように正実数$r_{a_n}, r_{b_n}$を取る.

$U_n = \bar{B}(b_n, r_{b_n})$ とおくと、$U_n = \bar{B}(b_n, r_{b_n}) \subset \bar{B}(b_{n-1}, r_{b_{n-1}}) = U_{n-1}$であり、

$b_i \in U_i (i = 0,1,2 \dots n), a_j \notin U_{n-1} (j = 0,1,2 \dots, n-1), a_k \notin U_n (k = 0,1,2 \dots, n)$である.

U_nはその作り方より直径 $d(U_n) \to 0$、各U_nは閉集合なのでXの完備性より

唯一の点$b \in \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n \subset X$　が存在する.

一方、$X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ であると云う仮定から $b = a_m$ となるような自然数mが存在しなければならない．ところが　$a_m \notin U_m$なので$a_m = b \in \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$　に矛盾する.

次に、X が可分であるならば如上の証明におけるU_kの構成に選択公理を必要としないことを示そう．X が可分ならば X で稠密な可算部分集合が存在しなければならい．これを$\{b_m | m \in N\}$とおき、$\left\{B\left(b_m, \frac{2}{n}\right)\right\}_{(m,n) \in N \times N}$なる可算近傍系をとる.

ある$(m_0, n_0) \in N \times N$が存在して

$$B\left(b_{m_0}, \frac{1}{n_0}\right) \subset\subset X - \bar{B}\left(a_0, \frac{1}{1}\right)$$

しかも、(m_0, n_0)の選び方として、上記の関係式を満たす $N \times N$の中で先ず、第一成分の最小値m_0を定め、その第１成分のもとでの最小の第２成分と 0+1（第１項の０はn_0の０による）の大きい方をj_0と定めることにしておけば(m_0, n_0)は一意的に定まる．こうして

$U_0 = \bar{B}\left(b_{m_0}, \frac{1}{n_0}\right)$ が定義できる.

次にある$(m_1, n_1) \in N \times N$が存在して

$$B\left(b_{m_1}, \frac{1}{n_1}\right) \subset\subset X - \bar{B}\left(a_0, \frac{1}{1}\right) - \bar{B}\left(a_1, \frac{1}{2}\right)$$

130　距離空間Xの部分集合Aに対し、Aに属する点qがAの集積点であるとは、qの任意の近傍がq以外のAの点を含むときを云う．Aの任意の点が集積点であるような空間を完全と云う．ここでは、$A = X$の場合を考える.

この定理で、完備性と完全性はともに不可欠な条件である．実際、Zに自然な距離を入れれば完備距離空間であるが、完全集合ではなく、可算である．Qに自然な距離を入れれば完全距離空間となるが、完備ではなく、可算集合である.

131　$B(c, r)$は点cを中心とし、半径rの開球を表し、$\bar{B}(c, r)$はその閉包である閉球を表す.

(m_1, n_1)の選び方として、先ほどと同様に、上記の関係式を満たす$N \times N$の中で先ず第一成分の最小値m_1を定め、その第1成分の下で最小の第2成分n_1と 1+1（第1項の1はm_1の1による）の大きい方を改めてn_1と定める．こうして$U_1 = B\left(b_{m_1}, \frac{1}{n_1}\right)$ が定義できる．

以下同様にして、数学的帰納法によって次のような閉球の列が得られる．

$$B\left(b_{m_0}, \frac{1}{n_0}\right) \supsetneq B\left(b_{m_1}, \frac{1}{n_1}\right) \supsetneq \cdots \supsetneq B\left(b_{m_k}, \frac{1}{n_k}\right) \supsetneq \cdots$$

$$U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \cdots \supsetneq U_k \supsetneq \cdots \quad U_k\text{の直径} = \frac{2}{n_k} \leq \frac{2}{k+1}$$

この減少列　$(U_k | k \in N)$に対してXの完備性よりある$b \in X$　が存在して$\bigcap_{k \in N} U_k = \{b\}$と出来る．以下の証明は上記と同様である．　**(証明終)**

距離空間ではなく位相空間に対しても、容易に、同様の命題と証明を構成することが出来る。

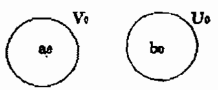
(定理 2)　完全な局所コンパクト・ハウスドルフ空間[132]Xは非可算集合である．また、Xが可分でもあるならばその証明に選択公理を使用する必要はない．

(証明)

$X = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ と仮定する．

a_0に対して、Xは完全集合なので、$b_0 \neq a_0$なる$b_0 \in X$を取ることが出来る．

Xは局所コンパクト・ハウスドルフ空間なのでa_0のあるコンパクト近傍V_0とb_0のあるコンパクト近傍U_0が存在して、$V_0 \cap U_0 = \emptyset$とすることが出来る．

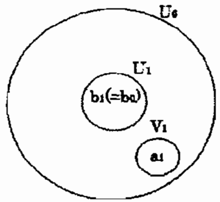


次にa_1に対して以下のようにb_1を取ることが出来る．

(Case1)　$b_0 \neq a_1$ の場合

$b_1 = b_0$とおき、Xが局所コンパクト・ハウスドルフ空間なのでa_1のあるU_0に含まれるコンパクト近傍V_1とb_1のあるU_0に含まれるコンパクト近傍U_1が存在して、$V_1 \cap U_1 = \emptyset$とすることが出来る．

よって、$b_j \in U_j (j = 0,1), a_0 \notin U_0, a_0, a_1 \notin U_1$ である．

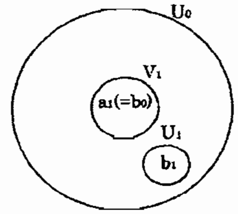


(Case1)

[132] 局所 compact は単に任意の点が compact 近傍を持つことを保証するに過ぎないが、Hausdorff 性もあれば compact 近傍よりなる基本近傍系を持つことまで保証される．また、極端な例として$X = \{a, b\}$ に密着位相を入れると非 Hausdorff で完全な局所 compact 空間となるが、これは可算集合である．つまり、Hausdorff 性は必要である．

(Case2)　$b_0 = a_1$ の場合

U_0はb_0のコンパクト近傍であったからU_0の開核$\mathring{U}_0$はb_0の開近傍であり、Xは完全であったから$b_1 \neq b_0$なる$b_1 \in \mathring{U}_0$が存在する．Xが局所コンパクト・ハウスドルフ空間なのでa_1のあるU_0に含まれるコンパクト近傍V_1とb_1のあるU_0に含まれるコンパクト近傍U_1が存在して、$V_1 \cap U_1 = \emptyset$とすることが出来る．



(Case2)

よって、$b_j \in U_j (j = 0,1), a_0 \notin U_0, a_0, a_1 \notin U_1$ である．

一般に、a_n に対して次のようにb_n を取ることが出来る．

そして、そのように取り続けることが出来るところに(従属)選択公理を使用している．

(Case1)　$b_{n-1} \neq a_n$ の場合

$b_n = b_{n-1}$ とおき、Xが局所コンパクト・ハウスドルフ空間なのでa_nのあるU_{n-1}に含まれるコンパクト近傍V_nとb_nのあるU_{n-1}に含まれるコンパクト近傍U_nが存在して、$V_n \cap U_n = \emptyset$とすることが出来る．

よって、$b_i \in U_i$ $(i = 0,1,2 \ldots n)$, $a_j \notin U_{n-1} (j = 0,1,2 \ldots, n-1)$, $a_k \notin U_n (k = 0,1,2 \ldots, n)$である．

(Case2)　$b_{n-1} = a_n$ の場合

U_{n-1}はb_{n-1}のコンパクト近傍であったからU_{n-1}の開核$\mathring{U}_{n-1}$はb_{n-1}の開近傍であり、Xは完全であったから$b_n \neq b_{n-1}$なる$b_n \in \mathring{U}_{n-1}$が存在する．$X$が局所コンパクト・ハウスドルフ空間なので$a_n$のある$U_{n-1}$に含まれるコンパクト近傍$V_n$と$b_n$のある$U_{n-1}$に含まれるコンパクト近傍$U_n$が存在して、$V_{n-1} \cap U_{n-1} = \emptyset$とすることが出来る．

よって、$b_i \in U_i (i = 0,1,2 \ldots n), a_j \notin U_{n-1} (j = 0,1,2 \ldots, n-1), a_k \notin U_n (k = 0,1,2 \ldots, n)$ である．

各U_nはコンパクトであり$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$なのである$b \in \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n \subset X$が存在する．

$X = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$　$a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ であると云う仮定からある$m \in N$が存在して、$b = a_m$　となる．

ところが　$a_m \notin U_m$なので矛盾

X が可分であるならば如上の証明におけるU_kの構成に選択公理を必要としないことは定理1と同様である．

(証明終)

(補注 1)

これらの証明方法は、一見、区間縮小原理による証明が一番近いように思えるが、カントールの区間縮小原理による証明が実数の順序構造を本質的に使っているのに対し、この証明方法は使っていない。その差が次のような例ではっきりする。カントール集合[133] C の非可算性の証明でカントールの区間縮小原理をそのまま適用する訳には行かない[134]が C がこの定理の前提条件を満たしていることは容易に示せる。ついでながら、往復論法も C の非可算性の証明には全く無力であることも自明である。また、測度論的証明と対角線論法がこの証明と異なる思想圏にあることも明らかであろう。実は、カテゴリー定理による証明方法がこれら定理の証明方法に最も近く、本質的には同じである。そのことを実感するには、カテゴリー定理の証明とその系としての実数の非可算性の証明を並べ、カテゴリー定理を経由せずに直接非可算性の証明を与えるように証明の書き換えを試みれば良い。自然に定理 1、定理 2 とその証明が現れるであろう。[135]カテゴリー定理は完備距離空間だけではなくハウスドルフ局所コンパクト空間に対しても成立するが、そのことにも整合的に対応している。カテゴリー定理の証明方法との近親性は同じ人物によってなされたことにより、一層の説得力が増し、本証明はカテゴリー定理の系としての証明の本質がよりよく見える直接証明に過ぎない、との見方も出来よう。[136]

(補注 2)

これらの定理は、位相空間や距離空間にどの程度の条件を付与すれば非可算基数を持つのか、と云う問題への回答にもなっている。その有効性を示すために、次のような定理 2 の系を示しておく。

系　ハウスドルフ位相体 X が局所コンパクトでかつディスクリート[137]でないときは非可算集合である.

(証明)

X はディスクリートでないので X の加法の単位元 0 は集積点である.

X の加法に関しての均質性から X の各点は集積点である.

これは X が完全集合であることを示している.

(証明終)

この系自体は全く trivial なものであるが、下記のよく知られた「連続体の構造定理」(例えば『連続群論』[56]第 4 章[138])により、この系で抽象的に仮定されている「ディスクリートでないハウスドルフ局所コンパクト」位相体が昔からよく知られている典型連続体に帰着することを想起すれば、これら典型連続体の非可算性の証明が一斉になされたとも言える.

(連続体の構造定理)

X をディスクリートでないハウスドルフ局所コンパクト位相体とする.

1) X が連結ならば X は実数体 R、複素数体 C、4 元数体 H のいずれか 1 つと同型である。

2) X が連結でなければ、全不連結で、p 進数体 Q_p 上の有限階数の多元体、または有限体を係数とする形式冪級数体上の有限階数の多元体と同型である。

(補注 3)

歴史的には数直線の完全集合の濃度が連続の基数を有することは既に、1884 年にカントールによって示されているが[139]、その証明方法は完全集合の点列と区間列との間に 1 対 1 対応を与えるものであった。つまりその非可算性の証明は実数の非可算性を先に示しておく必要があった。それに対し、ベールの証明方法は完全集合が非可算であることを、実数の非可算性を必要とせずに、示している。

冒頭の注釈でも述べたように、著者はこの証明を載せている書籍を調査し切れていない。しかしながら、点集合論で、実質的には同じアイデアの証明を『極限論と集合論』(1944

[133] Cantor 集合 C
閉区間[0,1]の部分集合 C を以下の手順で定義する. まず $C_0=[0,1]$ とおく、次に C_0 を 3 等分し、そのうちの中央の 1/3 開区間を除いた集合を C_1 とする. すなわち $C_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$. さらに C_1 に属する各部分区間[0,1/3],[2/3,1]をおのおの 3 等分し、そのうちの中央の 1/3 開区間を除いた集合を C_2 とする. すなわち $C_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[8/9,1]$. これを繰り返して集合の減少列 $C_n, n=0,1,2,\cdots$ を定め、最後にその共通部分として C を定義する. この C を Cantor 集合あるいは Cantor の 3 進集合と呼ぶ. 尚、歴史的由来については付録 14,15 参照のこと.

[134] $C=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$ とし、特に $a_0=1/3$, $a_1=2/3$ であったとするなら、$I_0=[a_0,a_1]$ に対して $I_k\subset I_0$ を取ることが出来ない. 従って、区間縮小原理に持ち込めない. 但し、Sierpinski 流の証明なら適用可能である.

[135] 付録 5 (1) 系′ 参照.

[136] どこまでを拡張で、どこからを別証明と考えるかは微妙な解釈の問題である. カテゴリー定理の系による証明に対し、「この証明もカントルの 1873 年のもとの証明を一般化したものとなっている.」『巨大基数の集合論』[45]pp.26 との見方もある. その意味では、完全集合の濃度による証明も区間縮小原理による証明の一般化と言える.

[137] 位相群 G は、それが集積点をもたないとき、即ち、その各元 g がその点 g のみより成る近傍をもつとき、ディスクリートであるという. 『連続群論』[56](§18, A) 空間 G の均質性により、実際は、その単位元が群の孤立点であるとき、かつそのときに限り、ディスクリートである.

[138] この本では構造定理に Hausdorff 性を仮定していないように見えるが、それは本書の位相空間の定義が現在の標準的なものと微妙に異なるからである. 例えば、第 2 章 §8 定義 12,13 によれば一般位相空間の段階で 1 点集合は閉集合であることになり、定義 18 では正則空間と Hausdorff 空間を異なる概念として定義している. 参照するときは注意を要する. 上記の構造定理についても『数学辞典第 4 版』[91] (16.p 位相体) では Hausdorff 性が仮定された記述となっている.

[139] Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten [21] §19

年）[92]に見ることが出来る。[140]

能代氏が本書を出版する 10 年程前に上梓されていた辻正次氏の『集合論』[89]では「完全集合のカージナル数は c である.」の証明がブラウエルに由来することは本人の付言により明らかなのだが[141]、能代氏の証明の方はベールからの引用・簡略化なのか、自身のオリジナルなのかは判らない。ただ、『集合論』の方で、「完全集合のカージナル数は c である.」ことが証明されているにもかかわらず、「空でない完全集合 E の濃度は $\aleph_0$ よりも大である。」と云う弱い形で「実はその濃度は $\aleph$ となる.」と云う注まで付して、証明した理由は、ブラウエルの証明では実数濃度の非可算性を別に証明しなければならず、これを嫌ったからではないかと推察される。従って、能代氏は明記こそしていないが、この証明が実数の非可算性の証明にも成り得ることを意識していたはずである。

（2）ベールによる原証明

ベールは 1905 年に『不連続関数講義』と云う著書をダンジョワと共著で上梓している．この中で、「完全集合は非可算である」ことが、実数の非可算性を使うことなく示されている．

R.Baire,A.Denjoy, Leçons sur les fonctions discontinues(不連続関数講義), Gauthier-Villars (1905)[6] pp.50-61 より抜粋[142]

39． 相互に、AB 上に可算無限個の区間 λ を与える．これらは AB 上に至る所で稠密集合を形成し、お互いに共有点を有さないとする．私が言うのは、任意のそれらの区間の内部でないような点集合 P は完全でありかつ非稠密である、と云うことである．我々が特別条件として与えておくことは、もし点 A または点 B の一点が区間 λ の端点ならば我々はそれをこの区間の内部と見なす、と云うことである．

先ず、P は閉である．P の一部ではない点は区間 λ の内部なので、それ故、P の極限点ではない．

P が完全であることを示すためには、P がそれ自身に対して稠密であること、つまり P の点が孤立し得ないことを示すことが残っている．実際のところ、もし P の点 K が孤立していたならば、それ（点 K）は P の点としては K しか含まない区間 HI の内点である．線分 HK について考察しよう．この線分の内部の点は P の部分に含まれない．K は（HI の）内点である．それで HK の内部の点含み、そして端点として K を持つ区間 λ が存在する．同様に、K は KI の内点を含む区間 λ の他の端点である．その両方の区間 λ はそれ故、共通の端点を持つと考えられる．それは仮定に矛盾する．それで K は孤立点ではない．それ故、P は完全集合である．

結局、区間 λ が線分 AB 上至る所で稠密なので、P は線分 AB で稠密ではない．

我々が言うことは、区間 λ、その知っていることは P と同等であるのだが、は P に隣接する区間である、と云うことである．

完全集合 P の点の性質を考察する．第1類カテゴリーの点はそれぞれの区間 λ の端点からなる．なぜなら、任意なこれらの点は任意な区間 λ の内点ではないからである．私が言うのは、P の他の点が存在する、と云うことである．なぜ P が非可算であるかを示そう．そのことは同時に完全集合が非可算であることを証明することになる．

我々は先ず、次の補題を示す：

線分 AB 上に完全集合 P が与えられ、$\alpha\beta$ は少なくも P の1点を内点に含む AB 上の区間であるとせよ．一方、M を P の確定された点とせよ．区間 $\alpha_1\beta_1$ を見つけることができて、この区間は任意に小さな長さで $\alpha\beta$ の内部にとれて、P の 1 点をその内部に含み、M を含まない．

実際、もし区間 $\alpha\beta$ が P の1点を内部に含むならば、それは無限個を含むだろう．なぜならその点は P に対する極限点だからである．それ故、P の 1 点 M_1 を決定することが出来、$\alpha\beta$ の内点であり M とは異なる．そのような点は $\alpha\beta$ の内部の区間によって囲まれ、M ではない．そして更に、この区間の長さは任意に小さく取ることが出来る．

これより、完全集合 P が非可算であることを示している、と言える．

もし P が可算であるとするならば、我々は（P の）点を次のように $M_1, M_2, \dots, M_\nu, \dots$ と整数に対応させて、並べることが出来るであろう．P の一点をその内部に含むような一つの区間 $\alpha\beta$ を考える．M_1 を含まず、かつ P の点を内部に含まない区間 $\alpha_1\beta_1$ を $\alpha\beta$ の内部に見つけることが出来て、同様に、M_2 を含まず、かつ同様の条件下の区間 $\alpha_2\beta_2$ を $\alpha_1\beta_1$ 内に見つけることが出来る．以下同様である．これは無限個の区間を決定する．それぞれ（の区間）はその前に決定された区間の内部であり、$\alpha_\nu\beta_\nu$ が点 $M_1, M_2, \dots, M_\nu$ を含まないと云う条件を伴って、P の点を含んでいる．自分自身を $\alpha_\nu\beta_\nu < \frac{\alpha\beta}{2^\nu}$ に制限することで、$\alpha_\nu\beta_\nu$ が0に近づくと云う必須条件を前の条件に追加する．

これらの条件下で、ある点 H が存在する．それは区間たち $\alpha_\nu\beta_\nu$ の共通の極限点である．H はすべての区間 $\alpha_\nu\beta_\nu$ の内部にあり、その結果、すべての点 M_ν と異なる． それは極限点なので P の点である．H をその内部に含むすべての区間に対し、ある区間 $\alpha_\nu\beta_\nu$ とその内部に P の点が存在し得る．このように P は異なる点たち $M_1, M_2, \dots, M_\nu, \dots$ を含む．これは仮定に反する．それで、完全集合 P は非可算である．それ故、それは区間 λ の端点以外の点を含んでいる．

[140] 付録 10 参照　『点集合論』[102]pp.99-100 にもあるが、本書の参照文献には『極限論と集合論』[92]があり、恐らく、能代氏の証明を参照されたのであろう．ちなみに、吉田洋一氏は能代氏の師であり、二人は戦前に同じ北海道帝国大学で教鞭をとっていた．
[141] 付録 8 参照　Brouwer のオリジナルの証明と比較すると、この 20 年ほどの間で、随分と証明が簡易になったことが見て取れる．現在なら学部学生の演習問題程度の Brouwer 流の命題も 20 世紀初頭の頃なら、ごく限られた人だけが扱える問題だったのであろう．
[142] http://bookre.org/reader?file=1160296&pg=65

要するに、完全集合は可算では有り得ない；可算集合は完全では有り得ない.

非稠密完全集合を与えたとき、隣接している区間たちを次のように$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$に並べる.もし最初の$n$番の区間$\lambda$を$AB$から抜き去るならば、$n$回の操作の後で保持された最も長い線分の長さは、$n$が無限に大きくなるに従って、0に向かう. そうでなければ、(この最も長い線分の) 長さはあるαよりも大きいままであり、そしてこの場合、AB上に長さαの区間があり、その中に抜き去られる点はない. Pはこの区間において稠密ではないであろう. 第2種カテゴリーの点 (すなわち、区間λの端点とは別) の存在を、別の方法で、実現することが出来る. gを区間λの左端点とし、dを右端点とする. (従って、gもdも第一カテゴリーの点である) 区間λ上に与えられた点gについての仮定に基づき、gの近傍中には常にgの左の点が存在し、与えられた点dに対しても同様のことが成り立つ. そのような点の右側が存在し、そして点gと点dを望むだけ近づけることが出来る.

これは、左点がg_1で、一点をd_1と考える(図.19)、ことを意味する. d_1の右側にg_2を取る. この点はg_4の左側にある. 我々は次の条件に従うことができる.

$$d_1 g_2 < \frac{d_1 g_1}{2}$$

d_2をg_2の次のような左の点を考え、

$$d_2 g_2 < \frac{d_1 g_2}{2},$$

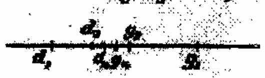
以下同様である.

点$g_1, d_1, g_2, d_2, \ldots, g_n, d_n, \ldots$が、連続して左から右に与えられ、

$$d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots, g_n, \ldots, g_2, g_1$$

となる.

Fig. 19



区間$g_n d_n, d_n g_{n+1}$は0に近づく. それで共通して端点d_n と g_nがある. それはPの端点である. それ故、それはPの一部である. それは同時に両側の極限となる. それ故、その点は点gと点dとは異なる種カテゴリー (すなわち、第二カテゴリー) に属している.

(拙試訳)

10. 完全集合のカージナル数 (能代清、『極限論と集合論 (1942年)』からの抜粋)

定理 10 空でない完全集合Eの濃度は$\aleph_0$よりも大である[143].

証明 仮にEを可付番無限であるとし

$$E = \{P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots\}$$

としよう. Eは自己稠密であるからP_1はEの集積点である. ゆえにP_1と相異なるEの点が無限に多く存在する. その一つをQ_1とし、Q_1の近傍U_1を十分小に取ってU_1の中にはP_1が含まれないようにする. Q_1もまたEの集積点であるU_1の中に無限に多くのEの点の含まれることはいうまでもない. つぎに、U_1の中にP_2が含まれないときはU_1の半径の 1/2 を半径とするQ_1の近傍をU_2とし、U_1の中にP_2が含まれるときはP_2はEの集積点であるからU_1の中にP_2と相異なるEの点が無限に多く存在する. その一つをQ_2とし、Q_2の近傍U_2を

(1) $P_2 \notin U_2$,

(2) $\overline{U}_2 \subset U_1$, ただし$\overline{U}_2$は$U_2$の閉包,

(3) U_2の半径はU_1の半径の 1/2 よりも小,

であるように作る. U_2の中に無限に多くのEの点が含まれるが, 明らかにP_1およびP_2のいずれもU_2には含まれない.

この方法を限りなく続けていけば, 近傍の系列$U_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$が得られ, その閉包$\overline{U}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ は単調減少

$$\overline{U_1} \supseteq \overline{U_2} \supseteq \cdots \supseteq \overline{U_\nu} \supseteq \cdots$$

である；おのおのの近傍U_νの中には無限に多くのEの点が含まれるがしかしながら$P_1, P_2, \ldots, P_\nu$のいずれも含まれない. さて共通部分定理によれば$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{U}_\nu$は空でなくしかも$U_\nu$の半径がたかだか$U_1$の半径の$1/2^\nu$であることに注意すれば$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{U}_\nu$はただ一点からなる. この点を$P_0$で表すとき, P_0は容易にわかるようにEの集積点であるから, Eが閉集合である以上P_0はEに属する. こうして見るとP_0はEのある点P_νと一致しなければならなくなり、他方においてP_0はU_νに含まれるから$P_1, P_2, \ldots, P_\nu$のいずれとも相等しくなり得ないという矛盾に達する.

143 実はその濃度は$\aleph$となる. (原著者注)

11. 歴史上初めての対角線論法（Du Bois-Reymond）

Von Paul Du Bois-Reymond, Ueber asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösungen von Gleichungen(無限近似と方程式の無限解の漸近値について). Mathematische Annalen. Volume 8(1875),[8] pp. 365 の脚注より[144].

※）それ故、以下のことが証明されなければならない.

一つの継続的に緩やかで無限に増加する関数の族

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x), \dots$$

が存在して、それぞれのrに対して、条件

$$\lim \frac{\lambda_r(x)}{\lambda_{r+1}(x)} = \infty$$

を満たすとき、常に一つの関数$\psi(x)$を特定することが出来て、この関数はxに関して無限に増加するが、先の関数族のどの関数よりも緩やかに増加する.

我々の条件は、先ず、xの増加関数族の値が<1 より始まり、次に$x_1, x_2, x_3, \dots$における値が

$$\lambda_1(x_1) = 1, \lambda_2(x_2) = 2, \lambda_3(x_3) = 3, \dots$$

を意味するものとする. x_1の関数$\lambda_1(x)$、x_2の関数$\lambda_2(x)$、以下同様、は横軸（方向）に対して凸ではない. この定理の条件は制限がない（つまり一般性を失わない）. なぜならそれらは直接次の条件を満たすからである：いま、それぞれの曲線$y = \lambda_r(x)$を、横軸に対してより凸でないxが増加する方向の点から、xの減少する方向に、横軸（方向）に接するまで拡張することで、差し替える.

このことは、$x = x_1, x_2, x_3, \dots$に対して値 1,2,3,…を取るような曲線$\psi(x)$を構成することであることに、留意する. 更に($\psi(x)$は)下記のとおりである.

x_1 から(x_2まで)の値に対しては $<\lambda_1(x)$　であり,

x_2 から(x_3まで)の値に対しては $<\lambda_2(x)$　である.

以下同様.

なぜならx_2 に対して$\psi(x_2)=\lambda_2(x_2)<\lambda_1(x_2)$である. 故に、$\lambda_1(x)$が$x_1$から$x_2$で横軸に対して凸でない場合、それは$\psi(x)$ に対してちょうど$\lambda_1(x_1)$と$\lambda_2(x_2)$の線形連結を取る必要があり、更なるすべての区間に対しても同様である. しかしながら、その連続的な値が無限数列 1,2,3,…を形成するので、$\psi(x)$は最終的には無限大となる. 更に、下記の比

$$\frac{\lambda_r(x)}{\psi(x)},$$

はrが大きければ、無限大となる. なぜなら$\psi(x)$はx_{r+1}からは少なくとも$\lambda_{r+1}(x)$ であり、

$$\frac{\lambda_r(x)}{\lambda_{r+1}(x)}$$

は無限大だからである.　　Q.E.D

（拙試訳）

[144] http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?IDDOC=27181

12. ルベーグ自身による“殆ど至る所(presque partout)”に対する注釈

H.Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives(積分と原始関数の研究講義) (1927)[49] pp.179 の脚注より[145]

我々は次のように言うことに同意するであろう. 或る条件が区間(a,b)で、あるいは集合E上で,殆ど至る所成り立つとは、その条件が成り立たないかまたは存在しないような(a,b)またはEの点が測度0の集合を形成する場合を言う. この言い回しは、本書の初版で導入され、一般的に適用されてきた.

そこで我々は次のことを想い起すであろう. ダンジョワ氏が充分に正確なものを発見せず、それ故、彼自らが取り下げた用語：その点Pは集合Eの点であり、彼がそれに対し殆ど至る所と云う言い回しを受け入れ難いと考えたことは驚くべきことではない. その表現は、彼の意見では、二つの意味を持つ：一つは質的または記述的であり、もう一方は量的あるいは計量的である. 私が考えるには、殆ど至る所に対して次の示唆、つまり至る所で稠密的ではない集合を形成する点たちを除いて、を与えることに同意し得ることを意味しなければならない. 確かに、私が殆ど至る所である性質が成り立つと言うとき、ダンジョワ氏は、しかしながら、その性質は全密集合上で起こる、と言った. 全密には、ダンジョワ氏が喜んでそれに与えた以上の意味を与えることが出来るのだろうか？

殆ど至る所は、日常的な言葉においてならば、受け入れ難いであろうが、この用語は正確な意味を持つ. しかし、それは日常的な意味ではない. そのような（日常的な意味で読もうとする）読者は、例による如上の記述（全密）と向かい合って、殆ど至る所の定義に対する疑問を参照することなく、いかなる精密な意味も与えることは出来ない.

それ故、いかなる過誤もあり得ない.

読者にはその定義が持つ不都合なところを見るようにして欲しい. 私は喜んで誰にでも、自分の紀要の中で膨大な数の新語を使ったダンジョワ氏を除いて、この用語を進呈しよう. たとえその用語が完璧であったとしても、それは変化の不便さを減少させることはないが、その用語の使用は広がっていくであろう.

（拙試訳）

（注）このルベーグの注釈を読んで驚かされるのは、その指摘内容よりも、発表時期ではなかろうか. 1927 年当時においてさえ、「日常的な意味」で数学のテクニカルタームを読んではいけないと、ルベーグがこれだけの紙数を費やして説明しなければならなかったのである. この事実は、我々に数学の歴史を考えるときの重要な視点を喚起する. 実際、著者はこの注釈を熟読するまでは、数学者が数学における定義を「日常的な意味」とは切り離して読むことは、例のヒルベルトの、「点、直線、平面という言葉の代わりに、テーブル、椅子、そし

[145] http://bookre.org/reader?file=548309&pg=194

てビール・ジョッキと言い換えることができる（1898)」発言以来、少なくともその5年後くらいからは、常識になっていたと勝手に思い込んでいた．実態は、多くの他の科学の歴史と同様に、数学の歴史においても、革新的な考えが浸透するのは、多くの人がその考えに賛同して宗旨替えをするからではなく、古い考えに固執する人々が時間とともに消えていくからなのであった．その意味で、1927年は未だ数学の定義に「日常的な意味」を求める数学者が大勢いたのだろう．

13. ハルナックの無限論

A. Harnack, Ueber den Inhalt von Punktmengen(点集合の内点について), Math. Ann. 25 (1885)[41], pp.244-245 脚注より[146]

**) カントール氏によって導入された様々な無限数の用語を（私が）ここで使用するにもかかわらず、"非本来的無限" と "本来的無限" の間の一般的な差異に同意することは出来ない、と云う注記を（私は）認めたい（数学年報 第21巻）無限の概念には、二つの異なる方法で到達される：第一は、大きさ（単位と絶対値数）の限りない加算（増加）によるものである。第二は、大きさを限りなくに分割し続ける継続可能なプロセスであり、その考え方はそれぞれの大きさが無限の部分からなっていると云う知見に導く。いずれの場合においても、考えられる限りのあらゆる極限に関する大きさの進展を示している．この意味で、想像し得る空間と時間は無限であり、また他にはなにも我々の判断の根拠とされていないのだが、関数論での無限遠点における関数の挙動や、分子と分母が無限小、無限大である場合の商を論ずる場合に他ならない．すべての無限プロセスは達成不可能と考えられるべきであり、それ故、最終的に同じことが遂行可能で、それが導く結果に関して成就する．逆に言えば、我々が無限に多くの部分を有限の大きさの構成物にまとめたと見なした場合、特に、無限の源泉の第二モードは特別な場合をそのように固定することを認める． 例えば収束無限級数の各項の総和は、達成不可能なプロセスであるが、それが導く大きさは指定され得る．この量を操作し続けることより、例えば、新しい加数を追加することで、ある特別な継続した無限のプロセスを語ることや、自己完結したものとして無限個の加数の概念を取り扱うことを可能にする．一つの区間の中の有理数全体について語るとき、同様のことがなされる．このようにして、次のような知見を獲得する． たとえ無限個の要素を持つ集合であってもその（無限の）大きさが異なる場合がある、と言い得るということ、そして更なる研究により、（その無限の大きさには）数の概念が存在し、それは無限集合の要素の配置の型に依存

146 http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN235181684_0025&DMDID=DMDLOG_0023&LOGID=LOG_0023&PHYSID=PHYS_0257

するのではなく、基数性に効果的に依存していている．つまりその（無限の大きさを示す）量は集合の配置にまったく依存しないで特徴付られる．これらの（あたらしい無限の）属性適用の可能性によって、無限の元々の概念が変更されることはない．単位量を加算することによる生成量に限りはない、それが完了したか完了していていなかと考えられがちであるが、無限の空間や無限の時間が可算集合から構成されると考えられるとき、その大きさは第1濃度からのものであり、一方、空間の中に含まれる平面や点、時間の中の個別の瞬間について深く考察するとき、第2濃度の集合が存在する．一たび我々がそれら全体の中でこれらの要素が捕捉されたなら、無限の最終結論がここに顕現する．

殆ど付け加えるまでもないが、これらの反論で、決して新しい概念形成の重要性を損ないたいわけではない． カントール氏によって導入された無限理論における基数の概念は寧ろ究極的に重要であると考えられる．そして、我々の見るところ、関連する同値な二つだけのクラスが可算集合と不変な連続体（その次元に無関係）における点集合であると云う結果はとても興味深くて価値があり我々の知見を豊かにしてくれる．私が唯一重要であると強調したのは、解析の過程で現れる無限が、私見では、ここで使用された概念と全く同じものである、と言うことである．しかしながら、これら（実無限）の概念は特別な価値をもつ、なぜならその（実無限）概念は多くのことを教えてくれるからである、大抵の場合に必要であるように、何かに成ることで完成するような無限は、十分に要望することが出来ないのに、これら（実無限）の概念は無制限な大きさを維持したままで利用することができる．本質的に、この問題は既にライプニッツとベルヌイの間で続けられた論争の主題（往復書簡 2回目1698年7月～1699年2月）である、後者は無限の必要性をあたかもそれを表現する長さを固定するために大きさを完全にすることのように表現した．勿論、認められにくい無限大や無限小が存在する．我々が自分達の心の中や外の世界においてそれ自身の存在を感じる現実感に対してこれらの極限的な概念を与えようと試みたとき、それが為に、かつそれのみにより、内部矛盾がはじまったのである．

（拙試訳）

14. スミスによる「カントール集合」と正測度を伴った"nowhere dense"集合の導入

Smith, H. J. S., "On the Integration of Discontinuous Functions(不連続関数の積分について)．" London Math. Soc. Proc., 6(1875)[62], pp.147-149.より抜粋[147]

147 http://www.math.leidenuniv.nl/~kphart/onderwijs/verzamelingenleer/materiaal/smith-1875-discontinuous-functions.pdf （現在は開くことが出来ない）

15.(iv.)　mを２よりも大きな任意な与えられた整数とする．０から１の区間をm等分せよ；そして最後の区間を任意な後続の分割から除外せよ．残った$m-1$個のそれぞれの区間をm等分せよ；そして最後の区間を任意な後続の分割から除外せよ．もしこの操作が無限に続けられるならば、０から１への直線上に無限個の分割点Ｐを得るであろう．これらの点は大雑把に言えば順序数である：なぜなら、もし　d　が、小さいけれども、０から１の区間の任意な所に位置する任意な区間であるとするならば、不等式$\frac{l}{m^k}<\frac{1}{2}d$ [148]を満たす添え字kを取り、この区間d上に完全に存在する$(\frac{a}{m^k},\frac{a+1}{m^k})$型の区間を決定できる．しかし、この区間はそれ自身が除外された区間であるかまたはこの区間のm番目の部分がそうであるかのどちらかである．k回の操作の後、除外された区間の（長さの）総和が$1-(1-\frac{1}{m})^k$　となることが見て取れるだろう；それで、kが限りなく増加するに従って、分割点Pが０から１の区間の無限小部分だけを占める区間たちの上に発生する．そして、Pの点に於いて任意な有限の不連続点を持つような関数は積分可能であることが暗示されているかもしれない．というのは、もしdが任意に与えられた小さな正数だとするならば、添え字kが不等式$\frac{1}{m^k}>d>\frac{1}{m^{k+1}}$　によって決定されるとせよ；$\frac{1}{m^k}$よりも（長さの）大きな除外された区間の数Nは、$1+(m-1)+(m-1)^2+\cdot\cdot\cdot(m-1)^{k-2}$　である；
そして残った区間の（長さの）総和は

$$(1-\frac{1}{m})^{k-1}\ .$$

基準dの任意な分割で、Ｐの点たちを含む区間たちの（長さの）総和は

$$(1-\frac{1}{m})^{k-1}+2Nd$$

を超えることが出来ないのは明らかである．しかし、dが限りなく減少するに従って、kは限りなく増加し、$(1-\frac{1}{m})^{k-1}$と$2Nd$、それは　$\frac{2N}{m^k}$　よりも小さいのだが，は両方とも限りなく減少する;すなわち、基準dの任意な分割で、不連続点を含む区間たちの（長さの）総和はd（の長さを限りなく小さくすること）で限りなく減少する;そしてその関数は可積分である．

16.(v.) ここで、直近の例のように、0から1の区間をm等分して、最後の区間を更なる分割から除外せよ;残された$m-1$個の区間のそれぞれをm^2等分に分割して、それぞれの区間の（分割の)最後の区間を除外せよ:再び残された$(m-1)(m^2-1)$個の区間のそれぞれをm^3等分区間に分割して、それぞれの区間の（分割の）最後の区間を除外せよ；そして以下同様に継続する．$k-1$回の操作の後、

$$N=1+(m-1)+(m-1)(m^2-1)+\cdots+(m-1)(m^2-1)\ldots(m^{k-2}-1)$$

個の除外区間を持ち、それらの（長さの）総和は次のようになる．

[148] 原文には k が抜けている．誤植であろう．

$$1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m^{k-2}}\right)$$

この総和は、kが限りなく増加するとき、有限の極限値$1-E(\frac{1}{m})$で近似される；ここで$E(\frac{1}{m})$はオイラー積$\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{m^k}\right)$であり、確実に０とは異なる．分割点たちＱは区間全体の上に緩やかに規則正しく存在する．というのは、もし　d　が任意に小さな区間で、$\frac{1}{m^{\frac{1}{2}k(k-1)}}<\frac{1}{2}d$　を満たすならば、$\left(\frac{a}{m^{\frac{1}{2}k(k-1)}},\frac{a+1}{m^{\frac{1}{2}k(k-1)}}\right)$型の区間が（長さ）$d$の区間上に完全に含まれていることが見出され得て、この区間のそれぞれはそれ自身が除外されるか、その　$\left(\frac{1}{m^k}\right)$番目の部分が除外される．しかし、Ｑの点たちで有限の不連続点を持つ関数は積分可能であろう．というのは、もしdが任意な基準値であり、以下の分割片（それは基準値dの分割である）において、$\delta<\frac{1}{m^{\frac{1}{2}k(k-1)}}<d$を満すならば、

$$\delta+\frac{i}{m^{\frac{1}{2}k(k-1)}},i=0,1,2,3,\ldots$$

不連続点を含む区間たちの総和は

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m^{k-1}}\right)+\frac{N}{m^{\frac{1}{2}k(k-1)}},$$

である．それはdが無限に減少し、従って、kが無限に増大するとき、有限の極限値$E\left(\frac{1}{m}\right)$を持つ．

（拙試訳）

（補注）

スミスは19世紀のイギリスを代表する数論学者の一人であるが、解析学者としては、注目される存在ではなかった．更に、彼が発表した論文を掲載した雑誌が、当時としては数学、特に解析学、ではフランス、ドイツに大きく遅れをとっていたイギリスのものであったこととも相俟って、この論文は大陸の数学者たちの目に触れることはなかったようである．現在においてもカントール集合にスミスの名前が言及されることが少ないのは、このような歴史的不運の影響によるものと推察される．

原論文の上部余白には著者名、論文の表題、[June 10,1875.]が印字されている．この論文の発表時期が1875年であることを裏付けるものとも言えるが、実際には、London Math Soc.Procの6巻は1874年11月に発行されている．カントールの歴史的証明を載せた論文が1874年に発表されていることを考え合わせれば、スミスがカントールの論文を読んでから上記の論文を書いた可能性は極めて低いことが判る．実際、この論文にカントールの名前は一切現れない．

スミスがカントールの論文を読まずにこの論文を書いたことは大変残念なことであった

と思われる．ここでは15節と16節だけを試訳したが、17節では、ハンケルの論文を分析するなかで、有理数の集合が任意に小さな区間に閉じ込められてしまうことに気付いていたことが窺える．ホーキンスも指摘しているように、スミスは容易に、カントールとは独立に、実数の非可算性の証明を得ることが出来たはずであった．しかし、最後の一歩が踏み出せなかったのは、カントールの基数概念を知らなかったからであろう、一方、ハルナックはカントールの仕事を熟知していたので、逆説的と感じつつも、正しく問題設定をし、実数の非可算性を証明することが出来たのだろう．

この論文を読む限り、スミスが実数やカントール集合の非可算性に気付いていたとは思えないし、ボルテラのように 正測度を伴った nowhere dense 集合から原始関数は存在しても不定積分は存在しない例が構成出来るところまでの発想の飛躍も見えない．しかし、彼は確かに、ここで二つの実例を構成しており、たとえそれらが当時の数学者たちに直接的な影響を与えなかったとしても、そのことは歴史的には大きな功績として評価すべきであろう．

ところで、上述のボルテラの発見した例は興味深く、一見に値する．本論の中でも、ルベーグとベール両者の歴史的な学位論文の両方で引用されていることを指摘しておいた．イタリア語のオリジナル論文に抵抗を覚える人は小柴氏の論文[73]を参照のこと。また、盛田氏の著書[100]にはボルテラのと同じ趣旨だがもっと簡単な例が載せてあり、類書に例をみない丁寧な説明が付されている．

15. カントールによる「カントール集合」、「連結性」、「連続体」の導入[149]

G. Cator, Über unendliche, lineare punkt mannigfaltigkeiten(無限、線形点集合について), Math. Ann. 21 (1883)[20], pp.575–576,590. より抜粋

たとえこれら二つの述語がひとつの同じ点集合において「可約的」と「完全的」を互換的に持たないとしても、すこし注意を払えば容易に判るように、それは、しかし一方で可約的であるのとまったく同様に完全でも不完全でもなく、既約である．

完全点集合Sには常に内部があるとは限らない、それは私の初期の仕事の中で「至る所稠密である」と述べていたものである(原注11)；それ故、後者が常に完全集合でなければならないことを直接認知しなければならないならば、それらは連続点集合の唯一の完備な定義として適切ではない．

むしろ、既に述べた連続体を定義することに連動して、もう一つの概念が必要となる．すなわち、点集合Tの連結性である．

任意な2点tとt'に対し、どんなに小さな $\varepsilon>0$ をとっても、必ず有限個の点 $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ がTにあって、線分 $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \cdots \overline{t_\nu t'}$ の長さをすべてε以下となるようにすることができるときTを連結点集合という．

連続体は、この連結点集合と云う概念の下で、今のすべての既知なる幾何学的点に適用されることが、容易に理解できる；しかしながら、私が考えるには、これら二つの述語「完全的」と「連結的」は連続点集合体の必要かつ十分な特徴であると認め、それ故、G_nを含む連続体は完全連結集合(原注12)として定義する．ここにある「完全的」と「連結的」は単純な用語ではない．しかし如上の定義により、もっとも強い概念的定義での特徴付では、それはまさに連続体の一般的述語である．

連続体のボルツァーノによる定義（「無限の逆説」§38）は確実に間違っている；それらは連続体の単なる一つの性質から一方的に制御する、それは一度にしかし大量に、G_nから生じる量によって、G_nから任意な「孤立」点集合（数学年報巻21、51頁参照のこと）を除くことを考える；同様に、それは集合で満たされる、それは分離した複数の連続体から構成されている；これはボルツァーノによる場合ではあるが、明らかに連続体はそのような場合ではない：それ故、ここで我々はその命題「それが与えられればある物が必然的に定立され、それが除去されればそのある物が必然的に滅びるようなもの、あるいはそれがなければある物が、また逆にそのある物がなければそれが、在ることも考えられることもできないようなもの、そうしたものをその物の本質に属すると私は言う（ラテン語）」[150]の瑕疵を見るであろう

しかしながら、また同様に、デデキント氏の文書（連続性と無理数）の中で、連続性の一方の性質だけが特筆されているように見える．すなわち、それはすべての「完全」集合に共通した性質である．[151]

(原注11) 完全集合であることから、それらは決して(Ⅰ)の基数を持たないと云う命題が証明できる．

任意な区間で至る所稠密なのに小さな完全点集合の例として、次の公式に含まれるすべての実数の具体化を引用しておく

$$z=\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\cdots+\frac{c_\nu}{3^\nu}+\cdots$$

ここで係数c_νは 0 と 2 の二つの値を自由に取り得て、その級数はその有限個の項から構成される場合と無限個の項から構成される場合の両方が有り得る．

(原注12) 連続体のこの定義が連続構造の次元と呼ばれているもののいかなる兆候からも

149 http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN235181684_0021&DMDID=DMDLOG_0051&LOGID=LOG_0051&PHYSID=PHYS_0616

150 『エチカ』[63],第二部定義2 より引用
Cantor は Spinoza に傾倒しており、いろいろな場所で引用している．詳しくは次の論文を参照のこと．但し、なぜかここでの引用については言及されていない．
『スピノーザの無限とカントールの超限』[98]

151 つまり Dedekind は、完全集合ならば持ちうる、完備性だけを強調していて、連結性についての言及がない、と言いたいのであろう．

自由であることに注意せよ．その定義は実際またこれらの連続性を導入する、それらは異なる次元の連結な例、線や面や立体等、からなる．後で、この一般的な標準的連続体からある特定の次元のより具体的な連続体に達する方法を示すであろう．わたしは「連続体」と云う単語が未だ数学において固定した意味で適用されていないことを良く知っている；それ故、私の同一の定義がある人によれば狭すぎて、別の人によれば（本質から）離れすぎていると警告されている；私が正しく中心部分を発見することに成功していることを期待している．

私の意見では、連続体は完全性と連結性の構造だけで理解することが出来る．この後、例えば、一方あるいは両方の端点を持たない直線は、ちょうど境界が除外された円領域がそうであるように、連続体ではない；私はそのような点集合を半連続と呼ぶ．

一般的に言って、任意な半連続体は不完全である、それは連結であって第２種の点集合に属する、その点集合の構成要素である任意な２点が完全連続体によって連結させることが出来る．それで、例えば、数学年報第20巻119ページにおいて、著者自身（の論文）で$\mathfrak{C}$（と云う記号）によって名指しされた空間は、それはG_nから任意な第１濃度の点集合を除くことにより形成されるのだが、半連続となる．

半連続体の導集合は常に連続体であり、連結集合が第１濃度であろうと第２濃度であろうと重要な話ではない．

第１濃度による連結点集合ならば、私はそれを連続体とも半連続体とも呼ぶことが出来ない．

私によって提供された用語により、超越幾何学のみならずすべての代数構造もそれらのあらゆる方法、それは他のいかなる方法による結果をも上回る一般性と明晰性を備えているように設定されているのだが、から探究することを、多様体（集合）理論の頂きに向かって誓約する．

（拙試訳）

（補注）

我々が良く目にするカントール関数[152]はこの翌年の論文[153]に現れる．ここで彼は、微積分の基本定理が成り立つための条件としてハルナックが挙げたものが正しくないことを例証するために；反例としてこの関数を取り上げている．現在の言葉で言えば、典型的な特異関数である．一方、ハルナック自身は同年の論文[154]で、絶対連続関数（用語の命名はヴィタリによる）の概念に辿り着いている．「任意の連続有界変動関数は絶対連続関数と特異関数の和として書ける．」を知る現在の我々の視線からは興味深い縁を感じずにはいられない．

[152] 悪魔の階段などと云うすごいネーミングをしている著書もある．

[153] G. Cator, De la puissance des ensembles parfaits de points, Acta Math.,4(1884).[22] pp.381-391
http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN237853094&IDDOC=49439

[154] Harnack, Axel, Die allgemeinen Sätze über den Zusammen- hang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableit- ungen, Math. Ann., 24, (1884)[40] pp.217-52.
http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN235181684_0024&DMDID=DMDLOG_0021

16. ポアンカレの基数についての考察

Henri Poincaré, Dernières pensées(晩年の思索). (1917)[54] pp.109-112 より抜粋[155]

§2. —基数

基数を定義する際に、上述の考察を忘れてはならない．二つの集合を考える場合、両方の対象間に一つの対応の規則を設定しようとすることが出来る．それで一つ目（の集合）のそれぞれの対象に対して二つ目（の集合）の対象を一つそれもただ一つだけ対応させる、逆の場合もまた同様である．これが可能な場合、二つの集合は同じ基数を持つと言う．

しかし、ここで再び（繰り返しになるが）、この対応の規則は述語的であることが必要なのである．もし二つの無限集合を扱うならば、これら二つの集合を使い尽くされるように想像することは出来ない．もし一つ目（の集合）でいくつかの対象たちを取り出したと仮定するならば、その対応の規則により二つ目（の集合）の対応する対象たちを定義することが出来る．次の新しい対象たちを導入するならば、この対応の規則の意味がこの導入によって変化するかもしれない．そうすると二番目の集合の対象A'が、それは以前にこの導入が一番目の集合の対象Aに対応したものなのだが、この導入の後には、もはやそこには対応しないであろう．このような場合、その対応の規則は述語的ではない．

そして、それは対照的な二つの例によって説明されるものである．整数たちの集合と偶数たちの集合を考える．それぞれの整数nに対して、偶数2nを対応させることが出来る．もし新しい整数を導入するならば、それはnに対応して同じ数2nになるであろう．この対応規則は１つの述語であり、そしてそれはカントールが、例えば、有理数の基数が整数の基数に等しい、あるいは空間の点たちの基数が一つの直線の点たちの基数と等しいことを証明するために想定したものと全く同じである．

整数たちの集合と空間の点たちの集合とを、有限個の言葉たちで定義され得る、比較をし、それらの間に次の対応を設定するものと仮定せよ．すべての可能な文を表に記入し、単語数順に並べ、同じ単語数の文に対してはアルファベット順に並べる．無意味であるか、点を定義しないか、あるいは先行する文たちの一つによって既に定義されている点を定義する場合、そのような文をすべて取り除く．それぞれの点に対しその点を定義する文に対応させる、そしてその番号はこの文によってその表の中を塞がれ、削除される．

新しい点たちを導入するとき、無意味だった（けれど導入によって意味を持った）いくつかの文を取得する可能性がある；それらの文たちは最初に消去された表から復元される必要がある；するとすべての他の文たちの番号が修正される；この対応は完全に中断してしまう；この対応規則が述語的ではないからだ．

もし我々が基数を比較する際にこの条件に注意を払わないとするなら、奇妙なパラドックスに導かれてしまうであろう．それ故、この定義が基礎としている対応規則は述語的でなければならないように基数の定義を修正する必要がある．

[155] https://ia801404.us.archive.org/3/items/dernirespens00poin/dernirespens00poin.pdf

すべての対応規則は二重の分類に基づいている．比較したい二つの集合からの対象たちは分類されなければならない；そしてその二つの分類は並列的であるべきである；例えばもし一つ目の集合の対象がクラス分けされたとするなら、それらは順番、これらの族、その他で細分され、それらは二つ目の集合においても同様の対象である．最初の分類におけるそれぞれのクラスは二つ目のクラスに対応し、それは唯一である、その個体そのものに行き当たるまで、それぞれの順番に対しそれぞれの順番が対応し続ける．

それ故、対応規則に対して持たなければならない条件が述語的であることが判る．我々は、述語的であるような対応規則に基づいた、二つの分類を必要とするのである．

（拙試訳）

17. シェルピンスキーによる "effectifs" の例

Sierpinski,W., Les exemples effectifs et l'axiome du choix(具現的な例と選択公理). Fund. Math. 2, pp.112-118. 1921a.[59]より抜粋[156]

具現的な例と選択公理

ヴァツワフ・シェルピンスキー（ワルシャワ）

与えられた性質Pを満たす対象の存在を示すためには、対象pを定義する必要はなく、それ（対象p）が性質Pを満たすことを示せばよい．与えられた性質を満たす対象の存在は公理と定理から　―直接的にかまたは帰謬法により―　帰結することが出来る．そのような種類の存在証明は　―いわゆる純粋な存在証明は―　いつも求める条件を満たすようないかなる特定された対象例も与えず、対象全体のクラスを決定するような指示を与えるに過ぎない（更に、純粋な存在証明は同時に与えられた条件を満たす唯一の対象の存在を示すことがある）．　ときとして、このクラスの中のいかなる特定の対象も区別出来ないことがある．例えば、良く知られているように、選択公理によっていかなる特定のルベーグ非可測集合が指し示されることはない．

与えられた性質Pを満たす特定の対象pを定義するとき、性質Pの**具現的な例**を持っていると言う．いくつかの（具現的な）例を提示しておく．

1）すべての代数的数の集合は可算であり、すべての実数の集合は可算ではないと云う定理は代数的でない実数、いわゆる超越数、の存在を結論として与える．この証明（カントールによる）からは直接的にはいかなる具現的な超越数の例も我々は得ることが出来ない．しかしながら、数eが代数的でないと云う証明は同時に具現的な超越数の例を我々に与える．同様に、有名なリウヴィルの超越数[157]の存在証明はそのような数を具現的に決定するのに利用される．我々はまた超越数の具現的な例を、すべての代数的数を小数に展開することで決定される無限数列を並べた二重数列に対角線論法を適用することで、得られる．（ちょうど、すべての実数が可算でない、と云う有名な定理の証明のように）

2）任意な有限個の素数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ が与えられたとする．ユークリッドの論法により $p_1, p_2, \ldots, p_n$以外の素数 p が存在することが知られている．しかしながら、この論法はそのような数の具体例をなんら我々に与えてくれない．とは言え、任意な有限個の素数の集合 $p_1, p_2, \ldots, p_n$からこれらの数と異なる素数pを対応させる規則を容易に決定することが出来る：それは$p_1 p_2 \ldots p_n+1$ の最小の約数pを指し示すことで十分である．

3）カントール・ベルンシュタインの定理に基づいて、二つの集合MとNが同じ濃度を持つと結論するとき、MとNの要素の間の対応の具体例をまったく持っておらず、単にそのような対応が存在することを示せるに過ぎない．しかしながら次のことが証明できる．もし集合MとNの部分集合N_1との間と、集合NとMの部分集合M_1との間の１：１対応が　―　他方で実際に与えられているならば、MとNの間に具現的に対応を定義することが出来る．もし二つの集合MとNの間の対応が定義されたならばこれら二つの集合は同じ濃度を持つと言われる．（ボレル氏は少なくとも明確に定義された自然数と相互的に要素間に対応付けされると見なされる規則の定義が判っている集合に対して**具現的に可算**であると呼んだ.）[158]1）例えば、有理数の集合全体を要素とする集合はすべて実数の集合と同じ濃度を具現的に持つ．それはすべての無限実数列の集合と同じである．　しかしながら、実数のすべての可算集合の集合はすべての実数の集合の濃度と具現的に同じではない．（もしそれが具現的であったならば、具現的な非可測集合の例を与えることが出来る）[159]2）

4）区間を$\aleph_1$個の共通点のない空でない集合に分解される例を与えることが出来る．[160]3）これから直接、$\aleph_1$の具現的な例と一実変数の$2^{\aleph_1}$個の異なる関数を与えることが出来る．$\aleph_1$個

---

[156] http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm2/fm2114.pdf
Fundamenta Mathematicae

[157] Borel は Liouville 数一般を、数論的性質も解析的性質も分からないとして、effectif ではないとしている．『ボレルのエフェクチフ概念の形成』[94]

[158]（原注 1）最近の注記（具現的な可算集合と具現的定義について：Acc. dei Lincei vol.28 serie 5 ,1919, pp.164）で、ボレル氏はその位置(n)が与えられたとき（およびその逆の場合）それぞれの要素u_nが判るような型式$u_1, u_2, u_3, \ldots$で与えられた集合を具現的可算集合と名付けている．

[159]（原注 2）拙論「ツェルメロ氏の公理等」クラクフ科学アカデミー国際紀要 1918,pp.145 を参照のこと．

[160]（原注 3）L.c.p. 110 Fundamenta Mathematicae Ⅱ.

の異なる解析的に表現可能な関数さえも与えることが出来る．[161]1）しかしながら、$\aleph_1$個の異なる実数の具現的な例は知られていない．

5）実数の任意な可算集合がこの集合の特定の要素に対応する規則の具現的な定義は知られていない．(もしそうでないならば、また具現的な非可測集合の例をもつことになる．(L)）しかしながら、我々は任意な可算集合G_δがその集合の確定された点に対応することよりこの規則を定義することが出来る．[162]2）ただし、我々は任意な集合G_δがこの集合の点に対応する具現的な規則の定義を知らない．[163]3）もしそうでないならば、$\aleph_1$個の異なる実数の具現的な例を与えることが出来ることになる．実際、すべての線形集合G_δにより、Eがこの集合の一点$\varphi(E)$に対応する、規則φを持つと仮定する．$x_1 = 0$とし、$\xi < \alpha$に対して任意なx_ξを既に定義していると仮定すると、αは与えられた$< \Omega$なる整列順序数であり、E_αをこれらすべての点の集合とする．E_αはすべての可算(なぜなら $\alpha < \Omega$)その補集合CE_αは集合G_δであり、$x_\alpha = \varphi(CE_\alpha)$であると言える．数$x_\alpha(1 \leqq \alpha < \Omega)$は超限帰納法により定義され、集合Eは異なる$\aleph_1$個の実数の集合である．

6）ボレル氏の意味では計算可能ではない整数でさえも、具現的に定義することが出来る場合がある．例えば次の定理に在る最小の自然数をkとする："任意な自然数はk個以下の自然数の４乗冪の和となる．" このような自然数kは存在し、それは不等式$19 \leqq k \leqq 37$を満たすことが整数論によって示されている．しかしながら、その数kは１以上であるに近いことしか示すことが出来ない．特に、ウェアリングあたりが言っているように、$k = 19$であるかどうかは判らない．

また、計算可能数rを具現的に定義することが出来る、あらかじめそれは有理数であると知られている．しかし、$r = 1$であるかどうかと云う問題を決定する方法は知られていない．実際、自然数nが 19 個またはそれ以下の自然数の４乗冪の和である場合は、a_nは数１を表し、そうでない場合は０とする．

容易に、任意な自然数nに対して、a_n を計算する方法を決定することが出来る．今、$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{2^n}$ とおくと、rは、容易に見て取れるように、有理数になる．(すべてのa_nが$= 1$である場合、rは１であり、そしてそうでない場合、この二進級数は有限である）数rが計算可能であることは明らかである．(その誘導された二進級数展開をどのように計算するかは判っている）しかしながら、$r = 1$であるかどうかは判らない．($r = 1$ならば、$k = 19$だし、そうでなければ$k > 19$である．)

[161]（原注 1）拙注記：「ベール関数列の超越的収束について」この雑誌の１巻,pp.141．を参照のこと．http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm1/fm1118.pdf
[162]（原注 2）可算領域の生成する集合G_δと名付ける．私の学生である Zalcwasser 氏に尋ねられた、任意な集合G_δが対応するその集合の点に従う規則の存在の問題
[163]（原注 3）この雑誌の１巻,p.2.を参照のこと
http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm1/fm111.pdf

7）任意な有界無限点集合Eに対し、この集合の確定した集積点$\alpha(E)$（Eに属している場合もあれば属していない場合もある）を対応させることにより、容易に具現的に（対応の）規則を定義することが出来る．あるいは、任意な非可算集合Eに対し、Eに属する集積点E（任意な非可算集合におけるそのような点の存在は選択公理を使うことなく示され得るのだが）を対応させることにより、どのように規則を定義するかは知られていない．[164]1）

任意な線形有界非可算集合Eに対し、この集合の異なる二つの凝集点$c_1(E)$と $c_2(E)$（属している場合もあれば属していない場合もある）を対応させることにより、容易に具現的に(対応の）規則を定義することが出来る．実際、Eが$x < \alpha$を満たす数の可算（または空な）部分集合を含むようなすべての数αの上限を$c_1(E)$によって表記され、$c_2(E)$によって一Eが$x > b$を満たす数の可算（または空な）部分集合を含むようなすべての数bの下限が、表記される．しかしながら、ツェルメロ氏の公理を使うことなく常に$c_1(E) < c_2(E)$であることを示す方法は知られていない．[165]2)

具現的な例を与える術を知らないすべての有名な場合において、考察された対象の存在性はツェルメロの公理に由来している．それは、例えば、非可測集合（L）に対し、$\aleph_1$濃度の実数の集合に対し、関数等式$f(x+y) = f(x) + f(y)$に対するハメル氏の基底による不連続解に対し、完全部分集合を含まない非可算集合に対し、ある点集合で、その補集合も同様に、それぞれの区間で第 2 カテゴリーであるような集合に対し、第２級のすべての関数の集合と実数全体の集合の間の１：１対応に対し、等々に対してである．[166]3)

しかしながら、選択公理に基づくならば、決して具現的な例を得ることが出来ない、というわけではない．特別な対象が具現的に（ツェルメロ氏の公理さえ使用することなしに）定義されて、しかしこの対象が求める性質を満たすと云うその証明に選択公理が役立つ、と云うことは有り得る．それは、例えば、私が別の場所で示したように、ベール氏の分類に収まらないルベーグ氏の関数がある．[167]1）ここでは他の教育的なこの種の例を扱う．

（拙試訳）

18. アレキサンドルフのノート[168]

P. Alexandroff, Sur la puissance des ensembles measurables B （関数の理論―B 可測集合の濃度について), Comptes Rendus Acad. Sci., 162(1916). [1] pp.323–325.

[164]（原注 1）　拙論 pp.123 引用を参照のこと．
[165]（原注 2）　L.c.p. 124
[166]（原注 3）l.c.p.140．参照のこと
[167]（原注 1）L.c.p. 136
[168] http://bookre.org/reader?file=1461091&pg=1

関数の理論―B 可測集合の濃度について

アダマール氏によって発表された P.アレクサンドルフ氏によるノート

1. このノートの目標は次の問題を解くことである：《任意な非可算 B 可測集合の濃度を決定すること.》この問題は N.ルージン氏によってもたらされたもので、彼の大変貴重な援助のお蔭で以下の結果を得ることが出来た；その証明のいくつかの点もまた彼に帰する.

E を非可算集合族αの集合 F とする. ルベーグ氏の優れた結果に基づき、二重項目表 E を発展させることが出来る.

$$
(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{array}{l}
E_1^1 + E_1^2 + E_1^3 + \cdots + E_1^{q_1} + \cdots,\\
E_2^1 + E_2^2 + E_2^3 + \cdots + E_2^{q_1} + \cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
E_{p_t}^1 + E_{p_t}^2 + E_{p_t}^3 + \cdots + E_{p_t}^{q_1} + \cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.
$$

ここで与えられた集合 E は表（E）の横方向に位置付けられた共通集合である. すべての集合$E_{p_t}^{q_t}$、または$\alpha_{p_t}^{q_t}$の族がαよりも低い、つまり$\alpha > \alpha_{p_t}^{q_t}$であることを注意しておくことは重要である. もし$E_{p_t}^{q_t}$が閉集合でないとすると、類似の表を発展させることが出来る. この部分表の一般項、または$E_{p_1p_2}^{q_1q_2}$、は$\alpha_{p_t}^{q_t}$よりも小さなクラス$\alpha_{p_1p_2}^{q_1q_2}$の集合 F である. もしこれが閉集合でなければ、それを一般項$E_{p_1p_2p_3}^{q_1q_2q_3}$等の新しい表で表現出来る.

$E_{p_t}^{q_t}, E_{p_1p_2}^{q_1q_2}, E_{p_1p_2p_3}^{q_1q_2q_3}, \cdots$から互いに控除された集合列を考察してみる：対応する族は減少する、その結果、有限個のこれらの集合を含むことはない. 閉集合$E_{p_1p_2\cdots p_\lambda}^{q_1q_2\cdots q_\lambda}$(λ 有限)に達したとき、我々(のこの操作)は止まるであろう. それ故、可算無限回の操作で、その要素が部分表$_\lambda$など であるような表によって与えられた集合 E は表現されるであろう.

2. そのようなことが生じたとき、これらの集合の共通部分を与えられた集合の生成集合と名付ける.

n個の集合の生成集合π_1を形成しよう（$n>1$は任意に与えられている）

$$\pi_1 = E_1^{r_1} E_2^{r_2} E_3^{r_3} \dots E_n^{r_n},$$

ここでは$r_1, r_2 r_3 \dots r_n$は任意に与えられたn個の正整数の入力システムからなるとする. この生成集合π_1の中で、$n-k+1$個の集合$E_{k,1}^{r_k s_1} E_{k,2}^{r_k s_2} \dots E_{k,n-k+1}^{r_k s_{n-k+1}}$によるそれぞれの閉でない因子$E_k^{r_k}$を、置き換えることで、生成集合$\pi_1$から第二の生成集合$\pi_2$を導き出す、ここですべての s は決定された任意な整数である. この生成集合π_2の中で、n-k+1 個の集合

$$E_{k,l,1}^{r_k s_l t_1} E_{k,l,2}^{r_k s_l t_2} \dots E_{k,l,n-k+1}^{r_k s_l t_{n-k+1}}$$

によるそれぞれの閉でない因子$E_{k,l}^{r_k s_l}$、置き換えることで、我々は第三の生成集合π_3を持つ、以下同様である、ここで t は決定された任意な整数である. この操作を繰り返すことにより、最終的にはそれぞれの因子が閉集合である生成集合π_μ(μ 有限)に到達することは明らかである. その生成集合π_μは閉集合であり、我々はそれを n 種の閉集合と呼ぶ. 定義されたすべての生成集合π_μは有限個の因子を有限個の添え字で保持する；それらは結果として可算集合を形成する. 生成集合$E\pi_1\pi_2\pi_3 \dots \pi_\mu$が非可算無限個の点を含むとき、n 種の閉集合$\pi_\mu$は n 種の正準集合であると呼ばれる. すべての n 種の正準集合π_μが可算集合を形成することは明らかである；それ故、次のように書くことができる；

$$e_n^1, e_n^2, e_n^3, \cdots, e_n^\nu, \cdots$$

もし数 n を変化させたならば、一つの二重表(e)を得る. この表(e)は集合 E の正準表と呼ばれる.

3. 正準表(e) の性質をここで考察する. それぞれの集合e_n^νは生成集合π_μの一つである、もし生成集合e_m^νの因子の中に生成集合e_n^νのすべての因子が存在するならば、e_n^νはe_m^ν (m>n) の正則因子と呼ばれる. 我々は、e^{ν_k}が$e_{n_{k+1}}^{\nu_{k+1}}$ (k=1,2,3…)の正則因子であるとき、次の（集合）列

$$e_{n_1}^{\nu_1}, e_{n_2}^{\nu_2}, e_{n_3}^{\nu_3}, \cdots, e_{n_k}^{\nu_k}, \cdots (n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k \dots)$$

は正則鎖であると呼ばれる.

すべて正則鎖$e_{n_k}^{\nu_k}$(k=1,2,3…)に共通な部分は正則鎖の核と名付けられるであろう.

そのようなことが生じたとき、正準表(e)は次のような性質を保持する：

1^0　すべての正則鎖の核は E に含まれる.

2^0　E（殆ど可算無限個）のすべての点は核たちの少なくとも一つに含まれる.

3^0　集合e_n^νが与えられ、少なくとも（n−1）本の線、一つの集合$e_{n-1}^{\nu'}$とe_n^νの正則因子である一つの集合列が存在する.

4^0　任意な集合e_n^νは集合たち$e_m^{\nu'}(\nu'' \neq \nu')$の少なくとも一つの正則因子である.

5^0　e_n^νを$e_m^{\nu'}$ (m>n)の一つの正則因子とする；$E(e_n^\nu - e_m^{\nu'})$の点たちの集合 M は非可算であるにもかかわらず、常に M の非可算無限個の点たちを含みかつその正則因子に対する集合e_n^νを許容できる集合$e_m^{\nu_k}(\nu'' \neq \nu')$が存在する.

4. 基本定理の証明に移ろう：

定理. ― 任意な非可算 B 可測集合は完全集合を含む.

先ず、この定理は、少なくとも一つの、その核（閉のまま）が非可算である、正則鎖が存在する場合は、明らかである. そこで、任意の正則鎖の核が可算であるような場合について取り扱おう.

この場合、たとえ集合e_n^νと完全集合πがe_n^νに含まれて E の非可算無限点を含むとしても、存在する(5^0に従えば),πの中に、二つの完全集合π_1 と π_2は共通する点がなく E の非可算集合を含み、π_1は$e_m^{\nu''}$ (m>n)に属し、π_2は$e_m^{\nu'}(\nu' \neq \nu')$に、$\pi_1 e_m^{\nu'} = 0, \pi_2 e_m^{\nu'} = 0$、ここで$e_m^{\nu'}$と$e_m^{\nu''}$は

二つの集合は正則因子であるe_n^νを含む．π_1 と π_2はπの除外集合であると呼ばれる．

つまり、e_1^1の中に完全集合πを取り、Eの点たちの非可算集合を含む．上述より、πから二つの集合π_1 と π_2を除外する；その集合π_{α_1}($\alpha_1=1$ または 2)二つの集合たち$\pi_{\alpha_1 1}$ と $\pi_{\alpha_1 2}$($\alpha_2=1$ または 2)二つの集合たち$\pi_{\alpha_1\alpha_2 1}$ と $\pi_{\alpha_1\alpha_2 2}$ 以下同様．このプロセスは無限に続く、それで完全集合の無限列を得ることになる：

(1) $$\pi_{\alpha_1},\pi_{\alpha_1\alpha_2},\pi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\dots,\pi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_k},\dots,$$

ここで$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_k\dots$はそれぞれが1または2に等しい任意な整数たちの無限列[169]である．集合列(1)のすべての集合たちπの共通部分Xは、1^0に従えば、与えられた集合Eに帰属する、その命題は証明される．

(拙試訳)

[169] つまり、$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_k\dots$は実数の点を表し、その濃度は連続濃度である．ここから$\pi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_k}\dots$の集合の濃度も連続濃度であることが判る．このようなタイプの添え字を与えることで添えられた要素の集合の濃度を決定する手法はSuslin-木と似ている．