「エウクレイデス「原論」は純粋数学か？」

三富　照久　　（Teruhisa Mitomi）　　teruhisa31@yahoo.co.jp

（概要） エウクレイデス「原論」は、ヘレニズム数理科学（マテーマタ）全体の為の“数と量のストイケイア”であったという視点から、今までの「原論」を“純粋数学の誕生”として捉える数学史の解釈を再考する。

§序　エウクレイデスの全体像

２００８年から東京大学出版会より「エウクレイデス全集」が刊行されているが、これは世界最初の現代語（日本語）によるエウクレイデスの“全集”の翻訳・解説として、非常に高い歴史的価値を持つ。　ここでの“全集”の意味は、エウクレイデスの代名詞と言える「原論」以外に、「デドメナ」「オプティカ（視学）」「ファイノメナ（天体・球面幾何学）」「カノンの分割」など、いわゆる“マテーマタ”と総称された学科群を網羅している、という事である。　東京大学出版会では、この全集の刊行の意義を、次の様に述べている。

『原論』は，現代の数学のイメージを形成したと言っても過言ではなく，古来，学問方法の一つの典型として学び継がれ，聖書に次ぐベストセラーと称された。　しかし，彼の学問的関心は純粋数学のみだったわけではない。　天文学・視覚論（光学）・音楽など多岐にわたっていたのだ。つまりその関心領域は，アリストテレスにおいて「数学的な諸学問のうちでより自然学的なもの」と呼ばれ，中世ヨーロッパにおいては数学と自然学の間の「中間的学問」と呼ばれたものに及んでいたのである。　その実態を正確に把握し，また私たち自身の数学イメージの拡大に資するためにも，彼の学問的活動の全体像を知ることが必要なのではなかろうか。このような思いから本全集を翻訳・刊行する運びとなった。（東京大学出版会の HP より）

ここでは、学問方法の典型として現代数学のイメージを形成した、エウクレイデス「原論」の影響と、それを“純粋数学”としつつ、エウクレイデスの関心領域が、天文学・視覚論・音楽などにわたり、「中間的学問」と呼ばれたものにも及んでいた事に言及されている。　この「中間的学問」とは、くわしくは「オプティカ（視学）」「カトプトリカ（反射視学）」や失われた「メカニカ（機械学）」などを指す。従来これらの著作は、アルキメデスに繋がるその数理科学的な重要性にもかかわらず、あまり数学史的に言及される事が少なかった。　例えば、すでに古典として著名なヒースの「ギリシア数学史」においては、エウクレイデスは「原論」の著者としてのみ有名であった、としたうえで「オプティカ」などを“応用数学”として「原論」に比べればやや簡単に触れているに過ぎない。注１）

ここには、いくつかの科学史的に論究されるべき重要な問題が残されている。

（問題１）ギリシア数学とマテーマタは同じ概念か？　またはギリシア数学は“数学”か？
（問題２）ヒース「ギリシア数学史」における純粋数学と応用数学の区別の根拠は？　またその区別の根拠は妥当なのか？
（問題３）マテーマタにおける「原論」の役割、「ギリシア数学史」における「原論」の役割、は何か？そして「原論」は（いかなる意味で）純粋数学か？

など。　例えば、アリストテレスにおける学問分類では、理論学（テオリア）は自然学（フュシカ）、数学、形而上学、の３つに大別される、と解説されることがあるが、ここでの数学はマテーマタに対応しており、数論や幾何学の他にハルモニア論（数理的音階論）や数理的天文学なども含み、現代の学問分類の“数学”とは厳密には一致しない。注２）　現代の学問分類では、数学と音楽（あるいは音響工学）と天文学は、異なる専門学科と見なされている。　またマテーマタを数学的諸学科と訳すこともあるが、例えばエウクレイデス「オプティカ（視学）」は、１７世紀のデカルト、ケプラー、ニュートンらの「光学」研究のまさに起源としての歴史的重要性を持つのであって、現在では光学は物理学の重要な一分野であるが、決して数学に属すものではない。　このような事も含めて、東京大学出版会による

（科学史における）エウクレイデスの全体像を明らかにしようとする「エウクレイデス全集」が計画・刊行されたのである。注３）　この小論では、§１で（問題１）を、§２で（問題２）、§３で（問題３）を扱いながら、マテーマタ全体における「原論（ストイケイア)」の意義・役割を探究する。

注１）「ギリシア数学史（復刻版)」ヒース、共立出版、１９９８、
　　原著)「A manual of Greek Mathematics 」Sir T. L. Heath 、Oxford , 1931
注２）「アリストテレス」今道友信、講談社学術文庫、２００４
注３）「エウクレイデスの全体像に迫る（全集翻訳の経験から)」、科学史研究、４７、２００８
　　「エウクレイデス全集」の翻訳者、三浦伸夫、鈴木孝典、高橋憲一、斎藤憲、らをパネリストとするシンポジウムの記録である。

§１　ギリシア数学とマテーマタ

よく数学史の本に、数学（Mathematics）の語源は、マテーマタ（学ばれるもの）でありそれはギリシア語の動詞マンタノー（学ぶ）から派生したという説明がなされることがある。注１）　マテーマタの主要な研究者としては、後にアリストテレスが「万物のアルケーは数である」として特徴付けたピュタゴラス教団におけるマテーマティコイ（マテーマタに従事する人々）がいる。　歴史的には、ピュタゴラス教団は秘密主義であったので、ピュタゴラス教団のマテーマタの研究が広く知られるようになるのは、教団分裂後のフィロラオスやプラトンと同時代のアルキュタスの言明によってである。　アルキュタスの頃は、マテーマタは数論、幾何学、音階論、天文学、(後のヴォエティウスの４科）を含むものになっていた。　よく引用されるアルキュタスの断片に以下のものがある。

（A１）マテーマタに従事する人々は優れた鑑識眼を持つように私には思われる。　そして彼らが個々の事柄に関して、その本質を正しく考察することも当然の理といえよう。　実際、万有のフュシスに関して優れた見識を有する人々は、それらの部分に関しても、その本質を見事に洞察していたのである。星々の速度と上昇および下降について、また幾何学と数とスファイリカについて、そしてもちろん音楽に関しても、彼らは我々に明瞭な認識を伝授した。これらの数学的諸学科は姉妹関係にあるように思われる。　なぜならそれは、存在の筆頭に位置するこ兄弟関係にある二種類の対象に関与しているからである。注２）

ここではマテーマタの諸学科が、“姉妹関係にある二種類の対象”（数と量）に関与しているという意味で「姉妹関係」にある、と述べられている。　例えばピュタゴラス教団は、弦の長さの比に由来する、１：２、２：３、３：４　のテトラクチュス（４元三角形）を、単なる数の比ではなく、音楽を通じて宇宙の調和（ハルモニア）を表現する“聖なる象徴”として、信奉していた。　ここには、数論とハルモニア論（音階論）が、“比例（アナロギア)”の関係を通じて、万物のアルケーを求めるフィロソフィアとして一体化している姿を見ることが出来る。　その後、マテーマタはプラトンの時代に、「国家（ポリテイア)」の中で語られるように、個別学科として学習・研究されるようになり、テアイテトス、エウドクソス、アポロニウス、エウクレイデス、・・・など、現代から見て専門家としてのマテーマティコイらが登場する様になる。　そして、エウクレイデスのマテーマタの著作には、もはや哲学的考察への言及はまったく見られない。　では§序の（問題１）にどう答えるべきか？

（問題１）ギリシア数学とマテーマタは同じ概念か？　またはギリシア数学は“数学”か？

マテーマタの中で、現代の「数学」に適応する分野は多い。　例えば、初等幾何学、立体幾何学、整数論、円錐曲線論、・・・などの分野を、「ギリシア数学」として論ずることは可能であるし、現代数学への進歩という観点から「数学史」としても必要なことであろう。　特にエウクレイデス「原論」は、その公理論的な側面がヒルベルトの「幾何学基礎論」として結実した、という意味で非常に重要である。しかしその場合、上のアルキュタスの引用に示される様な、マテーマタの科学史的または文化史的側面の理解が考慮されにくい、という側面がある。　この点は現代の数学史にとって、長所でもあり短所でもある、と解釈できよう。　つまり「数学史」または「ギリシア数学史」が、何を目的としているか？によって、読者の理解する事が違ってくるということである。　従って、(問題１）について次のように答えることが出来る。

（解答１）現代の「数学」の概念に適応した「ギリシア数学」は、数学ではあるが、それは現代の数学の立場からの解釈である事を忘れてはならない。　その事は「数学史」としての「ギリシア数学史」に対しても同じである。　また、科学史的、文化史的立場から見ると「ギリシア数学」とマテーマタは明らかに異なる。　したがって歴史研究としては、「マテーマタの歴史」とする方が読者に対して、より正しい歴史認識を提供するであろう。

私は「ギリシア数学史」を否定しているわけではない。　現代の学問分類も、その“歴史的必然性”より生まれたものであり、特に数学は科学との関連において極めて重要な意義を持つからである。　また、やや古いがヒースの「ギリシア数学史」を見ても、ヒースが各時代の文化的背景も考慮しつつ、現代の数学記号を用いてわかりやすく解説している事は、読者の「ギリシア数学」の理解を高めている、と思う。　しかし、ヒースがエウクレイデスの「オプティカ」などを応用数学として説明する時、科学史的には大きな誤解が発生してしまう事も事実である。　その理由は、エウクレイデスの「オプティカ（視学)」などの「中間的学問」の、科学史的な重要性にある。　「中間的学問」の中間性は、アリストテレスの学問論を起源としているが、科学史的に見れば、これらの「中間的学問」は、アルキメデス～ガリレオ～ニュートン、に繋がる、現代の数理科学の起源として、決定的重要性を持っているのである。注 3)　この点については、次の§２、でくわしく解説する。

注１)「はじめて読む数学の歴史」上垣渉、ベレ出版、２００６
注２)「ピュタゴラス学派の学問論」和泉ちえ、ギリシア哲学セミナー論集、２００８
注３)「数理科学の起源としてのエウクレイデスについて」三富照久、津田塾大・数学史シンポジウム、２０１１年（津田塾大学　数学・計算機科学研究所報　２０１２年)

§２　ヒース「ギリシア数学史」の批判

ヒースは、エウクレイデス「原論」の現代的数学記号を用いた、わかりやすい英語訳の著者でもあり、ヒースの「ギリシア数学史」は、長らくギリシア数学史の標準的テキストと見なされてきた。　しかし、最近の科学史研究から見ると、ヒースの言明には注意すべき点がいくつかある。

（１）エウクレイデスは「原論」の著者としてのみ有名であった。
（２）エウクレイデス「原論」は、聖書に次いでベストセラーであった。

（１）について、確かにアルキメデスなどは、「平面版の平衡について」などで、「原論」を引用しているが、それは「原論」が、マテーマタ全体の為のストイケイアとして、辞書的な性格を持つからに他ならない。　同様にガリレオにおいても、運動学を記述するために、連続的な“量の理論”として、エウクレイデス「原論」が利用されている。注１)　しかし、エウクレイデスの「原論」以外の著作、例えば「オプティカ（視学)」や「カトプトリカ（反射視学)」の科学史的な重要性については、高橋憲一氏の論説「「オプティカ」「カトプトリカ」の伝承課程と理論的展開」において、エウクレイデス～プトレマイオス～イブン・ハイサム（アルハセン）～ロジャー・ベーコン～ウィテロ～マウロリコ～ケプラー、・・・という、ギリシア時代の視学から近代の光学の確立までの発展の中で、詳細に論じられている。注２)　光学は、１７世紀のデカルトやニュートンらが著作を出している様に、科学革命において極めて重要な分野であった事を忘れてはいけない。
（２）については、ヒースはこの言明の資料的根拠を何ら提出していない。　確かに「聖書」はルターの宗教改革によって、大量に印刷され個人が読むようになったと思われるが（宗教改革以前は、個人が勝手に聖書を所有することは、ローマ教会において禁じられていた)、「原論」のように極めて精密な論証体系が、多くの大衆に読まれたという事は信じがたいことである。　確かにヨーロッパでは１６世紀から商人や職人の子弟を教育する「算数学校」なるものが多く出現するが、そこでの教材は「原論」の結果の一部を（証明なしに）利用した、いわば計算術のテキストであって、それを利用したからといって、「原論」を利用したことにはならない。　１９世紀以降の公的な学校で利用される初等幾何などのテキストも、同じような事であって、「原論」そのものが利用されるのは、イギリスなど一部のエリートのための学校に限定されている。　ヒースの言明は、「原論」とそこから派生した夥しい初等幾何学などのテキスト（一般にユークリッド幾何と呼ばれることもあるが・・・）を、安易に同一視しているとしか思えない。　「原論」そのものは極めて精密な論証体系であって、一般大衆というより各時代の著名な学者達が研究・翻訳・注解をして来たことは、科学史的な事実である。　「原論」は、整数論、

無理量論、正多面体論などの高度な結果を含んでおり、ギリシア時代においては第一級の研究成果なのであって、学問の基礎前提としての“ストイケイア”の意味を、安易に“エレメンタリー（初等的)”と解釈してはならない。

さてヒースの「純粋数学（Pure Mathematics)」と「応用数学（Applied Mathematics)」の区別であるが、現代の用法では純粋に数と量についての数学は純粋数学、現実的なモデルへ適用されている数学を応用数学という事が多い。　しかしヒースは次のように述べて、この区別をギリシア人（アリストテレス）に負わせている。

（H）ギリシア人は、いわゆる“純粋”数学と“応用”数学に属する諸科目を区別した。　アリストテレスは、光学、和声学、天文学、を数学のうちで「いっそう物理的な」分科と呼び、これらの科目と力学とは、その命題の証明を純粋数学の諸科目に負っているとした。注３）

ヒースは出典を明らかにしていないが、このアリストテレスによる区別は、彼の「分析論後書」に説明されている。　原著では、「The Greeks distinguished ・・」と述べられているが、少なくともプラトン（またアカデメイアのプラトン学派）は、この区別には言及してはいない。 アリストテレスのリュケイオンで学んだペリパトス派では、この区別が尊重されていたかもしれない。

アリストテレスの「分析論後書」では、エウクレイデス「原論」のモデルになった、アカデメイアでの“ストイケイア”の論理構造を一般化して、“論証的知識学”（エピステーメー）の理論が構築されている。　それは証明されない基礎定立から演繹的に論証される知識体系の事であり、後のエウクレイデス「原論」や「オプティカ」、またアルキメデスの「平面版の平衡について」などは、一応それに相当していると言える。　和泉ちえ氏のすぐれた文献学的研究によれば、アリストテレスの「分析論後書」の一つの重要な目的は、フュシスについての厳密な学問（つまり後のアリストテレス「自然学（フュシカ）」）を、論証的知識学として建設する準備であった、と言う。　和泉ちえ氏は次の様に述べている。

（I）アリストテレスの学んだアカデメイアにおいては、感覚の次元を超越した対象を扱うマテーマタが尊重され、欺き多い感覚界を対象とする自然探求が奨励されることはなかったからである。注４）

つまりアリストテレスは、マテーマタの論理的厳密性は尊重しつつ、プラトン派の観念的なイデア論によらない論証的知識学としての、「自然学（フュシカ）」の構築を目的とした、と言えよう。

では、アリストテレスの“純粋数学”と“応用数学”の区別であるが、それは「上位の学が根拠についての推論に携わり、下位の学は事実の推論に携わるという分業を通して、初めて（論証）が完成する。」という言い方で述べられている。注５）　この上位と下位の学の例としては、数論と音階論、平面幾何学と視学、などがある。　例えば、エウクレイデスの「オプティカ（視学)」では、人間の眼から物体がどのように見えるか？について、人間の目から出る視線を直線として、いくつかの仮定（論証的知識学としての基礎定立）から、「原論」や「デドメナ」の平面幾何学の命題を利用しながら、多くの結果が証明されている。　では、「オプティカ」は自然学か？と言われると、「分析論後書」の段階ではまだ「自然学」が確立していないので、その点について言及はないが、後の「自然学」においては、いわゆる「中間的学問」として言及されている。　アリストテレスは次にように言っている。

（A２）さらにこのこと（数学的対象が運動を含めないで定義されるのに対し、自然的事物の定義には運動が含まれること）は、マテーマタの内でより多く自然的な学科、たとえば視学、音階論、天文学、などによっても明らかにされる。　というのは、これらの学科は幾何学に対してある仕方では逆な関係になっているからである。　すなわち幾何学の方は自然的な線を研究しはするが、これを自然的なものとしては研究していない。　これに反して視学の方は数学的な線を研究してはいるが、数学的なものとしての線（つまり人間の眼から出る射線）をであるから。注６）

ここで、あくまで「オプティカ（視学)」がマテーマタに属することに注意したい。　この段階では、後の「形而上学（メタ・フュシカ)」で述べられる理論学（テオリア）の分類、つまり「自然学（フュシカ)」と「マテーマタ（数学的諸学科？)」の学問的区別が意識されていると思われる。　マテーマタと異なる「自然学」の確立は、４原因（質料因、形相因、目的因、作用因）や可能態と現実態、という

学問的概念の導入で実現された。　その結果、マテーマタが「自然学」と異なる理由は、４原因すべてを考察せず、主に形相因のみを記述する、という事になる。　例えば、マテーマタとしての「オプティカ」は、物が“どのように”見えるか？は考察するが、その“原因”を自然学的には考察しない、という事である。　この事は、マテーマタとしての「天文学（幾何学的天球論）」と、自然学としてのアリストテレスの「天体論」を比べると、より一層はっきりする。　幾何学的天球論（エウドクソス〜ヒッパルコス〜プトレマイオス〜・・・・コペルニクス）は、惑星の地球からみた逆行現象を、周転円などを用いた幾何的モデルで説明するが、地球が宇宙の中心である事や、生成変化する月下の世界と永遠に変化しない天界の世界を区別する“原因”については、何も言及しない（出来ない）。　マテーマタとしての天文学が、いかに精密であっても“現象を救う”虚構の学である、という解釈の伝統は、コペルニクスまで続くことになる（この解釈によって、コペルニクスの「天球回転論」はローマ教会による禁書処分を免れることになる）。　そしてガリレオに至って初めて、アリストテレスの自然学的原因を追求しない運動の理論が、アルキメデスの機械学（静力学）の発展として構築され、ケプラーを経て、ニュートンの「プリンキピア」（万有引力の基礎定立から、ケプラーの法則を証明する）が完成する事となる。　つまり１７世紀の科学革命は、アリストテレスの自然学に変わって、マテーマタの「中間的学問」の発展形としての機械論的な「物理学」の誕生、という事ができる。　結局、次の様に言う事ができる。

（観察１）現代の自然科学の中で、数理科学と言われる諸学科の起源はマテーマタ（特に自然学的な）である。

では§序の（問題２）にどう答えるべきか？

（問題２）ヒース「ギリシア数学史」における純粋数学と応用数学の区別の根拠は？　またその区別の根拠は妥当なのか？

（解答２）まず、ヒースの「ギリシア数学史」の純粋数学と応用数学の区別は、アリストテレスの「分析論後書」の説明に基づくが、そこでの区別はアリストテレスの理論学（テオリア）における自然学とマテーマタの分類を前提としている。　しかしこの学問分類は、現代の学問分類には適合しない。　（観察１）で見たように、「ギリシア数学史」の応用数学はマテーマタの中で自然学的な学科であり、現代の数理科学の起源に他ならない。　従って、ヒースの区分を現代の「数学史」として解釈すると、ギリシア数学の応用数学が、現代の自然科学としての数理科学を意味することになり、読者に大きなの誤解を与えることになろう。
もともと§１で見たように、現代の「数学史」に準じた「ギリシア数学史」のギリシア数学は、マテーマタとは一致しない。　ここでも科学史的には、「ギリシア数学史」ではなくて、「マテーマタの歴史」とした方がわかりやすいであろう。

「数学史」を現代の「数学」を基準にして、その理解の為の歴史と考えるか、人間の文化的行為の理解としての歴史研究と見るか、は著者と読者の立場で異なるであろう。　「ギリシア数学」を現代の学問分類での「数学」への良き案内として見た場合、現代記号で解説したヒースの「ギリシア数学史」は、数学者や数学科の学生、数学を教える教師にとって、良き資料となるはずである。　上の（問題１）や（問題２）については、上の解答を踏まえたうえで、ヒースの解説を訂正すれば良いであろう。

しかし、一方で「ギリシア人自身がどのようにマテーマタを考えたか？」という歴史認識の問いに対しては、現代の数学（Mathematics ）の概念を適用することは出来ない。　なぜならマテーマタの中から現代の「数学」や「天文学」や「力学」「光学」などが歴史的に生まれてきたのであり、その逆ではないからである。　例えば、プトレマイオスの「アルマゲスト」は、ギリシア・ヘレニズムの天文学の集大成として有名であるが、そのギリシア語の原題は「μαθηματικὴ σύνταξις」（マティマティケー・シュンタッキス）であり（「数学集成」などと訳される事が多い）、ここではマテーマタの主役としての位置に、天文学（数学的天球論）が着座しているのである。　プトレマイオスはその序文の中で、アリストテレスの「天体論」で語られた“永遠不滅の聖なる天界”の研究には、確実な真理を探究するマテーマタこそふさわしい、と述べている。注７）　プトレマイオスには「ハルモニア論」などの著作もあり、思想史的には新ピュタゴラス学派に数えられているが、すでに神格化されたアリストテレスを尊重しつつ、より古い伝統を持つピュタゴラス・プラトン学派の、マテーマタ尊重の立場に立っている。　この事はギリシア・ヘレニズムの学問の伝統において、マテーマタが何であったか、を

良く示している証拠であろう。　偉大な天文学の記念碑である「アルマゲスト」を、ヒースの様に「応用数学」と解釈することは（天文学の歴史から見ても）、歴史認識としては不適当なのである。

注１）「ガリレオの迷宮」高橋憲一、共立出版、２００６
注２）「エウクレイデス全集・第４巻、デドメナ、オプティカ、カトプトリカ」斎藤憲、高橋憲一、
　　　東京大学出版会、２０１０、
注３）前出ヒース「ギリシア数学史（復刻版）」の序文より
注４）「自然学・数学・メーカニカ（アリストテレスを中心に）」和泉ちえ、科学史研究３０、１９９１
注５）「アリストテレス・分析論後書」第１巻１３章、アリストテレス全集１、岩波書店、１９７１
注６）「アリストテレス・自然学」第２巻、第２章、アリストテレス全集３、岩波書店、１９６８
注７）「プトレマイオス・アルマゲスト」薮内 清（訳）、恒星社厚生閣、１９９３

§３　エウクレイデス「原論」の意義

エウクレイデス「原論」の意義についても、現代の「数学史」の立場からの「ギリシア数学史」と、比較文化の立場からギリシア・ヘレニズムの文化的背景を尊重する「マテーマタの歴史」の立場からでは、やや違って見えるだろう。　現代数学の立場から見た場合、ユークリッド「原論」はいわゆる“純粋数学”の典型と見られている。　その不十分な公理主義？は、ヒルベルトの「幾何学基礎論」において論理的に完成されて、現代数学の基礎とされる集合・代数・位相構造による数学の記述である、ブルバキ「数学原論」につながる起源と考えられやすい。注１）　そして「数学史」では、「原論」の誕生を公理的論証数学の誕生として、それ以前のエジプト・バビロニアなどの操作的数学から区別する見方がある。注２）　しかしヒルベルトの公理主義の公理（Axiom）と、「原論」における公理は厳密には字義的に異なる。　確かに公理（Axiom）の語源は、ギリシア語のアキシオーマタであるが、これはアリストテレスの「分析論後書」においては、マテーマタだけでなくすべての学問に適用されるべき自明の真理、と説明されている。　むしろ「原論」の各巻の内容は、最初の定義・要請が限定している。　例えば第１巻の平面幾何学は、公理（あるいは共通概念）よりは、定義と「以下の事が要請される・・・」と書かれている要請（アイテーマタ）が、実質的な内容を規定しているのである。　そして、この事は「オプティカ」やアルキメデスの「浮体について」「平面版の平衡について」などでも同じであり、最初の幾つかの定義（仮定）が、それに続く実質的な内容を限定している、と言えよう。　このように証明されない最初の幾つかの定義・仮定（アリストテレスは基礎定立と名付けた）からの論証的学問を、アリストテレスは「分析論後書」において“論証的知識学”と呼んだのであった。　つまり「マテーマタの歴史」の立場からは、「原論」と他のマテーマタの諸学科は、論証的知識学として同格なのであって、公理主義というより基礎定立主義と呼んだ方が、当時の学問論に沿っていると思われるのである（歴史的には、ガリレオ、ニュートンなどによって、基礎定立（仮定）が自然法則としての“公理”という名前に変わっていったのであり、ヒルベルトが全く間違っているというわけではないのだが・・・・、ギリシア時代にはまだ“自然法則という概念そのものは存在しない！）。　では、§序の（問題３）についてどう答えるべきか？

（問題３）マテーマタにおける「原論」の役割、「ギリシア数学史」における「原論」の役割、は何か？
そして「原論」は（いかなる意味で）純粋数学か？

マテーマタにおける「原論」の役割は、ギリシア語の字義通り「ストイケイオン（ストイケイアの複数形）」である。　アリストテレスは「形而上学」第５巻（学術用語の解説）・第３章において、ストイケイオンを解説し、幾つかのストイケイオンの例を挙げている、例えば、いわゆる４大元素（火・土・水・空気、という純粋原質）を、それ以上分割できない物質のストイケイオンであると説明している。そしてストイケイオンの共通する特質として、「当の事物が第一にそれから構成され、且つこの構成された事物に内在しているところの“それ”（つまり、その事物の第一の内在的構成要素）」と述べて、幾何学的図形のストイケイアもそのような幾何学の原理的なものとして触れている。　もう少しくわしく「形而上学」第３巻においては、幾何学的諸命題の証明体系の第一の基本的なものとして説明しているまた、有名なプラトン晩年の自然（フュシス）についての著作「ティマイオス」においては、最も基本的な２つの小さい直角三角形がストイケイア（構成要素）と呼ばれ、４つの正多面体の面を構成していて、それら４つの正多面体（の集合）が物体としての、火・土・水・空気、に対応させられて、その分解結合によって、自然の生成・変化が説明されている。注３）

「原論（ストイケイア）」の企画は、エウクレイデスが初めてではなく、すでにプラトンのアカデメ

イアにおいて幾何学の「原論」がテキストとして学習されていた、と言われている。注４）　アリストテレスも若い時に、それを学んだのであろう。　しかし、アリストテレスは幾何学的諸命題のストイケイオンという言い方をしているが、エウクレイデス「原論」は幾何学だけではなく、数論や量の比例論も含まれている。　またアリストテレスの「分析論後書」では、数論と幾何学は研究対象の違いから一応異なる学科と判断されている。　確かに「原論」は１３巻もあり、幾何学の証明体系の第一の基本的なもの、以上の非常に充実した結果が載せられている（例えば第１０巻の無理量論や第１３巻の正多面体の理論など)。　なぜストイケイアとしての「原論」に、エウクレイデスは幾何学、数論、量の比例論、立体幾何学、正多面体論、などの高度な研究結果まで載せたのか？　これは編集者としてのエウクレイデスの構想によると思われるが、当時エウクレイデスが活躍したとされるエジプトのアレキサンドリアには王立の大図書館があり、プトレマイオス王朝の初期の王たちは競って大図書館に治める蔵書の収集を競っていたという事実がある（特にアレキサンドリアとペルガモンの図書館は、ライバル関係であった)。　また王立の学術機関ムセイオンでは、ホメロスの「イリアス」や「オデッセイア」などの“正典”を組織的に編集する古典文献学が研究され、その結果が蔵書として大図書館に納入されていた。注４）　従ってエウクレイデスが、アカデメイアで研究・教授されて来たピュタゴラス以来の伝統あるマテーマタの知の体系を、アカデメイアでの「原論」の規模を超えて、論証体系として最新の結果まで含めて１３巻にまとめよう、と構想したことは十分に考えられる。　つまりエウクレイデスの「原論」は、幾何学や数論の学習者の為の単なるテキストというより、それまでのマテーマタの成果を百科全書的にまとめた、いわば一つの“正典”を目指していた、と想定することは充分可能である。

しかしエウクレイデス「原論」１３巻がいかに大部であったとしても、マテーマタ全部を網羅しているわけではない。　他に、ハルモニア論や球面幾何学や視学の著作（編集）もある。　それらと「原論」の関係はどのように考えられたのであろうか？　ここで、§１のアルキュタスの引用（A１）を思い出してみよう。　そこでは、「マテーマタが姉妹的な学科であるのは、存在の筆頭に位置する姉妹関係にある二種類の対象（数と量）に関与しているからである」、と述べられている。　まさに「原論」は、“比例論”を通じて姉妹関係にある、数と量についてかなりの程度に完成された研究成果が、網羅されているのである。　あるいはアレキサンドリアのムセイオンは、ペリパトス派の構想に従って運営されていたので、エウクレイデスはアリストテレス「分析論後書」における、上位の学と下位の学の区別を参考にした、という可能性も考えられる。　従って、次にように言う事が可能である。

（観察２）エウクレイデス「原論」は、マテーマタ全体の為の、数と量のストイケイアである。
（つまり、「マテマティカ・ストイケイア」である。）

これは（問題３）の、マテーマタにおける「原論」の役割は何か？に対する一つの答えである。　当時ストイケイアと名の付く著作は、「原論」以外にも幾つかあって、例えば有名なアリストクセノスの「ハルモニア原論（ハルモニカ・ストイケイア)」や、やや時代が下がるとプロクロスの「神学原論」などもあるが、これらは「＊＊のストイケイア」として対象＊＊の分野がはっきりしている。　エウクレイデス「原論」が、単なる「ストイケイア」なのは、そこに平面幾何学、数論、量の比例論、立体幾何学、など、本来はそれだけでも成立するマテーマタの諸分野を含んでいながら、数と量というマテーマタ全体の為の研究成果が、比例論を通じて論証体系の形で盛り込まれている、からであろうと想像される。

次に（問題３）の「ギリシア数学史」における「原論」の役割であるが、ヒースのようなギリシア数学の区分を考えると、公理的論証数学としての“純粋数学”の誕生という解釈になりやすい。　もちろん「数学史」の中で考えた場合この解釈は正しいのだが、より広く「科学史」（比較文化を根底にした）の中で考えた場合は、§３の最初に述べたように基礎定立主義の“論証的知識学”としての、他のマテーマタの分野との関係がかなり曖昧になってしまう、という面もあるのも事実である。　多くのギリシア人たちが、貪欲なまでにフュシスの探究（フィロソフィアとして）を行った、という歴史的事実や、マテーマタの研究者（マテーマティコイ）のほとんどが、数理天文学の研究をやっていた、という事を考えると、「原論」のみを純粋数学として過大評価することは、返ってその内容である量の比例論などの、数理科学との非常に重要な関係性を見失うことに繋がりかねない（例えば、アルキメデスやガリレオとの)。　これは現代の数学、物理、化学、・・・という学問分類に従った、個別科学としての数学の「数学史」の限界（数学を学ぶ者にとっては長所でもあるのだが・・・）かもしれない。

最後に、（問題３）の、「原論」はいかなる意味で純粋数学か？という事については、今までの考察により答えは出ていると思う。　「原論」の歴史的理解は、上の（観察２）であろう、というのが著者

の考えである。　そもそも一般に、純粋数学と応用数学の区別は、基本的には適用可能な現実的なモデルとの関係による所が大きい。　例えば同じ微分方程式でも、物理や経済などに適用される形での研究は応用数学とも言えるが、一般性を重視してより自由な条件で研究される場合は純粋数学とも言える。では、フォン・ノイマンの「量子力学の数学的基礎」は、ヒルベルト空間論を量子力学へ適用した“応用数学”と言えるであろうか？　ノイマンの結果は、量子力学にとっての公理論的な「原論」に相当する、非常に価値の高いものであり、応用数学かどうか？という質問自体は全くの愚問ではないだろうか。正しくは、応用数学というより数理科学といった方がふさわしい、と思われる。　同様にマテーマタも、数学（または数学的諸学科）というより、ギリシア的数理科学などと言った方が、内容的にはふさわしいのではないだろうか？。

注１）「幾何学基礎論」ヒルベルト、中村幸四郎（訳）、ちくま学芸文庫、２００５
注２）「数学史」伊藤俊太郎、原亮吉、村田全、数学講座１３、筑摩書房、１９７５
注３）「プラトン・ティマイオス」プラトン全集１２、岩波書店、１９７５
注４）「ユークリッド「原論」の成立」斎藤憲、岩波書店、１９９７
注５）「学術都市　アレクサンドリア」町野啓、講談社学術文庫、２００９