Ramanujan Revisited
—— τ-関数とモック・テータ関数 ——

平松豊一・斎藤正顕

<正則保型形式という山の頂上から, モック・テータという道しるべのもと,
隣の Maass 波動形式という山へ行く細いつり橋が架かっていることを Ramanujan は発見した. >

§1 Srinivasa Ramanujan

Ramanujan は エローデ（南インド）で生まれ, クムバコナムで育った. バラモン階級の出身で, 正規の教育はまともには受けておらず, 数学は独学である.

G. S. Carr 編 : Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Math., 2 vol., 1880, 1886.

を勉強した. 1913.1 に 120 個の公式と定理を G. H. Hardy に送った. Hardy は Littlewood と共にその謎解きをし, '1 人の天才の仕事に目を通している' と述べ,

Hardy 25 点, Littlewood 30 点, Hilbert 80 点, Ramanujan 100 点

と評価した. 1914.5 にケンブリッヂ大学の Hardy の研究室に招かれ, 共同研究を始めた.

Hardy の専門知識 + Ramanujan の天才的閃き = 一連の独創的研究;

Hardy : Ramanujan, Chelsea, 1940.

1919 年に肺結核（ビタミン欠乏症）で帰国し,

'Lost Notebook'

を残す. この中にモック・テータ関数の研究がある. 1920.4.26 に没（32 才）. Ramanujan は数学の庭に多くの種を播いたと云えよう. Ramanujan の 'Notes' の数千の定理の証明やその根拠付けは, G. N. Watson, B. N. Wilson, B. C. Berndt によって完成した. 'Lost Notebook' の方も, G. E. Andrews, B. C. Berndt によってその解明がすすめられている.

§2 $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$

Dedekind のエータ関数：

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i z}, \quad \mathrm{Im}\, z > 0;$$

$$\begin{aligned}\Delta(z) =& \eta(z)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n \\ =& q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 \\ & - 6048q^6 - 16744q^7 + 84480q^8 - \cdots .\end{aligned}$$

$\Delta(z)$ は重さ 12 の cusp form で, $\tau(n)$ を Ramanujan の τ-関数と呼ぶ.

$\tau(n)$ の基本性質

(1) 乗法性

$$(-24) \times 252 = -6048, \ : \ \tau(2) \times \tau(3) = \tau(6) = \tau(2 \times 3).$$

一般に, $(m, n) = 1$ のとき

$$\tau(m) \cdot \tau(n) = \tau(mn);$$

(2) 素数 p, 自然数 n ($\geqq 2$) に対し

$$\tau(p^{n+1}) = \tau(p)\tau(p^n) - p^{12-1}\tau(p^{n-1})$$

($\longrightarrow$ Hecke 作用素)

(3) Ramanujan 予想

$$|\tau(p)| \leqq 2p^{\frac{12-1}{2}} \quad (\forall p : \text{素数})$$

(Deligne 解決, 1974)

(4) $\tau(n)$ に関する佐藤・テイト予想

上の (3) を踏まえて

$$\tau(p) = 2p^{\frac{11}{2}} \cos\theta_p$$

とおく. このとき, $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi$ なる α, β に対し,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\{p \leqq x \text{ をみたす素数 } p \text{ のうち } \alpha \leqq \theta_p \leqq \beta \text{ をみたすものの個数}\}}{\{p \leqq x \text{ をみたす素数 } p \text{ の総数}\}} = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sin^2\theta \, d\theta$$

が成立する. 即ち, $\{\theta_p\}$ は測度 $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\, d\theta$ に関して $[0, \pi]$ で一様に分布する. (T.B-Lamb, M.Harris, D.Geraghty, R.Taylor 解決, 2009.7)

(5) Lang. Trotter 予想

$a \in \mathbf{Z}$

$$\pi_a(x) = \#\{p \leqq x \ : \ \tau(p) = a\}$$

は各 a に対して有限か？

一般化 Lang. Trotter 予想：$f \in M(k, \varepsilon, \Gamma_0(N))$ の Fourier 係数 a_n がすべて $\in \mathcal{O}_K$ (K : 代数体) とするとき, $\mathcal{O}_K$ 内の元 β と素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し

$$\pi_{\beta,\mathfrak{p}}(x) = \#\{n \ : \ 1 \leqq n \leqq x, \ a_n \equiv \beta \mod \mathfrak{p}\}$$

の漸近的性質は？

(6) D. H. Lehmer 予想 (1947)

$$\tau(n) \neq 0 \text{ for all } n \text{ (未解決)}$$

(§3 の harmonic weak Maass form の Fourier 係数の代数性と関連する.)

(7) $\tau(n)$ の合同式

$$\begin{aligned}
&\tau(2m) \equiv 0 \mod 2^3, && \tau(3m) \equiv 0 \mod 3^2\\
&\tau(5m) \equiv 0 \mod 5, && \tau(7m) \equiv 0 \mod 7\\
&\tau(7m+3) \equiv 0 \mod 7, && \tau(23m+5) \equiv 0 \mod 2\\
&\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \mod 2^5,\ p \neq 2 &&\\
&\tau(p) \equiv 1 + p \mod 3,\ p \neq 3 &&\\
&\tau(p) \equiv p + p^{10} \mod 5^2 &&
\end{aligned}$$

$$\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \mod 691 \tag{1}$$

Ramanujan によるこのような合同式がどこまでも続く. その背景にあるものは?

J.-.P. Serre, Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de Ramanujan, Seminaire Delange-Pisot-Poiton, 9e, année, n° 14, 1967/68.

H.P.F Swinnerton-Dyer, Congruence properties of $\tau(n)$, in 'Ramanujan Revisited' (Ed. G. E. Andrews), 1988, 289-310.

(1) は次のように証明される:

$$\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$$

とおくと, (1) は

$$\tau(p) \equiv \sigma_{11}(p) \mod 691 \tag{2}$$

となる. (2) を示す.

$$\begin{aligned}
Q &= 1 + 240 \sum \sigma_3(n) q^n : \text{重さ } 4 \text{ の Eisenstein 級数}\\
R &= 1 - 504 \sum \sigma_5(n) q^n : \text{重さ } 6 \text{ の Eisenstein 級数}
\end{aligned}$$

とおく.

$$G_{12} = \frac{691}{65520} + \sum \sigma_{11}(n) q^n$$

は重さ 12 の Eisenstein 級数である. Q^3, R^2 は重さ 12 の modular forms の base を与えるから,

$$\begin{aligned}
1728\Delta &= Q^3 - R^2,\\
65520 G_{12} &= 441 Q^3 + 250 R^2
\end{aligned}$$

と表される. これより,

$$\begin{aligned}
65520 G_{12} + 432000\Delta &= 691 Q^3,\\
691 &\mid (65520 + 432000).
\end{aligned}$$

ここで, 上式の両辺の q^p の係数を比較して, (2) を得る. 即ち, modular form の Fourier 係数を mod 691 で考えればよい ($\to$ modular form mod ℓ).

$\Delta(z)$ に関する合同式をもっと一般的に扱う目的の 1 つは, Lehmer 予想 (6) を attack するためである.

ℓ : 素数,

K_ℓ : ℓ を除いて不分岐な $\mathbf{Q}$ 上の maximal 代数拡大,

とする. Serre-Deligne の定理より

$\exists \rho_\ell : \mathrm{Gal}\,(K_\ell/\mathbf{Q}) \longrightarrow GL_2(\mathbf{Z}_\ell)$ homo.,

s.t. 任意の素数 p ($\neq \ell$) に対し, $\rho_\ell(\mathrm{Frob}(p))$ は特性多項式 $x^2 - \tau(p)x + p^{k-1}$ ($k = 12$) をもつ.

このとき,

$$\begin{aligned} \chi_\ell : \quad & \mathrm{Gal}\ (K_\ell/\mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{Z}_\ell^\times \\ & \chi_\ell(\mathrm{Frob}(p)) = p \end{aligned}$$

なる χ_ℓ により,

$$\det \rho_\ell = \chi_\ell^{12-1}$$

と表される. ここで, ρ_ℓ reduction mod ℓ を $\widetilde{\rho}_\ell$ とするとき,

定理 $\widetilde{\rho}_\ell$ の $GL_2(\mathbf{F}_\ell)$ 内の像 $\not\supset SL_2(\mathbf{F}_\ell)$ なら, 次の (1)〜(3) のいづれかが成立する :

(1) $\exists m \in \mathbf{Z}$, $\tau(p) \equiv p^m + p^{12-1-m} \bmod \ell$;

(2) $\tau(p) \equiv 0 \bmod \ell$, whenever $\left(\dfrac{p}{\ell}\right) = -1$;

(3) $p^{1-12}\tau^2(p) \equiv 0, 1, 2, 4 \bmod \ell$.

§3 モック・テータ関数と Maass 波動形式

モック・テータ関数のはじめは Ramanujan から Hardy にあてた手紙である (1920.1). そこでは, 明確な定義もなくて 17 個 (order 3 が 4 個, order 5 が 10 個, order 7 が 3 個) のモック・テータ関数が導入されている. 例えば, その 1 つは

$$\begin{aligned} f(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q;q)_n^2} \\ &= 1 + \frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^4}{(1+q)^2(1+q^2)^2} + \cdots , \end{aligned}$$

ここで, $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$. この $f(q)$ に, 次の操作を施す:

1) $f_0(q) = q^{-\frac{1}{24}} f(q)$ を作る. 一般には, モック・テータ関数 $H(q)$ に対し

$$h(q) = q^\lambda H(q) \quad (\lambda \in \mathbf{Q})$$

を作る (modular にするため).

2) 変数を $q = e^{2\pi i z}$ として, z に変える.

$$|q| < 1 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} z > 0.$$

3) $h(z)$ に non-holo. correction term $R_3(z)$ を加える:

$$\widehat{h}(z) = h(z) + R_3(z).$$

$f_0(z)$ に対しては,

$$R_3(z) = \sum_{n \equiv 1 \pmod 6} \operatorname{sgn}(n)\beta(n^2 y/6) e^{-\frac{2\pi i n^2 z}{24}} \quad (z = x + iy)$$

$$\beta(x) = \int_x^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi u}\, du = 2\int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-\pi t^2}\, dt.$$

この $R_3(z)$ は, 次のように重さ $\frac{3}{2}$ の holo. modular form $g_3(z)$ を使って表される:

$$R_3(z) = \frac{i}{\sqrt{3}} \int_{-\bar{z}}^{i\infty} \frac{g_3(\tau)}{\sqrt{\dfrac{\tau + z}{i}}}\, d\tau,$$

$$g_3(z) = \sum_{n \equiv 1 \pmod 6} n e^{\frac{2\pi i n^2 z}{24}} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{-12}{n}\right) e^{\frac{2\pi i n^2 z}{24}}.$$

この $g_3(z)$ を, モック・テータ関数 $f(q)$ または重さ $\frac{1}{2}$ の mock-modular form $f_0(z)$ の shadow という (Zagier).

更に, 重さ k の Laplacian を

$$\Delta_k = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

とするとき, $\widehat{f}_0(z) = f(z) + R_3(z)$ は

$$\Delta_{\frac{1}{2}} \widehat{f}_0(z) = 0$$

をみたす.

N.B. 次の関係がみてとれる.

$$\begin{array}{ccc} \text{重さ } \frac{1}{2} \text{ の } f_0(z) & \longleftrightarrow & \text{重さ } \frac{3}{2} \text{ の } g_3(z) \\ \text{重さ } : k & \longleftrightarrow & 2-k \end{array}$$

以上のことを踏まえて, 次の一般的定義に導かれる.

$k \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, v : odd

$$\varepsilon_v = \begin{cases} 1 & v \equiv 1 \mod 4 \\ i & v \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

とおく. $\Gamma = \Gamma_0(N)$ (ただし, $k \in \frac{1}{2}\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}$ のときは, $4 \mid N$) とする. 複素上半平面 H^+ 上の関数

$$f : H^+ \longrightarrow \mathbf{C} \quad \text{smooth}$$

が次の条件 (1) ～ (3) をみたすとき, f を Γ 上の重さ k の harmonic weak Maass form または weakly harmonic form という.

(1) $\Gamma \ni \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し,

$$f(\gamma z) = \left(\frac{c}{d}\right)^{2k} \varepsilon_d^{-2k} (cz+d)^k f(z),$$

(2) $\Delta_k f = 0$,

(3) Γ の各 cusp で高々 1 次の exponential growth である ($\exists c > 0$, $f(z) = O(e^{cy})$ as $y \to \infty$, uniformly in x).

このとき, $f(z)$ は次の Fourier 展開をもつ :

$$f(z) = \sum_{n \geqq n_0} a^+(n) q^n + \sum_{n \geqq 0} \gamma(n; y) q^{-n}. \quad (n_0 \text{ は一般には負})$$

上式の右辺の第 1 項を f の holo. part, 第 2 項を non-holo. part と呼ぶ. f が H^+ 上 holo. なら, f は weakly holo. modular form になる (weakly : cusps で $q^{-O(1)}$ type の singularity をもつ).

更に,

ψ : mod N の Dirichlet 指標,

f : $\Gamma_1(N)$ 上の重さ k の weakly harmonic form

に対し, $\Gamma_0(N) \ni \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の作用で

$$f(\gamma z) = \psi(d) \left(\frac{c}{d}\right)^{2k} \varepsilon_d^{-2k} (cz+d)^k f(z)$$

が成立するとき, f を Nebentype の weakly harmonic form と呼ぶ. このとき,

$$\xi_k(f)(z) = 2iy^k \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z)}$$

は $\Gamma_0(N)$ 上重さ $2-k$ の Nebentype 指標 $\overline{\psi}$ をもつ weakly holo. modular form になる (Bruinier-Funke).

定義 weakly harmonic form f の holo. part

$$\sum_{n \geqq n_0} a^+(n) q^n$$

を shadow $\xi_k(f)$ をもつ重さ k の mock-modular form という.

§4 Mock-modular forms of weight 1

$k = 2-k$: $k = 1$ の場合を考察する. まず,

$k \in \mathbf{Z}$,

$\psi : \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}^\times$ mod N の Dirichlet 指標,

$$\psi(-1) = (-1)^k$$

とする. $\Gamma_0(N) \ni \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し

$$\psi(\gamma) = \psi(d)$$

とおく.

$$f : H^+ \longrightarrow \mathbf{C} \text{ smooth}$$

が次の条件：

(1) f : real analytic ;

(2) $\Gamma_0(N) \ni \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し,

$$f(\gamma z) = \psi(d)(cz+d)^k f(z) \,;$$

(3) $\Delta_k f = 0$;

(4) $\Gamma_0(N)$ の各 cusp で, f は高々 1 次の exponential growth である.

をみたすとき, f を重さ k level N の harmonic weak Maass form といい, その全体を $H_k(N,\psi)$ とかく. $H_k(N,\psi) \ni f$ に対し,

$$\xi_k(f) = 2iy^k \overline{\partial_{\overline{z}} f(z)}$$

は重さ $2-k$ の weakly holo. modular form であった.

N.B. $\Delta_k = \xi_{2-k} \cdot \xi_k$ である.

以下 $k=1$ とする.

$M_1(N,\psi)$: 重さ 1 の weakly holo. modular forms の空間,

$M_1'(N,\psi)$: 重さ 1 の holo. modular forms の空間,

$S_1(N,\psi)$: 重さ 1 の cusp forms の空間,

とおく.

$$M_1(N,\psi) \supset M_1'(N,\psi) \supset S_1(N,\psi)$$

である. $H_1(N,\psi) \ni f$ に対し

$$\xi_1(f) \in M_1(N,\overline{\psi})$$

であったから, $\xi^{-1}(S_1(N,\overline{\psi}))$ の元を $S_1(N,\overline{\psi})$ を shadow にもつ重さ 1 の mock-modular form といい, その全体を

$$\mathbf{S}_1(N,\psi) = \xi^{-1}(S_1(N,\overline{\psi}))$$

とかく. 具体的には, $H_1(N,\psi) \ni f$ の Fourier 展開を

$$f(z) = \sum_{n \geqq n_0} a^+(n) q^n - \sum_{n \geqq 0} a(n) \beta_1(n,y) q^{-n},$$

$$\beta_1(n,y) = \int_y^\infty e^{-4\pi n t}\, dt \quad (\beta_1(0,y) = -\log y)$$

とするとき,

$$\xi_1(f) = \sum_{n \geqq 0} a(n) q^n$$

となる. 従って, f の holo. part

$$\sum_{n \geqq n_0} a^+(n) q^n$$

が shadow

$$\xi_1(f) = \sum_{n \geqq 0} a(n) q^n$$

をもつ重さ 1 の mock-modular form である.

そこでまず, shadow が重さ 1 の dihedral newform のとき, 重さ 1 の mock-modular form の存在とその Fourier 係数を求める.

$N = p$: 素数, $p \equiv 3 \bmod 4$ $(p > 3)$, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{-p})$,

h : F の類数,

ψ : F の類群 $\mathrm{Cl}(F)$ の指標

とする. $\mathrm{Cl}(F) \ni A$ に対して決まるテータ関数を $\theta_A(z)$ とし,

$$\begin{aligned} g_\psi(z) &= \sum_{A \in \mathrm{Cl}(F)} \psi(A) \theta_A(z) \\ &= \sum_{n \geqq 0} r_\psi(n) q^n \end{aligned}$$

とおく. $\psi \neq \mathrm{id.}$ なら

$$g_\psi(z) \in S_1(p, \chi_p), \quad \chi_p(*) = \left(\frac{*}{p} \right)$$

かつ g_ψ は dihedral newform である. それらの 1 次独立なものは全部で $\frac{h-1}{2}$ 個ある.

定理 1 (Duke-Li). $g_\psi(z)$ を shadow とする重さ 1 の mock-modular form

$$\widetilde{g}_\psi(z) = \sum_{n \geqq n_0} r_\psi^+(n) q^n \in \mathbf{S}_1(p, \chi_p)$$

が存在して, その Fourier 係数 $r_\psi^+(n)$ は次をみたす.

(1) $\chi_p(n) = 1$ または $n < -\frac{p+1}{24}$ なら

$$r_\psi^+(n) = 0\,;$$

(2)

$$r_\psi^+(n) = -\beta \sum_{A \in \mathrm{Cl}(F)} \psi^2(A) \log |u(n, A)|,$$

ここで, β は p のみによる有理数, $u(n, A)$ は F 上の Hilbert 類体を H とするとき,

$$u(n, A) = \begin{cases} \mathcal{O}_H \text{ 内の単数}, & n \leqq 0, \\ H \text{ 内の代数的数}, & n > 0. \end{cases}$$

定理 2 (Duke-Li).

$$\xi_1 : H_1(N, \overline{\psi}) \longrightarrow S_1(N, \psi)$$

は surjection である.

例 1. $p=23$, $F=\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$, $\#\mathrm{Cl}(F)=3$.

$$\psi,\ \overline{\psi}:\ \mathrm{Cl}(F)\ の2つの指標\ (\neq \mathrm{id.})$$

とする. F 上の Hilbert 類体 H は F 上 x^3-x-1 で生成され, その唯一つの実根を α とすると, $\alpha=|\varepsilon^2|$ (ε : H 内の単数) と表される. また,

$$S_1(23,\chi_{23})=\langle g_\psi(z)\rangle$$
$$g_\psi(z)=\eta(z)\eta(23z).$$

このとき, 定理 1 より, 重さ 1 の mock-modular form $\widetilde{g}_\psi(z)$ があって,

$$\widetilde{g}_\psi(z)=\sum_{n\geqq -1} r_\psi^{+}(n)q^n$$

と Fourier 展開される (この場合, $\widetilde{g}_\psi(z)$ は $g_\psi(z)$ から一意的に決まる).

例 2. $p=283$ (Tate). $p\equiv 3 \bmod 4$ より, $\chi_p(*)=\left(\dfrac{*}{283}\right)$, type は S_4 または A_5. 更に,

$$\dim S_1(p,\chi_p)=\frac{h-1}{2}+2s+4a \quad \text{(Serre)}.$$

$p=283$ のとき, $a=0$, $s\leqq 1$ で Artin 予想が成立しているときは $s=1$. また, $F=\mathbf{Q}(\sqrt{-283})$ の類数 $h=3$. 従って,

$$\dim S_1(p,\chi_p)=1+2=3.$$

その base は, dihedral form $h(z)$, octahedral forms $f_1(z)$, $f_2(z)$ の3つ. 定理 2 より, これらを shadow とする重さ 1 の mock-modular forms $\widetilde{h}(z)$, $\widetilde{f}_1(z)$, $\widetilde{f}_2(z)$ がある. その Fourier 係数は？

Problem. $p\equiv 3 \bmod 4$

$$g_\psi(z)=\sum_{n\geqq 1} r_\psi(n)q^n:\ \Gamma_0(p)\ に関する重さ\ 1\ の\ \text{dihedral}$$

に対し

$$\exists\ \widetilde{g}_\psi(z)=\sum_{n\geqq n_0} r_\psi^{+}(n)q^n:\ \Gamma_0(p)\ に関する重さ\ 1\ の\ \text{mock-modular form}$$

であった. $r_\psi^{+}(n)$ は $r_\psi(n)$ 等から具体的に求まる. そこで, これらから, $r'_\psi(n)$ ($n\in\mathbf{Z}$) を定め

$$\widetilde{h}_\psi(z)=\sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ n\neq 0}} r'_\psi(n)e^{2\pi i n x}K_0(2\pi|n|y)$$

が次の (1), (2) をみたすように出来るか？

(1) $\Delta\widetilde{h}_\psi(z)=\dfrac{1}{4}\widetilde{h}_\psi(z)$ ($\Delta=\Delta_0$),

(2) $\exists N$, $\Gamma_0(N)\ni\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対し,

$$\widetilde{h}_\psi(\gamma z)=v(\gamma)\widetilde{h}_\psi(z),$$

ここで, v は $\Gamma_0(N)$ のある指標とする.

更に, $r_\psi(n)$ と $r'_\psi(n)$ の関係式を求めよ.

References

[1] G. E. Andrews, Mock theta functions, in Proc. of Symposia in Pure Math., **49** (1999), Part 2, 283-298.

[2] H. Cohen, q-identities for Maass waveforms, Invent. math. **91**, 409-422 (1988).

[3] W. Duke and Y. Li, Mock modular forms of weight one, Preprint, July, 2012.

[4] S. Ehlen, On CM values of Borcherds products and harmonic weak Maass forms of weight one, Preprint, August, 2012.

[5] D. Zagier, Ramanujan's mock theta functions and their applications (dápré Zwegers and Bringmann-Ono), Séminaire Bourbaki, 60 è année, 2006-2007, n° 986, 1-20.

[6] K. Ono, Mock theta functions, ranks, and Maass forms, in Surveys in Number Theory (Ed. K. Alladi), 2008, Springer, 119-141.

[7] S. P. Zwegers, Mock ϑ-functions and real analytic modualr forms, Contemporary Math., **291** (2001), 269-277.

[8] S. P. Zwegers, Mock Theta Functions, Utrecht PhD Thesis (2002).