RATIONAL FUNCTIONS DEFINED BY THE LEMNISCATE FUNCTIONS AND THE PRIMARY NUMBER OF GAUSSIAN INTEGER (STEP 2) ~GAUSS, ABEL, EISENSTEIN, を繋ぐ虹の架け橋~

TAKUMA OGAWA（小川　琢磨）

1. ベースキャンプ、標高４３００mから８０００m峰へのアタック

1.1. 筆者が目標としている研究内容. 筆者の興味関心は、関数（三角関数、lemniscate 関数、ベータ関数、超幾何関数…）の特質にあります。その中で、lemniscate 関数は、虚数乗法を持つ楕円関数ですが、虚数乗法というよりは、三角関数と極めて似て非なる性質を幾つも持っているという点で、筆者はとても大きな興味と感心、そして期待を持ち続けています。究極的には、三角関数と lemniscate 関数を含む、一連の関数の族を構成して見せる。さらに、三角関数や lemniscate 関数と同様の様々な応用を与えてみせる。…というような事を思い描いているのですが…

- 知識が足りない…
- 技術が足りない…
- 道具が足りない…

と、まあ、足りない尽くし。という状況です。それでも、意識して数学を続けていれば、数学の方から何らかのアクションを起こしてくれます。普段は、深遠な巨大な穴を見せてくれるだけで、人を寄せ付けないくせに…たまに起こしてくれる気まぐれなアクションを見逃さずに辿ると、確かに何かかがあると窺わせる状況証拠が出て来ます。筆者が、論文を投稿したり、あるいは、学会で口頭発表したりする内容はこの、状況証拠です。今回、この報告論文では、lemniscate 関数が三角関数と極めて似て非なる性質を幾つも持っている視点で、以下の２つの事柄について報告をしたいと思います。

(あ) 三角関数と lemniscate 関数の双方に成立する類似な合同関係式について
(い) 三角関数によって定義される、多項式や有理関数に成立する関数等式達とその関数等式を与える変換についてと、lemniscate 関数によって定義される、有理関数に成立する関数等式達とその関数等式を与える変換について、双方を比較したときに、其処に認める事が出来た類似性（似て非なる性質）について

特に、上記（い）に関しては、確かに何かかがあると窺わせる状況証拠の一つであると筆者は考えています。

AMS Mathemactics Subject Classification 2000: Primary 11C99, 33B99, 33E99. Secondary: 01-02, 01A55.
Key words and phrase: Abelian equation, Abelian extension, complex multiplication, lemniscate function, circular function, reciprocity law, Eisenstein's congruence, dihedral group.
Date: 2009.8.24.
Date: 2013.10.12. 津田塾大学　第２４回数学史シンポジウム講演予定稿＋α.
Date: 2014.01.30. 津田塾大学　数学計算機科学研究所報として提出.

1.2. この報告論文の一つの特徴、『独り言』について. この報告論文では、度々**独り言**が登場します。数学の内容や研究その物とは直接関係が無いのかもしれません。が、数学研究活動に依って得られる副産物、あるいは副作用は確かに在るわけで、それらを**独り言**として紹介したいと思います。研究内容も含めてですが、この方面（独り言）に関しても、御意見があれば筆者に、その御意見をお聞かせください。筆者が**独り言**を書くのは、『自分自身の分析と反省に活かすために』と『数学の研究活動を始めようとしている人達への参考のために』そして『数学の研究活動をしている人達との共感』のためにです。

独り言 1.1. 今回の数学史シンポジウムにおいて筆者が、先陣を切るかたちで発表をしました。が、朝一で、数少ない聴講者の一人に『…小川さんの話は難しくて良く解らないです。高校生にでも解るように説明を心掛けては…』と言われ、さらに、久々にお会いした先輩には、『…画面が、小さくて良く見えなかった…それと、ページのめくるスピードが速すぎたね…』とダメ出しをされてしまい…そもそも、個人的な感覚や感性に殉じたとしても**研究の内容が発表できるレベルに到達するのは稀**で、そうすると、『何で、稀にしか研究成果が出ないのに、ましてやパンが食べれる訳でもないのに数学研究を続けているのは何故？』というような質問をぶつけられそうですが、数学研究を続けている理由の一つは、意地。もう一つは、稀にしか獲られない**研究成果がもたらしてくれる世界観、あるいは感動、といったものが、確かに在る**から。という事に、個人的には成ります。ここで、特に２つめの理由に関連してですが、稀にしか獲られない研究成果ということもあるとは思うのですが、研究成果を獲たとき、（学会等で発表する時も、研究成果を獲た時と同じ意識感覚で喋っています。）**自身の意識感覚が、実社会と大きく乖離している**のを感じます。結局、研究内容を発表するか否かは、自身の意識感覚に殉じているので、a:実社会の小川、b:研究成果を獲た直後の小川を結びつける、c:案内人の小川、が必要だったのかな？というのが、個人的見解、そして反省です。せっかく研究成果を獲た訳ですので、研究内容をしっかり（数学の）専門家たちに伝える。そこまで出来てようやく一仕事できあがりなわけで、少しでも社会に還元する責任を果たそうと思います。という事で、この報告論文は２人の小川（b:研究成果を獲た直後の小川、c:案内人の小川）で書き進め、研究内容と研究成果を数学の専門家達に伝えたいと思います。

独り言 1.2. 稀にしか獲られない**研究成果がもたらしてくれる世界観**を伝えるために、①何処からきて、②何を獲て、③何処へ向かおうとしているのか？を意識しながら書き進めたいと思います。普通、一般的には①何処からきての部分は『…常識的な事だね』で片付けられ、②何を獲ての部分は『…そんなものは微積の演習問題だね（etc）』と一蹴され、③何処へ向かおうとしているのか？の部分に関しては、『…思い込みで数学を語るんじゃない（論文にそんな事を書くんじゃない）』と、まあ、踏んだり蹴ったりな世界です。それでも、上記①②③と踏まえて報告集を書き進めるのはその方が**研究成果がもたらしてくれる世界観**を伝えられるのではないか…と感じているからです。また、記事にまとめて置けば、少なくとも未来の自分へのバトンが繋がる可能性も僅かではありますが生まれるからです。（もっとも、競争社会の名の元に、記事にした以上は他人がバトンを持って行ってしまうことも可能性としては生まれてしまうのですが、勿論、個人としてはショックな事ですが、数学としてはバトンが繋がるわけで、バトンが繋がった事により、意味と意義が生まれるわけですから）そして、この報告論文は、かつての自分が出したバトンを受け継ぐ内容のものです。

1.3. Eisenstein の相互法則の証明と、この報告論文の内容. この報告集のタイトルと、三角関数と lemniscate 関数の双方に成立する似て非なる類似な性質は、Eisenstein がした三角関数を使った平方剰余相互法則の証明と、lemniscate 関数を使った 4 次剰余相互法則の証明に認める事が出来ます [1, 2]。証明は、三角関数を用いてルジャンドル記号を表し、lemniscate 関数を用いて 4 次剰余記号を表すことによるものです。

(平方剰余の相互法則の場合) p, n は $\mathbb{Z}$ 上の奇素数とします。a を p の剰余系として、その剰余系全体（但し、単数倍で移り合うものを除く）を A と置きます。このとき、ルジャンドル記号は以下のようになります。

$$\left(\frac{n}{p}\right)_2 = \Pi_{a\in A}\frac{\sin n\left(\dfrac{2\pi a}{p}\right)}{\sin\dfrac{2\pi a}{p}}, \qquad \pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.1}$$

Eisenstein に依って与えられたルジャンドル記号の三角関数による表示 (1.1) により、関数 $\sin nu/\sin u$ が見て取れるのですが、実は、n を $\mathbb{Z}$ 上の奇数とすると、帰納法により関数 $\sin nu/\sin u$ が $\sin^2 u$ の $\mathbb{Z}$ 係数の多項式に成ることが解ります。なので、この事実を受けて以下のような定式化ができます。

$$P_{s,n}(w) := \frac{\sin nu}{\sin u}, \qquad w := \sin^2 u. \tag{1.2}$$

Eisenstein はルジャンドル記号の三角関数による表示 (1.1) を得て、その後に (1.2) の多項式 $P_{s,n}(w)$ の性質（積表示や、合同関係式）を用いて平方剰余の相互法則の証明を与えました。この報告論文では改めて、lemniscate 関数との特質の比較をするために、(1.2) の多項式 $P_{s,n}(w)$ や、それに類似する多項式等の話を後に展開します。以上が三角関数の場合です。.

(４次剰余の相互法則の場合) r, m は $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary prime とします。$\mathrm{sl}(u)$ を lemniscate sine とし、b は r の剰余系として、B をその剰余系全体（但し、単数倍で移り合うものを除く）と置きます。このとき、４次剰余記号は (1.3) のようになります。

$$\left(\frac{m}{r}\right)_4 = \Pi_{b\in B}\frac{\mathrm{sl}\, m\left(\dfrac{2\omega b}{r}\right)}{\mathrm{sl}\,\dfrac{2\omega b}{r}}, \qquad \omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{1.3}$$

４次剰余記号の lemniscate 関数による表示 (1.3) により、関数 $\mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ が見て取れるのですが、実は、m を $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数とすると、帰納法と虚数 i の作用により関数 $\mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ が $\mathrm{sl}^4(u)$ の $\mathbb{Z}[i]$ を係数にもつ有理関数に成ることが解ります。なので、この事実を受けて以下のような定式化ができます。

$$R_{s,m}(X) := \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad X := \mathrm{sl}^4(u). \tag{1.4}$$

ここに、(1.4) により lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数に依って定義される有理関数 $R_{s,m}(X)$ を認める事が出来ます。ようやく、この報告論文のタイトルその物の現物が出て来ました。Eisenstein

は4次剰余記号の lemniscate 関数による表示 (1.3) を得て、その後に (1.4) の有理関数 $R_{s,m}(X)$ の性質（積表示や、合同関係式）を用いて4次剰余の相互法則の証明を与えました。この報告論文では改めて、(1.4) の有理関数 $R_{s,m}(X)$ や、それに類似する有理関数等の話をメインに展開します。実際に Eisenstein が [2] で与えた (1.4) の有理関数 $R_{s,m}(X)$ の多項式に現れる合同関係式の別証明を紹介します。以上が lemniscate 関数の場合です。

独り言 1.3. 例えば、学会発表し、その報告論文を書くという、研究活動をするときに、

『何 P を発表し、何 W を書くか？』

似て非なる（基本的には2つの活動は $P \equiv W$ だと思うのだけれど…）2つの活動『P : 発表』と『W : 書く』、があります。もっとも、この2つの活動に載せるだけの『C : 内容、中身』が在っての話ですが。と、すると、

$$P(C), \qquad W(C), \qquad \text{この2つの関係をどうするか？}$$

ということに成るのでしょうか。もっとも、この2つの $P(C), W(C)$ には、業界のグレーゾーンで、すでに在る関係が定められているのかもしれませんが、筆者は、そのような在る関係を知りません。業界のグレーゾーンで、すでに定められている関係は、いっぱい在るように感じています。例えば、『論文の2重投稿』。ここで出てきた『論文の投稿』という活動は、上記の $W(C)$ に含まれる事に成ると感じています。このシンポジウムは $P(C), W(C)$ の両方が在るので、特に $W(C)$ に関してですが、『論文の2重投稿』に引っかかっては敵わないので、一応、主催者側に確認をして『他の雑誌への投稿は可能である』という回答を頂いたので、なので、今回の発表に踏み切りました。そして、発表に踏み切っているという事は、それに値する学問的な前進が在ったと私自身が認めたからであります。筆者が認めた学問的な前進というのは、先に述べた（あ）、（い）で具体的に書くと

(あ) lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary prime 数に依って定義される有理関数の多項式に成立する合同関係式についての別証明が与える事が出来た。(元々は Eisenstein が [2] で与えた)

(い) 三角関数によって定義される、多項式や有理関数に成立する関数等式達とその関数等式を与える変換についてと、lemniscate 関数によって定義される、有理関数に成立する関数等式達とその関数等式を与える変換について、双方を比較したときに、其処に類似性（似て非なる性質）を認める事が出来た。

になります。これらの内容を、より具体的に、この報告論文で書き記します。目的は、**研究成果がもたらしてくれる世界観**を伝えるためにです。そして、より確実にするために、①何処からきて、②何を獲て、③何処へ向かおうとしているのか？を意識しながら書き進めますので、当然の事ながら（筆者の講演予定稿を見ながら、話を聞いていた人達にとっては当然、そして驚き…）

$$P(C_1) \subset W(C_2), \qquad \text{であり、かつ} \qquad (C_1 \subset C_2)$$

の関係に成ります。筆者の講演内容に興味を持ち、朝一にもかかわらず、筆者の講演予定稿を手にしながら聞いていた人達のために、未来の自分のために、未来の専門家達にキッチリ内容と主旨を伝えるために、丁寧に書き進める予定です。

1.4. 筆者の数学的な意志。歴史的背景と、この報告論文で書かれる内容との関連（①）. この報告論文では、Eisenstein がした相互法則の証明を受けて、三角関数の場合は (1.2) の多項式 $P_{s,n}(w)$ や、それに類似する多項式等の話を展開します。そして、lemniscate 関数の場合は (1.4) の有理関数 $R_{s,m}(X)$ や、それに類似する有理関数等の話をメインに展開します。２つの話をわざわざするのは改めて三角関数や lemniscate 関数の性質を比較するためにです。歴史的には

$$\text{三角関数} \Longrightarrow \text{lemniscate 関数}$$

の順で登場したのですが、その数学的哲学は Gauss 整数論第７章に始まります。

一般に代数方程式は、１、２、３、４次の方程式までは、解の公式が存在します。代数的に解く事ができます。しかし、５次以上の代数方程式に関しては一般的に代数的に解く事が出来ません。（これは、Abel の指摘です。）しかし、**特別の場合に**５次以上の代数方程式で代数的解法を有するものがあります。これは、Gauss 整数論第７章の話 [16, p419–p469] ですが、例えば、

$$x^n - 1 = 0,$$

などがそうです。これの根は、現在だと関数論の立場から直ちに

$$e^{\frac{2\pi ri}{n}} = \cos\frac{2\pi r}{n} + i\sin\frac{2\pi r}{n}, \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

で与えられます。再び関数論の立場から、上記の根が、半径１の円に内接する正多角形（n 角形）の頂点に対応しているのが解ります。無論、Gauss も円の分割を定める方程式として $x^n - 1 = 0$ を認識し、$x^n - 1 = 0$ という代数方程式を**円関数（三角関数）を用いて理論展開**を与えました。また、円周等分方程式 $x^n - 1 = 0$ を根の形状から以下の代数方程式を含むものとしても認識していました。

(1.5) $$\sin\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1), \quad \text{を根に持つ代数方程式}$$

(1.6) $$\cos\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1), \quad \text{を根に持つ代数方程式}$$

(1.7) $$\tan\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1), \quad \text{を根に持つ代数方程式}$$

また、その冒頭で次のような示唆も与えられています。Gauss により始められた**等分方程式論**の中に**虚数乗法論の源泉**を認める事が出来ます。

> 「ところが、我々は今から説明を始めたいと思う理論の諸原理は、ここで繰り拡げられる事柄に対して、それよりもはるかに広々と開かれている。なぜなら、この理論の諸原理は円関数のみならず、そのほかの多くの超越関数、たとえば積分
>
> $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$
>
> に依拠する超越関数に対しても、そうして、またさまざまな種類の合同式に対しても、同様の成果を伴いつつ、適用することができるからである。」[16, p419]

上記の積分の式に依拠する超越関数が、lemniscate 関数のことです。Gauss は公表をしませんでしたが、既に lemniscate の曲線の等分理論を感知していました [22, 44]。

以上のような Gauss 整数論第 7 章の話 [16, p419–p469] を、上記の示唆を受けて、また、その内容、円周等分理論、あるいは、この場合言い換えると**三角関数の等分方程式論を受けて**、Abel は Recherches の中で**楕円関数の等分方程式論**を展開します [17, 21]。Abel は実際に [17, 21] において

$$x := \phi(\alpha) \overset{\text{逆関数}}{\Longleftrightarrow} \alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}, \qquad (c, e : \text{定数}). \tag{1.8}$$

と楕円関数 $\phi(\alpha)$ を定義しさらに、**状勢を簡易化するために、つまり、加法定理や、微分関係式を与えるために新たに**楕円関数 $f(\alpha)$ と $F(\alpha)$ を

$$f(\alpha) := \sqrt{1-c^2\phi(\alpha)^2}, \qquad F(\alpha) := \sqrt{1+e^2\phi(\alpha)^2}. \tag{1.9}$$

と定義して、楕円関数の性質をまず明確にした上で、$m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\phi(m\alpha), \qquad f(m\alpha), \qquad F(m\alpha).$$

が**それぞれ $\phi(\alpha), f(\alpha), F(\alpha)$ の有理関数で表示できる事実に着目**します（帰納的に加法定理を用いて事実が得られます。）。そして、得られた表示、考えられる事実より、有理関数の積表示を考えれば $\phi(m\alpha) = 0$ を満たす方程式の根、つまり

$$\phi(m\alpha) = \frac{P_m(\phi(\alpha)^2)}{Q_m(\phi(\alpha)^2)}, \qquad (\exists P_m(X), Q_m(X) \in \mathbb{Z}[X]).$$

という事実を用いれば上記 $\phi(m\alpha)$ の表示によって決定される代数方程式 $P_m(X) = 0$(**これが特殊等分方程式**) の根 X_0 が**形式的に楕円関数の特殊値として**

$$X_0 = \phi\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{m}\right)^2, \qquad (a, b \in \mathbb{Z}). \tag{1.10}$$

で与えられる事を表明します。ここで、ω_1, ω_2 は

$$\omega_1 = 2\int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}, \qquad \omega_2 = 2\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

で決まる定数です。(上記定義した、楕円関数 $\phi(\alpha)$ はその基本周期を $(2\omega_1, i2\omega_2)$ に持ちます。) 特殊（周期）等分方程式 $P_m(X) = 0$ の根の形状 (1.10) を用いて、特に $m = 2n+1$ の時の場合に代数的に解けるのか、解けないのかを Gauss 整数論第 7 章 [16, p419–p469] をまねて考察します。そして、Abel は特殊（周期）等分方程式 $P_m(X) = 0$ が代数的に解けるものと、代数的に解けない場合の 2 つのグループに分かれる認識を持ちます。Abel は特殊（周期）等分方程式 $P_m(X) = 0$ が一般的には代数的に解けない事に気付きました。

$$\text{特殊等分方程式 } P_m(X) = 0 \begin{cases} \text{代数的に解ける} & e = c, e = c\sqrt{3}, e = c(2 \pm \sqrt{3}), \cdots. \\ \text{代数的に解けない.} & \end{cases}$$

この楕円関数とその加法定理によって定義される特殊等分方程式が代数的に解ける。この時の楕円関数を今日では虚数乗法を持つ楕円関数と呼んでいます。**この Abel の発見が虚数乗法論の誕生です。** Abel は Recherches [17, 21] の中で楕円関数 $\phi(\alpha)$ を与える定数 c, e が上記に在るような**特別な**

関係にあるとき、その特殊等分方程式は代数的に解けると明言し、さらに具体的に $e=c=1$ の時、つまり lemniscate 関数の時の詳細も論じています。具体的に $\mathrm{sl}((2+i)u)$ の計算結果、本報告集や過去に著者が発表した [58] の中の $F_{1,0}$ に相当するものも提示しています。また曲線 lemniscate の分割ができる事も言明しています。

さて、ここまでの流れを再確認したいと思います。Gauss 整数論第 7 章の話 [16, p419–p469] において、円の分割を定める方程式 $x^n-1=0$ を元としてオイラーの等式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いて三角関数の（周期）等分方程式論が展開されます。具体的には (1.5),(1.6),(1.7) がそれになります。そして、これらの代数方程式は $x^n-1=0$ が代数的に解ける事から、これらの代数方程式 (1.5),(1.6),(1.7) も代数的に解けます。特に代数方程式 (1.5) は $\sin nu=0$ とその根を意味していて、この報告論文で扱う (1.2) の多項式 $P_{s,n}(w)$ の零点はここに含まれます。

この Gauss 整数論第 7 章の話、それから、その冒頭の示唆により Abel が Recherches [17, 21] の中で楕円関数（一般性を保持する第一種楕円積分の逆関数）の（周期）等分方程式論を展開します。$\phi(m\alpha)=0$ を考えその根が (1.10) の X_0 として形式的に楕円関数の周期の等分値で与えられると表明します。この楕円関数の（周期）等分方程式論は、三角関数の場合とは様相が異なり、この（周期）等分方程式が代数的に解けるものと、代数的に解けないものに分かれます。Abel の Recherches [17, 21] の中で lemniscate 関数は $e=c=1$ の場合になり、その（周期）等分方程式は代数的に解ける側に属します。なので、当然、lemniscate 関数は虚数乗法を持つ楕円関数になります。この報告論文で扱う (1.4) の有理関数 $R_{s,m}(X)$ の零点はここに含まれます。

実はこの零点（$\sin nu=0$ や、$\mathrm{sl}(mu)=0$ の根）には重要な事実があります。

定理 1.4 (Kronecker-Weber). *基礎体 $\mathbb{Q}$ の Abel 拡大体 K は、$\mathbb{Q}$ に 1 の n 乗根を添加した体（円分体）に含まれる。*

$$K\subseteq\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}}),\quad n\text{ は整数}.$$

定理 1.5 ([23] 高木貞治学位論文). *基礎体 $\mathbb{Q}(i)$ の Abel 拡大体 K は、$\mathbb{Q}(i)$ に対して lemniscate 関数の等分値*

$$\mathrm{sl}\left(\frac{2\omega}{m}\right),\quad m\text{ は Gauss 整数}.$$

を添加して得ることができる。

ここでは、虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m}),(m>0)$ の Abel 拡大体の記述の説明はしません。詳細は、例えば河田 [31] の第１３章類体論を見て下さい。この研究所報の目的は三角関数と lemniscate 関数の類似点を明確にして、さらに、そのような視点から感知される世界を明らかにする事にあるからです。さて今後の課題として…ですが 1900 年に Hilbert に依って提唱された『Hilbert 12 問題』というものがあります。これは、上記の Kronecker-Weber の定理 1.4 の一般化（拡張 !?）を考えたものです。

問題 1.6 (Hilbert 12 問題). *与えられた基礎体 K_b の Abel 拡大体 K をある解析関数 $f(z)$ を用いて、*

$$K\subseteq K_b\big(f(z_0)\big),\quad z_0\text{ は特殊値}.$$

以上のように記述出来ないか？

この『Hilbert 12 問題』に対して、基礎体 $\mathbb{Q}(i)$ の場合は上記定理 1.5 の高木貞治先生 [23] により、基礎体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合は竹内端三により、解決しました。そして、虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m}), (m > 0)$ を基礎体とした場合は、類体論の応用として高木貞治先生により解決しました。最近発表された高瀬正仁先生の論説 [26] では、その最後に Jacobi 関数が『Hilbert の 1 2 問題』に対して一定の貢献をするのではないのか？と予見されています。

Hilbert に依って提唱された『Hilbert の 1 2 問題』は、数学の分野における、数論、代数学、関数論、の密接、かつ、深い繋がりを示唆する問題です。この『Hilbert の 1 2 問題』を Kronecker-Weber の定理 1.4 や、虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m}), (m > 0)$ を基礎体とした場合の Abel 拡大体の記述として見るよりは、以下の等式で見る方が、観えるような気がします。(僕が好きな観方です。)

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.11}$$

$$\mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\sqrt{2}-1}, \qquad \frac{\omega}{2} := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{1.12}$$

上記のような等式で見ると、改めて、解析関数、周期 (超越数)、代数的数の繋がりを観て取れます。この 2 つの等式 (1.11),(1.12) は、それぞれが $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{Q}(i)$ の Abel 拡大体を生成する数の 1 つです。個人的には Hilbert12 問題に貢献する、ある解析関数 $f(z)$ を具体的に構成してみたいと考えています。しかも、三角関数や lemniscate 関数に類する関数を。つまり、

三角関数や lemniscate 関数を含む関数の族を構成できないのか？

ここまでを整理して、以下が筆者の 1 つの目標 (問題) です。

問題 1.7. 本質的には 1 つの問題であると感じていますが、今後の進展や見通しやすさを考慮して、問題を以下のように *(1),(2)* と分けます。

(1) *Gauss* や *Abel* によって円や *lemniscate* の分割理論が、三角関数や *lemniscate* 関数によって展開された。一方で、[56, Chapter 4,p49–p68] や [57, p61–p70] において、円、*lemniscate* を含む曲線族とその弧長の関係が提示されている。これらの曲線族に対して *Gauss* や *Abel* のような分割理論が構成できないか？

(2) 上記 *(1)* において、三角関数や *lemniscate* 関数に類する関数の構成が必要になると考えられる。一方で我々は、円、*lemniscate* を含む曲線族と、その弧長の関係を知っている。そこで、

$$p_{2n} := \frac{1}{2n}B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \tag{1.13}$$

とおき、

$$f_{2n}\left(\frac{p_{2n}}{n_c}\right) \in \overline{\mathbb{Q}}, \qquad (\text{但し、} n_c \text{ は } n \text{ と無関係な自然数}). \tag{1.14}$$

を表す、あるいは、ここ *(1.14)* に含まれる等式が作れないか？このような関数 $f_{2n}(z)$ が構成できないか？

補足 1.8. 上記問題 *1.7* において、特に *(2)* の

$$p_{2n} := \frac{1}{2n}B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \tag{1.13}$$

は、円や *lemniscate* を含む曲線族を与え、その弧長を考えたときに出現した数です。詳しくは [56, Chapter 4,p49–p68] や [57, p61–p70] を参照して下さい。一方で、*Schneider* により、*Beta* 関数 $B(p,q)$ は p,q が有理数のとき、その値が超越数になることが知られています [34, p71–p76(第 7 問題に関して)], [33] 。なので、勿論 *(1.13)* の p_{2n} は超越数です。関数 $f_{2n}(z)$ は、$n=1$ のときは三角関数、$n=2$ のときは *lemniscate* 関数を表すものとして考えます。なので、等式 *(1.11)* や *(1.12)* は、*(1.14)* に含まれる等式として考えます。これらを踏まえて、問題は $n \geq 3$ の場合は？という事になります。また、今回のお話とは直接関係ないのですが、円や *lemniscate* を含む曲線族を与え、その弧長を考えたときに出現した数が、*Beta* 関数 $B(p,q)$ で捉えられるのですが、これら事実を含む一般化を考えると、さらに、超幾何関数 $F(a,b,c;x)$ が出現します。興味のある方は [60] を紹介しておきます。

筆者の講演の終了の後に、座長を務めた三宅克哉氏 [32] に

『その有理関数の零点はどうなっているのですか？』

という質問をされ

『…零点ですか…(中略) 零点に関しては高木貞治先生の学位論文で尽きていると思います [23]。粗い意味での考察はしているのですが…(後略)』

と、筆者は回答をしました。詳細はここまでに述べたとうりです。Abel によって、lemniscate 関数の（周期）等分方程式が代数的に解けること（< −− つまり、有理関数の零点が代数的に求められるということ。）、高木先生によって基礎体 $\mathbb{Q}(i)$ の Abel 拡大体 K は、$\mathbb{Q}(i)$ に対して lemniscate 関数の等分値 (< −−lemniscate 関数の（周期）等分方程式の根) を添加して得ることができる。と、かなりの事が知られています。にも、かかわらず lemniscate 関数の事を研究するのは、(lemniscate 関数が虚数乗法を持つという事実よりは）三角関数と似て非なる特質というべき性質を幾つも持っているからです。三角関数と lemniscate 関数の似て非なる特質を具体的に書き出すと…

(1) 元になる曲線に…（円ー lemniscate ー三様模様ー…）[57, p61–p70]
(2) 関数の構成法
(3) 相互法則の証明 [1, 2]
(4) 合同関係式 [59]（今回の講演、この報告集のメインの話となる 1 つ）
(5) Abel 拡大体の記述（先に述べた定理 1.4 定理 1.5）
(6) 対称性（関数等式）[55, 57, 59]（この報告集のメインの話となる 1 つ）

となります。この報告論文での具体的な内容は、上記 (4) 合同関係式、(6) 対称性（関数等式）の 2 つについて、まとめた記事にしたいと考えています。

筆者のそもそもの目標は、問題 1.7-(2) の $n=1$ のとき三角関数、$n=2$ のとき lemniscate 関数を含む、関数の族 $f_{2n}(z)$ を構成したい。というものです。あるいは、既知の関数の中から、例えば、テータ関数や、超幾何関数の中から関数の族 $f_{2n}(z)$ に相当するものを見つけ出したい。ということに成ると感じてます。そのための、足場、あるいは、手がかり、として関数の立場から三

角関数と lemniscate 関数の似て非なる特質を抽出する。そういう意志をもって数学研究をしています。

この報告論文では、Gauss や Abel が展開した等分方程式論、$\sin(nu)=0$ や $\mathrm{sl}(mu)=0$ を考えるというよりは、数学研究の立ち位置を Eisenstein がした相互法則の証明と、そのプロセスに置き、三角関数の場合は (1.2) の多項式 $P_{s,n}(w)$ や、それに類似する多項式等の話を展開します。そして、lemniscate 関数の場合は (1.4) の有理関数 $R_{s,m}(X)$ や、それに類似する有理関数等の話をメインに展開します。２つの話をわざわざするのは改めて三角関数や lemniscate 関数の性質を比較するためにです。また、(1.2) や (1.4) のように等分方程式と比較して**ズラシタ処**で話を展開します。この報告論文では lemniscate 関数の場合の話がメインですが、立場を Abel の等分方程式論の場合と比較したら一歩下がり、立場を Eisenstein の相互法則の証明に寄せて、改めて、その**『有理関数』**を考察します。lemniscate 関数の場合を、その**『有理関数』**を考察する。ということは、例えば、[14], [31, 第１３章] から、

「…虚数乗法論 (complex multiplication) を考えているのでしょ！」

と思われる人達はたくさん居ると思います。虚数乗法論 (complex multiplication) が既に特殊な場合で、しかも、この虚数乗法論 (complex multiplication) を build up して造られた理論も既にあります [35, 36, 37], [31, 第１３章], [32]。にもかかわらず、lemniscate 関数の場合を、その**『有理関数』**を考察するのは、関数の立場から三角関数と lemniscate 関数の似て非なる特質を抽出したいからであり、抽出して得られた似て非なる特質を手がかりに、あるいは足場として、問題 1.7-(2) の $n=1$ のとき三角関数、$n=2$ のとき lemniscate 関数を含む、関数の族 $f_{2n}(z)$ を構成したい。からです。そして、以上、述べた内容が、筆者が意志を持って取り組んでいる数学研究が、虚数乗法論 (complex multiplication) 以上に特殊な事象であると筆者が感じているからです。

ここで、改めて虚数乗法論の確認と、その具体例として、今回メインにお話しする内容の (1.4) に依る lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数に依って定義される有理関数 $R_{s,m}(X)$ について、そして、それらを踏まえた筆者の数学としての意志（アプローチの仕方）を説明したいと思います。

そもそも、lemniscate 関数自体が虚数乗法を持つ楕円関数です。**虚数乗法 (complex multiplication) を持つ楕円関数**ですが、以下が虚数乗法を持つ楕円関数の定義です。

定義 1.9. $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ とする。$\phi(u)$ を基本周期 (ω_1,ω_2) を持つ楕円関数とする。このときに、$\phi(\alpha u)$ が基本周期 (ω_1,ω_2) を持つ楕円関数になる時、楕円関数 $\phi(u)$ は虚数乗法 α を持つという。

さらに、この上記定義に対して、楕円関数 $\phi(u)$ の基本周期 (ω_1,ω_2) の周期平行四辺形をラティスと考え直して α を作用させてもラティス不変であると考える事によって、母数（基本周期の比）$\tau:=\omega_2/\omega_1$ が虚２次体の数となっている事が解ります。定義の書き換えがなされます。(必要十分になっています。)

命題 1.10.

楕円関数 $\phi(u)$ が虚数乗法 $(\exists\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$ を持つ。$\Longleftrightarrow$ 基本周期の比 $\tau=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ が虚２次体の数。

今日だと、上記が虚数乗法の一つの定義です [31, p415–p421]。

独り言 1.11. 虚数乗法論はそれぞれの立場から、歴史的な意義 [24, 25, 26]、関数論としての意義（**特別な楕円関数**)、類体論の源流としての位置づけ [32]、そして楕円曲線論からの見解 [30]、等で論じられていて、さらにこの虚数乗法論を build up して造られた理論も既にある [35, 36, 37], も、あり、知の蓄積、創造の蓄積、発見の蓄積、等々…改めて数学の学問の重さを感じる…

lemniscate 関数の場合で見ると、$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ の α として $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数 m を選ぶと、Eisenstein によって (詳しくは、この後の命題 1.15 参照)

$$\mathrm{sl}(mu) = \mathrm{sl}(u)\frac{W_m(x^4)}{V_m(x^4)}, \qquad \text{但し } x := \mathrm{sl}(u).$$

と成ります。しかも、$W_m(X), V_m(X)$ は $\mathbb{Z}[i]$ 係数の多項式なので直ちに、lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$ は虚数乗法 m を持つ事が定義 1.9 より解ります。また実際、命題 1.10 と比較し lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$ は母数 $\tau = 1 + i$ となっています。そもそも定義 1.9 が意味するのは

$$\phi(\alpha u) = R_\alpha(\phi(u)) \tag{1.15}$$

を満たす**有理関数** $R_\alpha(x)$ が存在する事とも取れます。このような (1.15) 立場で具体的な**有理関数** $R_\alpha(x)$ を求める事を明示的虚数乗法問題というのですが、この問題はアルゴリズムの効率を無視すれば既に完全に解決しています。例えば、[38]。いま、虚数乗法の例で挙げた lemniscate 関数の場合を明示的虚数乗法問題の立場で書くと、

$$\mathrm{sl}(mu) = R_m(\mathrm{sl}(u)) \qquad \text{但し} \qquad R_m(x) := x\,\frac{W_m(x^4)}{V_m(x^4)} \tag{1.16}$$

となります。以上をまとめて筆者の数学の意思かつ意志（アプローチの仕方、筆者が考え感じた数学の進展に相当するもの）つまり、お話の内容と展開は以下のようになります。

> Eisenstein がした相互法則の証明 [1, 2] をベースに (1.4) を起点にして、Abel がした特殊等分方程式を考えるというよりは、一歩下がり [17, 21]、 lemniscate 関数の場合を明示的虚数乗法問題の立場に寄せて、$\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数 m と lemniscate 関数で考えられる様々な**有理関数**を考察する。勿論 lemniscate 関数の場合がメインのお話に成ります。また、同時に三角関数の場合にも同様のアプローチを展開した話をします。その上で、この報告論文の 1 ページ目に書いた (あ),(い) に関しての三角関数と lemniscate 関数の類似性についての報告をしたいと思います。

補足 1.12. E を標数 0 の体上で定義されている虚 2 次体 K の整環 R による虚数乗法を持つ楕円曲線とし、$\phi: R \cong End(E)$ を同型写像とします。$R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ となる $\omega \in R$ が存在しますが、そこで与えられた整数 a, b に対して $\phi(a + b\omega)$ を E の有理関数体（あるいはその 2 次拡大体）の元としてどのように求めるか？という問題が明示的虚数乗法問題と呼ばれています。筆者がした事は $R = \mathbb{Z}[i]$ つまり $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \omega = \sqrt{-1}$ の場合（この場合の明示的虚数乗法問題は、実は既に [39] にあります。さらに古くは、[40, 41] に見る事が出来ます。が、いずれも、筆者がこれから話す内容の物とは異なります。）になります。ただ、話の展開の仕方は上記のようになります。

では、これから、筆者の個人的な経緯と、これまでにしてきた事、そしてこの報告論文で発表される内容の一部の結果に相当する $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数 m と lemniscate 関数で考えられる様々な**有理関数**の具体例やその形状を簡単に紹介したいと思います。

1.5. これまでの経緯と、サブタイトルの由来. これから、lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数に依って定義される有理関数（達）についてのお話をします。以後は、たんに有理関数と呼ぶことにします。まずは、これらの有理関数の具体例を紹介します。

例 1.13 (see [55, 56, 58]). $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数全体を $\mathbb{P}$ と表記します。lemniscate sine を $\mathrm{sl}(u)$、lemniscate cosine を $\mathrm{cl}(u)$ と表記します。以下の具体例の右辺では、$x := \mathrm{sl}(u)$ と置いています。$m = 3-2i \in \mathbb{P}$ に対して

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} = \frac{(3-2i)+(7+4i)x^4+(-11-10i)x^8+x^{12}}{1+(-11-10i)x^4+(7+4i)x^8+(3-2i)x^{12}},$$

$$\frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)} = \frac{1-(2-6i)x^2+(3+8i)x^4+(12-4i)x^6+(3+8i)x^8-(2-6i)x^{10}+x^{12}}{1+(2-6i)x^2+(3+8i)x^4-(12-4i)x^6+(3+8i)x^8+(2-6i)x^{10}+x^{12}}.$$

これらの有理関数の特徴なのですが、非常に顕著な対称性が見て取れます。具体例から有理関数の零点と極の対称性が、その係数から見て取れて、さらに有理関数を構成する多項式に相反多項式が表れていたりします。筆者は、有理関数 $\mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ を当時の指導教官に紹介され、改めて、有理関数 $\mathrm{cl}(mu)/\mathrm{cl}(u)$ と合わせて考察することにより、これまでに

- 有理関数どうしの帰納的な関係式、漸化式を与えた。(修士論文の内容で、第１７回の数学史シンポジウムにて報告した。[58])
- 具体例から見て取れた零点と極の対称性が本質的に有理関数どうしの関数等式である、ということを明らかにした。[57, 55, 56]

という事をしてきました。修士、博士と、研究を続けていき、まとめて、博士論文 [56] を提出したのですが、これらの有理関数に対する２つのしこり

(あ) Eisenstein の合同関係式のメカニズムが理解できなかった。 [2]
(い) 有理関数に現れた対称性を完全に捉えたのか？ [57, p60 問題 3.7]

が残りました。博士取得後もしばらく、これらの有理関数の研究を続けていて 2009 頃までにある程度の進展が得られました [59]。これら、(あ) (い) のお話をする予定です。どちらかというと、(あ) をメインにお話をすることになると思います。(い) に関しては、2009、秋の数学会、関数論分科会にて、報告をしました。

さて、講演タイトルの副題

「Gauss, Abel, Eisenstein, を繋ぐ虹の架け橋」

ですが、これは、これからメインにお話をする (あ) Eisenstein の合同関係式のメカニズムの内容に由来しています。筆者にとっては、本当に長きにわたり、この Eisenstein の合同関係式のメカニズムが理解できませんでした。Eisenstein の合同関係式というのは、有理関数 $\mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ の中にある特質で primary 数の m がさらに *primary prime* のときに成り立つ特質で、有理関数を構成する多項式の係数が、この *primary prime* 数 m で割り切れてしまうという性質です。先に紹介をした例で説明をすると、実は $m = 3-2i$ は *primary prime* 数なので、有理関数 $\mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ の係数で見てみると

$$\frac{7+4i}{3-2i} = 1+2i, \qquad \frac{-11-10i}{3-2i} = -1-4i$$

と確かに割り切れます。Eisenstein は4次剰余相互法則を $\mathrm{sl}(u)$ を用いて証明を与えているのですが [1, 2]、その証明の中で $\mathrm{sl}^4(u)$ の有理関数 $\mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ が現れて、さらに今述べた合同関係式を [2] で証明をしています。筆者はこの Eisenstein の証明のある部分が納得行かず … 個人的に、なんとか、Eisenstein の合同関係式のメカニズムの理解が得られないか、と四苦八苦していたのですが、実は **Gauss 流の構成の lemniscate 関数達だけでなく、Abel 流の構成の lemniscate 関数達を交えて様々な有理関数を調べているうちに Eisenstein の合同関係式のメカニズムの理解が得られました。** この講演では、有理関数たちの様々な性質を紹介し、それらの性質を用いて（あ）Eisenstein の合同関係式のメカニズムについてお話をする次第です。講演タイトルの副題は以上のような経緯に由来します。

独り言 1.14. 今回のような、まとまった（筆者の個人的な感覚に殉じ、発表や論文投稿にまで出来るレベルに達した…）ものが出来たのは、上記なようなアプローチにより出来ました。ある方より本質的な助言

> 『lemniscate 関数の事を論じるならば、同じ事を考えるのでも、Gauss の立場で考えるより、Abel の立場で考えると巧く行くのじゃないのかな？』

と言われ (2005～2006 頃？)、色々いじくって、いや、この際２人（Gauss と Abel）でやってしまえ…とブツブツ独り言を言いながら計算していたら本当に巧く行きました。実際に計算をしていたのは 2008 の 10 月～です。助言を下さった方に、改めてお礼を申し上げます。助言を下さった方は、このシンポジウムの常連で今回も講演をなさっている今野秀二氏です。

1.6. Eisenstein の合同関係式のメカニズムを獲るまでのプロセス. では、具体的にどのような有理関数達の性質を明らかにするのかというと、以下の４つの (lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$) の有理関数の性質を明らかにして行きます。

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)}, \qquad \frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}, \qquad \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

> lemniscate 関数 $\mathrm{fl}(u)$ と $\mathrm{Fl}(u)$ は $\mathrm{sl}(u)$ を用いて以下のように定義します。この構成法は Abel [17] に依ります。

$$\mathrm{fl}(u) := \sqrt{1-\mathrm{sl}^2(u)}, \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Fl}(u) := \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(u)}.$$

これまでに、上記４つの有理関数の性質を明らかにしてきたのですが、結果の記述を見やすく与えるのにかなり苦労しています。理解のしやすさ、見通しの良さ、等を念頭に考えていたのですが、説明が冗長に成っているなと正直感じている次第です。この辺りの裏話も出来たらしたいと考えています。Eisenstein の合同関係式のメカニズムを解説を１つの目標としてお話を展開します。解説を与えるために、上記４つの有理関数の幾つかの性質が登場します。そのプロセスは以下のように成ります。

(起) 有理関数の間の帰納的な関係式、漸化式を構成する
(承) 有理関数が、どのような多項式を用いて表示されるかを明らかにする
(転) 有理関数の微分関係式を考察する
(結) Eisenstein の合同関係式のメカニズムを解説する

Eisensteinの合同関係式のメカニズムを解説する中で、その核となるのが上記の(承)の部分になります。先立って、この部分の有理関数の性質を紹介をします。

命題 1.15. [14, p245, Proposition 8.2] $\mathbb{Z}[i]$ 上の *primary* 数全体を $\mathbb{P}$ と表記します。$m = a + ib(a, b \in \mathbb{Z}) \in \mathbb{P}$ に対して、$Nm := a^2 + b^2$ とおく。このとき $\mathbb{Z}[i]$ 係数の多項式 $W_m(X), V_m(X)$ が存在し、それぞれ次数は $(Nm-1)/4$ で、これらの多項式を用いて

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} = \frac{W_m(x^4)}{V_m(x^4)}, \qquad 但し \quad x := \mathrm{sl}(u).$$

と表される。また、多項式 $W_m(X), V_m(X)$ は以下の関係で結ばれている。

$$W_m(x^4) = x^{Nm-1}V_m(x^{-4}), \qquad W_m(X) = X^{\frac{Nm-1}{4}}V_m(X^{-1}).$$

命題 1.16. [55, Proposition 2.2] $\mathbb{Z}[i]$ 上の *primary* 数全体を $\mathbb{P}$ と表記します。$m = a + ib(a, b \in \mathbb{Z}) \in \mathbb{P}$ に対して、$\mathbb{Z}[i]$ 係数の多項式 $K_m(X) \in \mathbb{Z}[i][X]$ が存在し、

$$\frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)} = \frac{K_m(x^2)}{K_m(-x^2)}, \quad 但し \quad x = \mathrm{sl}(u).$$

と表せる。

そして、これら、上記2つの定理と lemniscate 関数の性質を用いて、今回新たに登場する有理関数 $\mathrm{fl}(mu)/\mathrm{fl}(u)$ と $\mathrm{Fl}(mu)/\mathrm{Fl}(u)$ に対しては、以下のようになります。

命題 1.17. [14, p245, Proposition 8.2], [59] $\mathbb{Z}[i]$ 係数の多項式 $W_m(X), V_m(X), K_m(X) \in \mathbb{Z}[i][X]$ を用いて、

$$\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)} = \frac{K_m(x^2)}{V_m(x^4)}, \qquad \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)} = \frac{K_m(-x^2)}{V_m(x^4)}. \qquad 但し \quad x = \mathrm{sl}(u).$$

と表せる。

Gauss流の lemniscate 関数と、Abel流の lemniscate 関数を合わせて、都合4つの有理関数達を考察しました。4つの有理関数が、まるで互いに異なる者達ならば、計8つの、異なる多項式が現れるはずですが、上記のように、**4つの有理関数は $\mathbb{Z}[i]$ 係数の3つの多項式 $W_m(X), V_m(X), K_m(X) \in \mathbb{Z}[i][X]$ を用いて、表すことができる。互いに、似て非なる有理関数になっています。この事が、Eisensteinの合同関係式のメカニズムを獲るのに、大変大きな役割の1つを果たしています。尚、大きな役割はこれ以外にも2つあり、全部で3つあります。** 以上が、筆者が、Eisensteinの合同関係式の証明をする。とは言わず、Eisensteinの合同関係式のメカニズムを解説する。という所以です。先に、Eisensteinの合同関係式の性質の具体的な説明と具体例を紹介しました。Eisensteinの合同関係式の数学としての記述は以下のように成ります。

定理 1.18. (Eisensteinの合同関係式 [2] cf. [8], [9], [14]) $\mathbb{Z}[i]$ 上の *primary* 数全体を $\mathbb{P}$ と表記します。$m = a + ib(a, b \in \mathbb{Z}) \in \mathbb{P}$ に対して、$Nm := a^2 + b^2$ とおく。このとき $\mathbb{Z}[i]$ 係数の多項式 $W_m(X), V_m(X)$ が存在する。この多項式は命題 *1.15* の多項式そのものを意味する。この多項式に対してもし、m が $\mathbb{Z}[i]$ 上の *primary prime* 数だとすると、多項式 $W_m(X), V_m(X)$ が以下の合同関係式を満たす。

$$W_m(X) \equiv X^{\frac{Nm-1}{4}} \pmod{m}, \qquad V_m(X) \equiv 1 \pmod{m}.$$

1.7. この Introduction を書き終えるに当たり. 以下は、浄土真宗のお経（三帰依文）の三帰の１つです。

> 『自ら仏に帰依したてまつる。当に願わくは衆生とともに、大道を体解して無上意を発さん〜浄土真宗（三帰依文）より〜』

この一節に出てくる単語を、今回の、この報告集を書くという行為を数学の研究活動として照らし合わせると、以下のように成ると感じています。

(仏) Gauss, Abel, Eisenstein, Kronecker, Hilbert, …多くの先人の数学者たち
(衆生) 今、現在、活躍している数学者たち（小川もここに含まれます）
(大道) 過去、現在、そして未来へと、積み上げられていく数学という**知の蓄積**

以下は、上記の内容と筆者のここまでの経緯、そして、これまでに発表した筆者の記事、そして、この報告集とその参考文献との関連性について簡単にまとめたものです。筆者が、確かに数学という大道があると、感じたのは（そう認識したのは）、高瀬正仁氏の論説 [26] と出合ったときでした。何度も読み返し、この数学史シンポジウムに来るキッカケと成りました。そして、自身がしている研究は、高瀬正仁氏の論説 [26] に出てくる５つの流れを再現していること、そして、自身がしている研究の目指している処は『Hilbert の第１２問題 (この報告集の P7)』であると、自覚しそれまでに、自身が成し遂げていた研究の全容と目指す処を第１５回数学史シンポジウムにて発表しました [57]。人生をよく、山登りに例える事があります。人生とさらに、数学研究に対する姿勢ついて、山登りに例える大学院時代の先輩（この方が事実上の大学院における私の指導教官でした。）がいました。今より当時を振り返っての筆者なりの認識ですが、研究の目指している処は『Hilbert の第１２問題』を８０００m峰と考えると、 この自身の発表した [57] が最初に設置した３７００m位のベースキャンプなのかなと感じています。また、[57] をさらに、細かく分割し、詳しく書き直してまとめた物が筆者の学位論文 [56] となりました。その後、[57] 以後、毎年のように、こちらの『津田塾大学、数学史シンポジウム』から講演依頼が届き…（それは、それで嬉しいけれど…発表するだけの、記事（論文）にするだけの物がポコポコ造れるわけないだろう！）筆者の個人的な基準で、ギリギリ発表と記事に出来るかな？と感じて、修士論文の内容を第１７回の数学史シンポジウムで発表しました [58]。ただ、発表すれば、質問がでたり、教えてもらったり、改めて気付いたり等々、良い副作用もあったりします。そのような流れの中で、第１７回の数学史シンポジウムで発表した後の報告集 [58] では $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数についてと虚数乗法論についてのノートを追記しました。また、今回のこの報告集に出てくる有理関数の具体例は既に、この記事に多めに載せてあります。興味を持たれた方は、[58] を是非お読みください。今、思うと、この [58] を書くという事は標高２７００m位から、３０００m位に一度下った事に成るのかなと感じています。その後も、研究は続けていたので、現在は標高４３００m位から５０００m位?! を行ったり来たりしている、というふうに感じています。研究内容とその記事を山登りに例えて話を進めていますが、その登山道としての道標（山登りが趣味な人ならば、実際の登山道において岩場ならば岩に○とか×とか、ペンキで書かれてあったり、あるいは、深い森の中を歩いて行くような場所は、踏み跡や、あるいは木に赤や黄色のテープ等が巻きつけて在ったりする。これに相当するものと観て…）が、Eisenstein がした相互法則の証明 [1, 2] であったり、虚数乗法論（現代的な立場による文献は [30, 第６章], [31, 第１３章]。歴史的な立場では、[24], [25], さらに [37, 第１章]。

その後の発展は [35, 36, 37]。) であると筆者は観ています。そして、８０００m峰の『Hilbert の第１２問題』(本稿でまとめるのに [31, 第１３章], [34, p104–p110] 歴史的には [26], [28] を参考。) へのアタックのためのベースキャンプを今度は標高４３００m位に設置する。ここに、提出される報告論文は以上のような位置づけのものです。そのために、筆者の『Hilbert の第１２問題』へのアプローチの仕方や、この報告集の内容との関連を説明するために、実際に『Hilbert の第１２問題』を筆者の立場で書き換えたりしました（この報告論文の p8)。既にこの報告論文の p11 の quotation において具体的に何が成されるかを書きましたが、これに関連文献を付け加える形でさらに補足すると [14, 第８章] を基に、[14, Proposition 8.2] を筆者がこれまでに述べてきた研究スタイルに殉じて、内容を深く掘り下げたものがこの報告論文になります。

今度は、この報告論文で展開される数学の技術てきな側面と、筆者がこれまでにしてきた事に関連する文献について整理したいと思います。まずは、lemniscate 関数ですが、Gauss 流 [22] と Abel 流 [17, 21] の両方を駆使します。そして、Abel が [17, 21] の中で見せた技術を、先に述べた４つの有理関数に対して適用します。この報告論文のそもそもの出発点は、筆者の [56, 57] です。そして、[56, 57] の中にも在りますが筆者が有理関数に対して構成した関数等式、また、この関数等式を得る手法も改めて駆使します [55]。改めて『lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数に依って定義される有理関数について』のお話をして行くのですが、この primary 数が実に見事で、これにより、有理関数どうしの帰納的な関係式、つまり漸化式の構成に成功しました [58]。この漸化式の構成の手法 [58] も改めて駆使します。その結果以下のような学問的な前進、繰り返し述べることに成りましが、

(あ) lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary prime 数に依って定義される有理関数の多項式に成立する合同関係式についての別証明が与える事が出来た。(元々は Eisenstein が [2] で与えた)

(い) 三角関数によって定義される、多項式や有理関数に成立する関数等式達とその関数等式を与える変換についてと、lemniscate 関数によって定義される、有理関数に成立する関数等式達とその関数等式を与える変換について、双方を比較したときに、其処に類似性（似て非なる性質）を認める事が出来た。[57, p60 問題 3.7] に対する前進が出来た。

これらの数学的前進が得られ [59] の中で書きました。[59] は投稿論文で複数の専門家の手に渡ったと思われます。また、恩義のある一人の専門家から「…慎重に扱うので頂けないか?」と言われたのを受けて、[59] をその一人の専門家に差し上げました。これらは、2009 年頃の話です。そして、幸運にも発表と記事を書くだけの時空が出来たのもあり、こちらで、発表するに至りました。今回、2013–2014 今まさに、報告論文を書いていますが、数学に対する高い山の標高的な感覚で言うと、かつて、設置したベースキャンプ [57] から２つのアタックラインが感知できました。その後、派生すると考えられたお話は２つありました。そのうちの一つの派生しまとまった話が [59] で、もう一つの派生しまとまった話が [60] となりました。([59] は、Abel のパリの論文 [61] みたいなものです。また、[60] は、今のところ直接的な関連は、この報告論文とはありません。) 今回、[59] の学問的な前進（上記の（あ）と（い）のこと）を受けて、一度、これまでを振り返り、新たにベースキャンプを設置すべきと判断し、その位置付けで、今、現在、この報告論文を仕上げています。以上、筆者の研究に興味と関心を持ち、この報告論文を読まれている方々に、関連する文献は何か？著者が何をしてきたか？著者の発表論文は？等々が伝われば幸いです。

2. PRELIMINARIES (準備)

2.1. Lemniscate functions (see [17], [14], [22], [61]). lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$ は、以下にある第一種楕円積分の逆関数を複素数平面における有理型関数として捉えなおしたものとして定義されます。また、lemniscate という特殊な曲線の弧長を考えることによって以下の積分が現れます。

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad \Big(\Longleftrightarrow x := \mathrm{sl}(u)\Big).$$

そして、定数 ω を上記の第一種楕円積分の形を受けて、その第一種完全楕円積分として以下のように定義します。

$$\frac{\omega}{2} := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

この定義した定数 ω を用いて、また、lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$ を用いて lemniscate cosine $\mathrm{cl}(u)$ を以下のように定義します。

$$\mathrm{cl}(u) := \mathrm{sl}\Big(\frac{\omega}{2} - u\Big).$$

今、ここで定義した $\mathrm{sl}(u)$ と $\mathrm{cl}(u)$ は、それぞれ、lemniscate sine, lemniscate cosine と呼ばれる楕円関数です。これら、lemniscate 関数 $\mathrm{sl}(u)$ と $\mathrm{cl}(u)$ の基本周期は 2ω と $2\omega i$ に成ります。また、$\mathrm{sl}(u)$ と $\mathrm{cl}(u)$ は、以下のような加法定理を保持します:

$$\mathrm{sl}(u+v) = \frac{\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{cl}(v) + \mathrm{cl}(u)\,\mathrm{sl}(v)}{1 - \mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}(v)\,\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(v)}, \qquad \mathrm{cl}(u+v) = \frac{\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(v) - \mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}(v)}{1 + \mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}(v)\,\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(v)}.$$

また、 $\mathrm{sl}(u)$ と $\mathrm{cl}(u)$ は以下のような関係式たちを保持します:

$$\mathrm{cl}^2(u) = \frac{1-\mathrm{sl}^2(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)}, \qquad \mathrm{sl}(iu) = i\,\mathrm{sl}(u), \qquad \mathrm{cl}(iu) = \frac{1}{\mathrm{cl}(u)}.$$

以上は、Gauss 流の構成法に依る lemniscate 関数です [22, 61]。この報告論文では、ここに Abel 流の構成法に依る lemniscate 関数 [14, 17, 21] を加えてお話を展開していきます。新たに関数 $\mathrm{fl}(u)$ と $\mathrm{Fl}(u)$ を $\mathrm{sl}(u)$ 用いて以下のように定義します:

$$\mathrm{fl}(u) := \sqrt{1-\mathrm{sl}^2(u)}; \qquad \mathrm{Fl}(u) := \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(u)}.$$

この Abel 流の構成による 3 つの lemniscate 関数 $\mathrm{sl}(u), \mathrm{fl}(u), \mathrm{Fl}(u)$ の加法定理は以下のようになります:

$$\mathrm{sl}(u+v) = \frac{\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{fl}(v)\,\mathrm{Fl}(v) + \mathrm{sl}(v)\,\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)\,\mathrm{sl}^2(v)};$$

$$\mathrm{fl}(u+v) = \frac{\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{fl}(v) - \mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}(v)\,\mathrm{Fl}(u)\,\mathrm{Fl}(v)}{1+\mathrm{sl}^2(u)\,\mathrm{sl}^2(v)};$$

$$\mathrm{Fl}(u+v) = \frac{\mathrm{Fl}(u)\,\mathrm{Fl}(v) + \mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}(v)\,\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{fl}(v)}{1+\mathrm{sl}^2(u)\,\mathrm{sl}^2(v)}.$$

この 3 つの lemniscate 関数 $\mathrm{sl}(u), \mathrm{fl}(u), \mathrm{Fl}(u)$ は以下の微分関係式を保持します:

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sl}(u) = \mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u), \qquad \frac{d}{du}\,\mathrm{fl}(u) = -\,\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{Fl}(u), \qquad \frac{d}{du}\,\mathrm{Fl}(u) = \mathrm{sl}(u)\,\mathrm{fl}(u).$$

直ちに、Abel 流の構成法による $\mathrm{fl}(u)$ と $\mathrm{Fl}(u)$ の定義や、直前に述べた、Gauss 流の構成法による $\mathrm{sl}(u)$ と $\mathrm{cl}(u)$ の関係式などから、互いに以下の関係式で結ばれているのが解ります:

$$\mathrm{fl}^2(u) = 1 - \mathrm{sl}^2(u); \qquad \mathrm{Fl}^2(u) = 1 + \mathrm{sl}^2(u); \qquad \mathrm{cl}(u) = \frac{\mathrm{fl}(u)}{\mathrm{Fl}(u)};$$
$$\mathrm{fl}(iu) = \mathrm{Fl}(u); \qquad \mathrm{Fl}(iu) = \mathrm{fl}(u).$$

この研究では以上述べてきた加法定理、微分関係式、相互関係式、といった、様々な関係式がとても重要な役割を果たします。

2.2. Primary numbers of $\mathbb{Z}[i]$ (see [13, 15, 58]). $\mathbb{Z}[i]$ 上の $\alpha = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ に対して、この α が primary 数であるとは、α が合同関係式 $\alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}$ を満たすとして定義します。(単数はこの定義から除外します。) 今度は、$\alpha = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ が primary 数であると、仮定して考えると、α の実部 a と虚部 b に対して以下の合同関係式が得られます。

補題 2.1. $\alpha = a + ib \in \mathbb{Z}[i] \backslash \{1\} (a, b \in \mathbb{Z})$ が *primary* 数であるとは、α の実部 a と虚部 b が

$$a \equiv 1, b \equiv 0 \pmod 4, \qquad \textit{or} \qquad a \equiv 3, b \equiv 2 \pmod 4.$$

を満たす事と同値である。

この報告論文では $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数全体を $\mathbb{P}$ と表記します。また、そもそもの primary 数の定義には単数は含まれていませんが、この報告論文では単数の 1 を含むものとして考えます。実は、上記補題 2.1 から、α の実部 a と虚部 b を複素数平面に取ると、そこにラティス構造がある事が解ります。また、単数の 1 がこのラティス上にあると見なす事が出来ます。詳しくは、漸化式を構成するときに述べます。(既に、primary 数についての話や、漸化式の構成は [58] にあります。これらの技術を改めて用いるにあたり再び記述しました。)

2.3. 関数等式達を得るための準備. 後に $m \in \mathbb{P}$ に対して、subsection 1.6 で述べた 4 つの有理関数 $\mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$, $\mathrm{cl}(mu)/\mathrm{cl}(u)$, $\mathrm{fl}(mu)/\mathrm{fl}(u)$, $\mathrm{Fl}(mu)/\mathrm{Fl}(u)$ を $\mathbb{Q}(i)$ 上の $\mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数と見なして、その関数等式達を与えます。関数等式達を与えるために以下の関係式を用います。

補題 2.2. $p \in \mathbb{P}$ に対して *lemniscate* 関数 $\mathrm{sl}(u)$ と $\mathrm{cl}(u)$ は以下にあるような関係式を満たす:

$$\frac{\mathrm{sl}(pu)}{\mathrm{sl}(u)} = \frac{\mathrm{cl}\left(p\left(\frac{\omega}{2} - u\right)\right)}{\mathrm{cl}\left(\frac{\omega}{2} - u\right)}, \qquad \frac{\mathrm{cl}(pu)}{\mathrm{cl}(u)} = \frac{\mathrm{sl}\left(p\left(\frac{\omega}{2} - u\right)\right)}{\mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2} - u\right)},$$
$$\mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2} - iu\right) = \frac{1}{\mathrm{cl}(u)}, \qquad \mathrm{sl}^2\left(\frac{\omega}{2} - iu\right) = \frac{1}{\mathrm{cl}^2(u)},$$
$$\mathrm{sl}\left(p\left(\frac{\omega}{2} - iu\right)\right) = \frac{1}{\mathrm{cl}(pu)}, \qquad \mathrm{sl}^2\left(p\left(\frac{\omega}{2} - iu\right)\right) = \frac{1}{\mathrm{cl}^2(pu)}.$$

Proof. これらの関係式は、lemniscate 関数の周期性や加法定理そして補題 2.1 を駆使して計算により直ちに得られます。 □

3. 有理関数の存在、様々な漸化式たちと最初の有理関数たち

Subsection1.6 にもありますが、$m \in \mathbb{P}$ に対して以下の4つの $\mathrm{sl}(u)$ の有理関数を考察していきます。$R_{s,m}(\mathrm{sl}(u)) = \mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$, $R_{c,m}(\mathrm{sl}(u)) = \mathrm{cl}(mu)/\mathrm{cl}(u)$, $R_{f,m}(\mathrm{sl}(u)) = \mathrm{fl}(mu)/\mathrm{fl}(u)$, そして $R_{F,m}(\mathrm{sl}(u)) = \mathrm{Fl}(mu)/\mathrm{Fl}(u)$. が、本当に $\mathrm{sl}(u)$ の有理関数なのか？つまり、$R_{s,m}(x)$, $R_{c,m}(x)$, $R_{f,m}(x)$, そして $R_{F,m}(x)$ が具体的に見て取れるのか？これらを一気に主張するために、ここで、これら、**$m \in \mathbb{P}$ に対して決定する4種類の lemniscate 関数の漸化式を構成し、その初期値を明確に提示し、そこに帰納法を適応します**。これが、出来る事によって4つの有理関数の存在のみならず、その具体例まで抽出が可能と成ります。この章では以上の事を展開し、①漸化式の構成、②初期値 (有理関数) の提示、③有理関数の存在の主張、という流れでお話をします。

3.1. 漸化式たちと、その定式化. これから、漸化式たちを定式化していくのだけれど、そのプロセスは $P_{m,n}, F_{m,n}, G_{m,n}, H_{m,n}$, そして $I_{m,n}$ の定義から始まります。著者がこれから見せるのは、$P_{m,n}, F_{m,n}, G_{m,n}, H_{m,n}$, $I_{m,n}$ のそれぞれの漸化式とそれぞれの初期値になります。

$P_{m,n}, F_{m,n}, G_{m,n}, H_{m,n}, I_{m,n}$ の定式化. 我々は、既に primary 数全体をこの報告論文では $\mathbb{P}$ と表示しています。そして、この primary 数が補題 2.1 から、条件を満たす a, b を複素数平面に取る事によって、ラティスが認識でき任意の primary 数が以下のような形で表記される事が解ります。(Figure 1 参照):

$\forall p \in \mathbb{P}; \alpha := -2+2i, \beta := -2-2i$ とします。すると p が

$$p = m\alpha + n\beta + 1, \qquad (\exists m, n \in \mathbb{Z}).$$

という形で書ける事が解ります。この事実を受けて、上記の p を $p = P_{m,n}$ とみなす事により $P_{m,n}$ を以下のように定義します。

定義 3.1. $p \in \mathbb{P}$ に対して, $P_{m,n}$ を以下のように定義する:

$$p = P_{m,n} := m\alpha + n\beta + 1, \quad (\exists m, n \in \mathbb{Z}),$$
$$\text{ここでは} \quad \alpha := -2+2i, \quad \beta := -2-2i.$$

定義 3.2. $F_{m,n}, G_{m,n}, H_{m,n}$, $I_{m,n}$ を $P_{m,n}$ を用いて以下のように定義する:

$$F_{m,n} = F_{m,n}(u) := \frac{\mathrm{sl}(P_{m,n}u)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad G_{m,n} = G_{m,n}(u) := \frac{\mathrm{cl}(P_{m,n}u)}{\mathrm{cl}(u)},$$
$$H_{m,n} = H_{m,n}(u) := \frac{\mathrm{fl}(P_{m,n}u)}{\mathrm{fl}(u)}, \qquad I_{m,n} = I_{m,n}(u) := \frac{\mathrm{Fl}(P_{m,n}u)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

定義 3.1 から、primary 数が $P_{m,n}$ を用いて具体的に以下のように表示ができます。

$$\cdots, \ P_{0,0} = 1, \ P_{1,0} = -1+2i, \ P_{0,1} = -1-2i, \ P_{1,1} = -3, \ \cdots.$$

以上は $P_{m,n}$ の初期値に相当するものです。後に、系 3.7 において $F_{m,n}$, $G_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$ の初期値に相当するものを明示します。

Gauss流の立場から。$F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の漸化式. これより、まず $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の漸化式を求めていきます。実際には、以下のようにして求まります。まず始めに、$P_{m,n}$ の性質みたいなものを考えていきます。定義3.1に従って $P_{m,n}$ を計算してみます。すると…

$$P_{m+1,n}=(m+1)\alpha+n\beta+1=m\alpha+n\beta+1+\alpha=P_{m,n}+\alpha,$$

$$P_{m-1,n}=(m-1)\alpha+n\beta+1=m\alpha+n\beta+1-\alpha=P_{m,n}-\alpha.$$

という2つの計算結果から巧い具合に α が消去できて、n が固定された状態の $P_{m,n}$ のみの式が得られます。

$$P_{m+1,n}+P_{m-1,n}=2P_{m,n}. \tag{3.1}$$

同様の手法により、m が固定された状態の $P_{m,n}$ のみの式が得られます。

$$P_{m,n+1}+P_{m,n-1}=2P_{m,n}. \tag{3.2}$$

以上得られた2つの $P_{m,n}$ のみの式 (3.1) と (3.2) を以下のように書き換えます。

- **case (1)**　$P_{m+1,n}=2P_{m,n}-P_{m-1,n}$,
- **case (2)**　$P_{m-1,n}=2P_{m,n}-P_{m+1,n}$,
- **case (3)**　$P_{m,n+1}=2P_{m,n}-P_{m,n-1}$,
- **case (4)**　$P_{m,n-1}=2P_{m,n}-P_{m,n+1}$.

これが $P_{m,n}$ の漸化式です。(Figure 2参照)。上記のように4つの場合が考えられますが、何れも $a=2b-c$ $(a,b,c\in\mathbb{P})$ といった、同じ形をしています。

そこで、次に $a=2b-c$ という関係式のもと $\mathrm{sl}(au)$ と $\mathrm{cl}(au)$ を、その加法定理を用いて計算をします。以下は、その計算結果です。(ここでは、変数の u を省略しました。)

$$\mathrm{sl}(2b)=\mathrm{cl}(b)\,\mathrm{sl}(b)\frac{2(1+\mathrm{sl}(b)^2)}{1+\mathrm{sl}(b)^4},$$

$$\mathrm{cl}(2b)=\frac{1-2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4}{1+2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4}.$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sl}(a)=\mathrm{sl}(2b-c)\\
&=\frac{\mathrm{sl}(2b)\,\mathrm{cl}(c)-\mathrm{cl}(2b)\,\mathrm{sl}(c)}{1+\mathrm{sl}(2b)\,\mathrm{cl}(2b)\,\mathrm{sl}(c)\,\mathrm{cl}(c)}\\
&=\frac{\mathrm{cl}(b)\,\mathrm{sl}(b)\dfrac{2(1+\mathrm{sl}(b)^2)}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{cl}(c)-\dfrac{1-2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4}{1+2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{sl}(c)}{1+\mathrm{cl}(b)\,\mathrm{sl}(b)\dfrac{2(1+\mathrm{sl}(b)^2)}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{sl}(c)\dfrac{1-2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4}{1+2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{cl}(c)}\\
&\quad=\frac{2\,\mathrm{cl}(b)\,\mathrm{cl}(c)\,\mathrm{sl}(b)(1+\mathrm{sl}(b)^2)(1+2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4)-\mathrm{sl}(c)(1+\mathrm{sl}(b)^4)(1-2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4)}{(1+\mathrm{sl}(b)^4)(1+2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4)+2\,\mathrm{cl}(b)\,\mathrm{cl}(c)\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{sl}(c)(1+\mathrm{sl}(b)^2)(1-2\,\mathrm{sl}(b)^2-\mathrm{sl}(b)^4)}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(2b - c) \\
&= \frac{\mathrm{cl}(2b)\,\mathrm{cl}(c) + \mathrm{sl}(2b)\,\mathrm{sl}(c)}{1 - \mathrm{sl}(2b)\,\mathrm{cl}(2b)\,\mathrm{sl}(c)\,\mathrm{cl}(c)} \\
&= \frac{\dfrac{1 - 2\,\mathrm{sl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^4}{1 + 2\,\mathrm{sl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{cl}(c) + \mathrm{cl}(b)\,\mathrm{sl}(b)\dfrac{2(1 + \mathrm{sl}(b)^2)}{1 + \mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{sl}(c)}{1 - \mathrm{cl}(b)\,\mathrm{sl}(b)\dfrac{2(1 + \mathrm{sl}(b)^2)}{1 + \mathrm{sl}(b)^4}\dfrac{1 - 2\,\mathrm{sl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^4}{1 + 2\,\mathrm{sl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{sl}(c)\,\mathrm{cl}(c)} \\
&= \frac{\mathrm{cl}(c)(1 + \mathrm{sl}(b)^4)(1 - 2\,\mathrm{sl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^4) + 2\,\mathrm{cl}(b)\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{sl}(c)(1 + \mathrm{sl}(b)^2)(1 + 2\,\mathrm{sl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^4)}{(1 + \mathrm{sl}(b)^4)(1 + 2\,\mathrm{sl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^4) - 2\,\mathrm{cl}(b)\,\mathrm{cl}(c)\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{sl}(c)(1 + \mathrm{sl}(b)^2)(1 - 2\,\mathrm{sl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^4)}.
\end{aligned}
$$

以上の加法定理による $\mathrm{sl}(a)$ と $\mathrm{cl}(a)$ の計算結果、及び $P_{m,n}$ の漸化式、そして $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の定義から、以下のような $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の漸化式が得られます。

定理 3.3. *lemniscate* 関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ は以下のような漸化式を満たす。ここでは、*case (1)* の $P_{m,n}$ に関連するものだけ記述する。また、以下の漸化式においては $s := \mathrm{sl}(u)$ とおく:

$$
F_{m+1,n} = \frac{\begin{array}{l} 2(1 - s^2)G_{m,n}G_{m-1,n}F_{m,n}(1 + s^2F_{m,n}^2)(1 + 2s^2F_{m,n}^2 - s^4F_{m,n}^4) \\ -F_{m-1,n}(1 + s^2)(1 + s^4F_{m,n}^4)(1 - 2s^2F_{m,n}^2 - s^4F_{m,n}^4) \end{array}}{\begin{array}{l} (1 + s^2)(1 + s^4F_{m,n}^4)(1 + 2s^2F_{m,n}^2 - s^4F_{m,n}^4) \\ +2s^2(1 - s^2)G_{m,n}G_{m-1,n}F_{m,n}F_{m-1,n}(1 + s^2F_{m,n}^2)(1 - 2s^2F_{m,n}^2 - s^4F_{m,n}^4) \end{array}};
$$

$$
G_{m+1,n} = \frac{\begin{array}{l} (1 + s^2)G_{m-1,n}(1 + s^4F_{m,n}^4)(1 - 2s^2F_{m,n}^2 - s^4F_{m,n}^4) \\ +2s^2(1 + s^2)G_{m,n}F_{m,n}F_{m-1,n}(1 + s^2F_{m,n}^2)(1 + 2s^2F_{m,n}^2 - s^4F_{m,n}^4) \end{array}}{\begin{array}{l} (1 + s^2)(1 + s^4F_{m,n}^4)(1 + 2s^2F_{m,n}^2 - s^4F_{m,n}^4) \\ -2s^2(1 - s^2)F_{m,n}F_{m-1,n}G_{m,n}G_{m-1,n}(1 + s^2F_{m,n}^2)(1 - 2s^2F_{m,n}^2 - s^4F_{m,n}^4) \end{array}}.
$$

補足 3.4. 出来上がった物を見ているので、『なんだ、簡単じゃん！』と感じている人が殆んどだと思われます。ここでは、先に本文中でも**さらっと**と書きましたが、何故、漸化式が構成できたのかを確認しておきたいと思います。

- *lemniscate* 関数が加法定理を持つこと
- $P_{m,n}$ の漸化式が作れたこと
- $F_{m,n}$ や $G_{m,n}$ といったものが定義できたこと

以上の３つになります。この章の終わりに改めて補足します。

Abel 流の立場から、$F_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$ の漸化式. 今度は、Abel の構成法による lemniscate 関数に対して、具体的には $F_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$ の 3 つに対して漸化式を同様に求めようと思います。適応させる関数が違うだけで本質的な手法は Gauss 流の場合と全く同じです。Gauss 流の場合に出てきた $P_{m,n}$ の漸化式を使います。また、$a = 2b - c$ の関係式のもと Abel の構成法による 3 つの lemniscate 関数 $\mathrm{sl}(au), \mathrm{fl}(au), \mathrm{Fl}(au)$ を、その加法定理のもとで計算をします。以下は、その計算結果です。ここでは変数の u を省略しています。

$$\mathrm{sl}(2b) = \frac{2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)}{1+\mathrm{sl}(b)^4}, \qquad \mathrm{fl}(2b) = \frac{\mathrm{fl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{Fl}(b)^2}{1+\mathrm{sl}(b)^4},$$
$$\mathrm{Fl}(2b) = \frac{\mathrm{Fl}(b)^2 + \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{fl}(b)^2}{1+\mathrm{sl}(b)^4}.$$

以下は $\mathrm{sl}(au), \mathrm{fl}(au)$, $\mathrm{Fl}(au)$ の計算結果です。

$$\begin{aligned}
\mathrm{sl}(a) &= \mathrm{sl}(2b-c)\\
&= \frac{\mathrm{sl}(2b)\,\mathrm{fl}(c)\,\mathrm{Fl}(c) - \mathrm{sl}(c)\,\mathrm{fl}(2b)\,\mathrm{Fl}(2b)}{1+\mathrm{sl}(2b)^2\,\mathrm{sl}(c)^2}\\
&= \frac{\dfrac{2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{fl}(c)\,\mathrm{Fl}(c) - \mathrm{sl}(c)\dfrac{\mathrm{fl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{Fl}(b)^2}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\dfrac{\mathrm{Fl}(b)^2 + \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{fl}(b)^2}{1+\mathrm{sl}(b)^4}}{1+\left(\dfrac{2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\right)^2\mathrm{sl}(c)^2}\\
&= \frac{2(1+\mathrm{sl}(b)^4)\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)\,\mathrm{fl}(c)\,\mathrm{Fl}(c) - \mathrm{sl}(c)(\mathrm{fl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{Fl}(b)^2)(\mathrm{Fl}(b)^2 + \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{fl}(b)^2)}{(1+\mathrm{sl}(b)^4)^2 + (2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b))^2\,\mathrm{sl}(c)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}(a) &= \mathrm{fl}(2b-c)\\
&= \frac{\mathrm{fl}(2b)\,\mathrm{fl}(c) + \mathrm{sl}(2b)\,\mathrm{sl}(c)\,\mathrm{Fl}(2b)\,\mathrm{Fl}(c)}{1+\mathrm{sl}(2b)^2\,\mathrm{sl}(c)^2}\\
&= \frac{\dfrac{\mathrm{fl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{Fl}(b)^2}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{fl}(c) + \dfrac{2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{sl}(c)\dfrac{\mathrm{Fl}(b)^2 + \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{fl}(b)^2}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{Fl}(c)}{1+\left(\dfrac{2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\right)^2\mathrm{sl}(c)^2}\\
&= \frac{(1+\mathrm{sl}(b)^4)(\mathrm{fl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{Fl}(b)^2)\,\mathrm{fl}(c) + 2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)\,\mathrm{sl}(c)(\mathrm{Fl}(b)^2 + \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{fl}(b)^2)\,\mathrm{Fl}(c)}{(1+\mathrm{sl}(b)^4)^2 + (2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b))^2\,\mathrm{sl}(c)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fl}(a) &= \mathrm{Fl}(2b-c)\\
&= \frac{\mathrm{Fl}(2b)\,\mathrm{Fl}(c) - \mathrm{sl}(2b)\,\mathrm{sl}(c)\,\mathrm{fl}(2b)\,\mathrm{fl}(c)}{1+\mathrm{sl}(2b)^2\,\mathrm{sl}(c)^2}\\
&= \frac{\dfrac{\mathrm{Fl}(b)^2 + \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{fl}(b)^2}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{Fl}(c) - \dfrac{2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{sl}(c)\dfrac{\mathrm{fl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{Fl}(b)^2}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\,\mathrm{fl}(c)}{1+\left(\dfrac{2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)}{1+\mathrm{sl}(b)^4}\right)^2\mathrm{sl}(c)^2}\\
&= \frac{(1+\mathrm{sl}(b)^4)(\mathrm{Fl}(b)^2 + \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{fl}(b)^2)\,\mathrm{Fl}(c) - 2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b)\,\mathrm{sl}(c)(\mathrm{fl}(b)^2 - \mathrm{sl}(b)^2\,\mathrm{Fl}(b)^2)\,\mathrm{fl}(c)}{(1+\mathrm{sl}(b)^4)^2 + (2\,\mathrm{sl}(b)\,\mathrm{fl}(b)\,\mathrm{Fl}(b))^2\,\mathrm{sl}(c)^2}.
\end{aligned}$$

以上の計算結果、Gauss 流の場合に出てきた $P_{m,n}$ の漸化式、そして、定義 3.2 を用いる事により $F_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$ の漸化式が得られます。

定理 3.5. *3 つの lemniscate 関数 $F_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$ は以下の漸化式を満たす。case (1) の $P_{m,n}$ に関する漸化式のみ記述する。ここでは、$s := \mathrm{sl}(u)$ とおく:*

$$F_{m+1,n} = \frac{\begin{array}{l} 2(1-s^4)(1+s^4F_{m,n}^4)F_{m,n}H_{m,n}H_{m-1,n}I_{m,n}I_{m-1,n} \\ -F_{m-1,n}((1-s^2)H_{m,n}^2 - s^2(1+s^2)F_{m,n}^2I_{m,n}^2)((1+s^2)I_{m,n}^2 + s^2(1-s^2)F_{m,n}^2H_{m,n}^2) \end{array}}{(1+s^4F_{m,n}^4)^2 + 4s^4(1-s^4)F_{m,n}^2F_{m-1,n}^2H_{m,n}^2I_{m,n}^2};$$

$$H_{m+1,n} = \frac{\begin{array}{l} (1+s^4F_{m,n}^4)((1-s^2)H_{m,n}^2 - s^2(1+s^2)F_{m,n}^2I_{m,n}^2)H_{m-1,n} \\ +2s^2(1+s^2)F_{m,n}F_{m-1,n}H_{m,n}I_{m,n}I_{m-1,n}((1+s^2)I_{m,n}^2 + s^2(1-s^2)F_{m,n}^2H_{m,n}^2) \end{array}}{(1+s^4F_{m,n}^4)^2 + 4s^4(1-s^4)F_{m,n}^2F_{m-1,n}^2H_{m,n}^2I_{m,n}^2};$$

$$I_{m+1,n} = \frac{\begin{array}{l} (1+s^4F_{m,n}^4)((1+s^2)I_{m,n}^2 + s^2(1-s^2)F_{m,n}^2H_{m,n}^2)I_{m-1,n} \\ -2s^2(1-s^2)F_{m,n}F_{m-1,n}H_{m,n}H_{m-1,n}I_{m,n}((1-s^2)H_{m,n}^2 - s^2(1+s^2)F_{m,n}^2I_{m,n}^2) \end{array}}{(1+s^4F_{m,n}^4)^2 + 4s^4(1-s^4)F_{m,n}^2F_{m-1,n}^2H_{m,n}^2I_{m,n}^2}.$$

補足 3.6. 『*Gauss* 流の *lemniscate* 関数に対してしたことを、*Abel* 流の *lemniscate* 関数に対して全く同様の事をしただけでしょ?』誰もが思われた通りなのだけれど、ところが上記の漸化式が思わぬ威力を発揮する。上記の $F_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$ の漸化式を見ると、**分母の部分が、3 つの漸化式、共に同じ形になっている。** この事実が、有理関数の形状を考えるときに大きな役割を果たします。

有理関数の存在定理. Gauss 流の立場で求めた漸化式 (定理 3.3)、それから Abel 流の立場で求めた漸化式 (定理 3.5) により漸化式が構成できた事によって、『**有理関数の存在**』を帰納法を用いる事により主張できます。$P_{m,n}$ の漸化式は case(1)〜case(4) まであります。同じように $F_{m,n}$, $G_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$ の 4 つに対しても $P_{m,n}$ の漸化式 case(1)〜case(4) に対応する漸化式がそれぞれ在ることに留意します。もし、$F_{0,0}, F_{1,0}, F_{0,1}, F_{1,1}$, $G_{0,0}, G_{1,0}, G_{0,1}, G_{1,1}$, $H_{0,0}, H_{1,0}, H_{0,1}, H_{1,1}$, $I_{0,0}, I_{1,0}, I_{0,1}, I_{1,1}$, それぞれの計算結果が得られたならば（漸化式が構成できているので）漸化式を用いて帰納法により、上記以外の $F_{m,n}$, $G_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$ が順次得られる事に成ります。(ここまでの部分は Figure 2 を参照) 言い換えると、この報告論文のタイトルにある有理関数が、つまり『lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数に依って定義される有理関数（達）』が漸化式を用いて帰納法により得る事が可能と成りました。この事実を以下に書き留めて置きます。

系 3.7. (最初の有理関数たち、初期値) $m \in \mathbb{P}$ である m に対して、

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)}, \qquad \frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}, \qquad \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}$$

は漸化式 (定理 3.3 と定理 3.5) と以下に明示する $F_{0,0}, F_{1,0}, F_{0,1}, F_{1,1}$, $G_{0,0}, G_{1,0}, G_{0,1}, G_{1,1}$, $H_{0,0}, H_{1,0}, H_{0,1}, H_{1,1}$, $I_{0,0}, I_{1,0}, I_{0,1}, I_{1,1}$, *から帰納法により順次得る事ができる。ここでは* $s := \mathrm{sl}(u)$ *と置く。最初の有理関数達は以下の通り:*

$$F_{0,0} = 1; \qquad F_{1,0} = \frac{(-1+2i)+s^4}{1+(-1+2i)s^4}; \qquad F_{0,1} = \frac{(-1-2i)+s^4}{1+(-1-2i)s^4};$$
$$F_{1,1} = \frac{-3+6s^4+s^8}{1+6s^4-3s^8};$$

そして

$$G_{0,0} = 1; \qquad G_{1,0} = \frac{1+(2+2i)s^2+s^4}{1-(2+2i)s^2+s^4}; \qquad G_{0,1} = \frac{1+(2-2i)s^2+s^4}{1-(2-2i)s^2+s^4};$$
$$G_{1,1} = \frac{1-4s^2-6s^4-4s^6+s^8}{1+4s^2-6s^4+4s^6+s^8};$$

次に

$$H_{0,0} = 1; \qquad H_{1,0} = \frac{1+(2+2i)s^2+s^4}{1+(-1+2i)s^4}; \qquad H_{0,1} = \frac{1+(2-2i)s^2+s^4}{1+(-1-2i)s^4};$$
$$H_{1,1} = \frac{1-4s^2-6s^4-4s^6+s^8}{1+6s^4-3s^8};$$

最後に

$$I_{0,0} = 1; \qquad I_{1,0} = \frac{1-(2+2i)s^2+s^4}{1+(-1+2i)s^4}; \qquad I_{0,1} = \frac{1-(2-2i)s^2+s^4}{1+(-1-2i)s^4};$$
$$I_{1,1} = \frac{1+4s^2-6s^4+4s^6+s^8}{1+6s^4-3s^8}.$$

漸化式 (定理 3.3 と定理 3.5) と、今、主張した系 3.7 により以下の『有理関数の存在定理』が得られます。

系 3.8. (有理関数の存在定理, cf. [56, Corollary 3.12]) $m \in \mathbb{P}$ である m に対して,

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)},\quad \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)},\quad \frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)},\quad \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)} \quad \in \mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}(u)^2),$$

が主張される。ここでは $\mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}(u)^2)$ は $\mathbb{Q}(i)$ 上における $\mathrm{sl}(u)^2$ の有理関数体を意味する。

3.2. この『章』を書き終えるに当たり. この章の基本的な内容は、大元は筆者の修士論文 (2000 年 1 月) の内容です。そして、これらは一度、こちらの『第 17 回数学史シンポジウム』において発表、及び、記事提出をしています [58]。基本的な技術は [58] と全く同じです。ただ、今回は Gauss 流の lemniscate 関数に対してだけでなく、ここで、展開した技術を Abel 流の lemniscate 関数に対しても適応しました。勿論、ここで得られた結果 (定理 3.5 及び系 3.7) は実際に次の章で使います。三角関数に対しても同様の考察をしていて、「それを lemniscate 関数に対しても実行出来たら修士論文としては十分だ」と当時の指導教官に言われ具体的にはこの章の漸化式の構成が修士論文の問題と定まりました。当時 Eisenstein がした相互法則の証明を具体的に見る機会があり [3, 8]、これをベースに勉強をしていました。しかし、三角関数と lemniscate 関数でも似て非なる性質を保持しつつも…これほど様相が違う物なのか…というのが当時、自身が実感した感覚でした。この章に出てきた漸化式に関しての場合だと、三角関数の場合には、たくさんの Example を先に求めてしまい、そこから (一般的な法則などを) 類推し、漸化式を構成していく。という流れで求めました。しかし、これが lemniscate 関数の場合だと、そもそも Example の抽出すら困難…とても、一般的な法則などを類推出来るまで集めるなど…当時、同様なテーマで筆者と同時期に修士論文 [9] を書いた方がいて、この方の修士論文を読み返したがやはり、lemniscate 関数に依って定義される有理関数の具体例は 1 つ載せてあった、だけでした。そして、三角関数の場合と分けて、これらに相当する具体例を計算することすら困難…と最後に書かれてあった。筆者の場合は、一つ一つの概念の確認をし、本質的には primary 数に関して調べれば十分という事を認識した (ここに関しては [58] を参照)。lemniscate 関数は、当時の認識で「$\mathrm{sl}(u)$, と $\mathrm{cl}(u)$ があり、しかも加法定理や関係式もある。…primary 数さえ、何とかなれば…多分、漸化式は構成できる」そして、実際に定義 3.1, 定義 3.2、のような定式化が出来て実際に漸化式の構成に成功しました。それが、定理 3.3 です。定理 3.3 を用いて実際に多くの $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ を mathematica を使って計算させました。例えば [58] からの引用ですが (最左辺に於いて $s := \mathrm{sl}(u)$)、

- $m = 1 + 4i = P_{1,-1}$:

$$F_{1,-1} = \frac{\mathrm{sl}((1+4i)u)}{\mathrm{sl}(u)} = \frac{(1+4i) - (20+12i)s^4 - (10-28i)s^8 + (12-20i)s^{12} + s^{16}}{1 + (12-20i)s^4 - (10-28i)s^8 - (20+12i)s^{12} + (1+4i)s^{16}};$$

$$G_{1,-1} = \frac{\mathrm{cl}((1+4i)u)}{\mathrm{cl}(u)} = \frac{\begin{array}{r} 1 + (8-4i)s^2 - (4-8i)s^4 - (8+12i)s^6 - (10+48i)s^8 \\ - (8+12i)s^{10} - (4-8i)s^{12} + (8-4i)s^{14} + s^{16} \end{array}}{\begin{array}{r} 1 - (8-4i)s^2 - (4-8i)s^4 + (8+12i)s^6 - (10+48i)s^8 \\ + (8+12i)s^{10} - (4-8i)s^{12} - (8-4i)s^{14} + s^{16} \end{array}}.$$

などです。ちなみに $m=1+4i$ は primary prime なので、やはり係数が割り切れます。この例は Eisenstein の [2] にもあり、自身が与えた合同関係式（この報告論文 p12–p14 を参照）の証明の後に、その Example としてあります。筆者の求め方は、計算機による求め方です。自身の手による計算ではありません。が、一度は具体例をたくさん算出しようと試みたので、その計算の困難さは身を持って感じています。初めて、Eisenstein の [2] を見たときに、「一体、どうやって計算してだしたの？」と感じたのを思い出します。**数学史的な立場から改めて考えれば、その Eisenstein がやった具体的な計算を再現する**というのも、一つの問題になると感じます。「数学をやっているのだから、それぐらい、計算できなくちゃ!!」と言われそうですが…だから、こそ「明示的虚数乗法問題」と呼ばれたのでしょうか…現代にいる我々は、計算機は計算機で使える技術を確保し、同時に自身も、相応の計算能力を身に付ける努力をしなければとは、思いはしますが…

計算し結果を出力する、という事に関してですが、当時の愚痴ですが、修士論文のテーマでもあるので、一つでも多くの具体例を載せるために計算機を使ってました。この報告論文 p12 にも $m=3-2i$ に関する例を挙げましたが、これも計算機と定理 3.3 を用いて計算し求めました。$m=3-2i$ この場合は $Nm=13$、$m=1+4i$ の場合は $Nm=17$ となりますが、定理 3.3 を用いて計算なので、前の 4 つの有理関数を代入し（本質的には 8 つの多項式を代入して）計算機にお願いをしていました。しかし、Nm が大きくなると…計算機にお願いの仕方は $m=3-2i$ の場合も $m=1+4i$ の場合も同じだったのですが、$m=3-2i$ の場合と比較して、$m=1+4i$ の場合、かなりパソコンの前でまたされた記憶があります。正直、泣きそうになったのを記憶しています。Nm が大きくなると、結局、代入する多項式の次数も合わせて大きくなるので、Nm が大きくなると…（望みが大きくなると…）計算機といえども…（神仏と言えども…）。興味をもち、計算機が専門の方（神仏と交信のできる）の意見を伺ってみたいです。

この章の最後に、再び [58] から、前回 [58] の 15736 から今回 **15673** へ係数を訂正します。

$$
\begin{aligned}
F_{2,2} &= \frac{\mathrm{sl}((-7)u)}{\mathrm{sl}(u)} \\
&= \frac{\begin{array}{l}-7+308s^4+2954s^8-19852s^{12}+35231s^{16}-82264s^{20}+111916s^{24}\\ -42168s^{28}-\mathbf{15673}s^{32}+14756s^{36}-1302s^{40}+196s^{44}+s^{48}\end{array}}{\begin{array}{l}1+196s^4-1302s^8+14756s^{12}-\mathbf{15673}s^{16}-42168s^{20}\\ +111916s^{24}-82264s^{28}+35231s^{32}-19852s^{36}+2954s^{40}+308s^{44}-7s^{48}\end{array}}
\end{aligned}
$$

上記の具体例に関連してですが、Gauss に関しての有理関数の計算方法（倍角公式としての）が、杉本敏夫氏の [44] にあります。また、古くは、計算方法も込めて [40, 41] に見る事が出来ます。指摘して下さった方は岩峅茂夫氏です。両方の記事 [44]、[58] を比較して気付かれたそうです。この場をかりて厚く御礼を申し上げます。結論をいうと、最初、指摘されたときは、「そんなはずはない！(計算機で計算させているのだから…)」と思っていたのですが、勿論、計算機が間違えたわけでもなく、筆者の写し間違いです。

「間違いを犯すのは人である。神仏は間違わない。だから、人は神仏に畏怖する。
なかには、神仏に本気で憧れ、敬意を持ち、そして、その神仏を目指す人もいる。
この神仏を目指す人たちの事を世間では、天才とか、変人とか、奇人とか、狂人とか、馬鹿とか、そう呼ぶ」

当時を振り返り、今思うと『(最初の数学の論文で) よく、あんなふうにまとまった物が造れたよな…』と感じます。実際に数学の研究を続けると、99 パーセントの闇と 1 パーセントの光と感じる事が多いです。『実際に造ったっよな』と感じるところもあり（実際に造らなければ数学の論文にはならない）造るプロセスを再認識するために、また何故造れたのか？を確認するために簡単に補足 3.4 を書いた次第です。

4. Form of these rational functions (有理関数の型状)

第一章の命題 1.15, 命題 1.16 から、Abel の立場によって構成された lemniscate 関数 $\mathrm{fl}(u)$ 及び $\mathrm{Fl}(u)$ に対して

$$\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}, \qquad \text{and} \qquad \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

が、どのような有理関数として捉えられるのか？というのは研究の中においては自然な流れです。

そこで、命題 1.15, 命題 1.16 も含めた形で、数学的な記述を与えるために、有理関数の形状を考察するのに適した形で、ここに定義を与えたいと思います。この報告論文では、$\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数全体を $\mathbb{P}$ と表しています。

定義 4.1. (cf. [55, Definition 2.1]). $m \in \mathbb{P}$ である m に対して、4 つの有理関数 $R_{s,m}(x)$, $R_{c,m}(x)$, $R_{f,m}(x)$ そして $R_{F,m}(x)$ を、$x := \mathrm{sl}(u)$ として、以下の等式を満たすものとして定義します：

$$R_{s,m}(\mathrm{sl}(u)) := \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad R_{c,m}(\mathrm{sl}(u)) := \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)},$$
$$R_{f,m}(\mathrm{sl}(u)) := \frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}, \qquad R_{F,m}(\mathrm{sl}(u)) := \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

この定義は、確かに肯定されます。系 3.8 から $R_{s,m}(x)$, $R_{c,m}(x)$, $R_{f,m}(x)$, $R_{F,m}(x)$ 4 つとも全て $\mathbb{Q}(i)$ 係数の $\mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数に成ります。勿論、m はある primary 数です。この定義を用いると、命題 1.15, 命題 1.16 は

$$R_{s,m}(x) = \frac{W_m(x^4)}{V_m(x^4)}, \qquad R_{c,m}(x) = \frac{K_m(x^2)}{K_m(-x^2)}, \tag{4.1}$$

のように記述されます。ここで、$V_m(X), W_m(X), K_m(X)$ は命題 1.15, 命題 1.16 に出てくる多項式そのものです。定義 4.1 を用いた以上ような記述 (4.1) を踏まえて、有理関数 $R_{f,m}(x)$ と $R_{F,m}(x)$ に対して記述 (4.1) と同様の物を造るというのが、この章の主題です。さらに、具体的には記述 (4.1) に関して $R_{s,m}(x)$ は、Eisenstein により [1, 2], [14, p245, Proposition 8.2] において、$R_{c,m}(x)$ に関しては筆者が [55, Proposition 2.2] において、明らかにされている事です。そこで、記述 (4.1) を肯定し、その上で有理関数 $R_{f,m}(x)$ と $R_{F,m}(x)$ に対して記述 (4.1) と同様の物を作り上げたいと思います。この目的のために以下の命題を準備します。

命題 4.2. $m \in \mathbb{P}$ である m に対して、以下の関係式が直ちに得られる*:*

$$R_{f,m}(ix) = R_{F,m}(x), \qquad R_{F,m}(ix) = R_{f,m}(x), \qquad R_{c,m}(x) = \frac{R_{f,m}(x)}{R_{F,m}(x)}.$$

Proof. 定義 4.1 と、第 2 章でまとめた様々な lemniscate 関数の性質を駆使することにより以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} R_{f,m}(ix) &= R_{f,m}(i\,\mathrm{sl}(u)) = R_{f,m}(\mathrm{sl}(iu)) \\ &= \frac{\mathrm{fl}(imu)}{\mathrm{fl}(iu)} = \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)} = R_{F,m}(\mathrm{sl}(u)) = R_{F,m}(x). \end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned} R_{F,m}(ix) &= R_{F,m}(i\,\mathrm{sl}(u)) = R_{F,m}(\mathrm{sl}(iu)) \\ &= \frac{\mathrm{Fl}(imu)}{\mathrm{Fl}(iu)} = \frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)} = R_{f,m}(\mathrm{sl}(u)) = R_{f,m}(x). \end{aligned}$$

また、定義 4.1、及び、lemniscate 関数どうしの関係式 $\mathrm{cl}(u) = \mathrm{fl}(u)/\,\mathrm{Fl}(u)$ から、

$$R_{c,m}(x) = R_{c,m}(\mathrm{sl}(u)) = \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)} = \frac{\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(mu)}}{\frac{\mathrm{fl}(u)}{\mathrm{Fl}(u)}} = \frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(u)}{\mathrm{Fl}(mu)} = \frac{R_{f,m}(x)}{R_{F,m}(x)}.$$

□

命題 4.3. *$m \in \mathbb{P}$ である m に対して、$R_{f,m}(x)$ と $R_{F,m}(x)$ を以下のように表示する事ができる:*

$$R_{f,m}(x) = \frac{K_m(x^2)}{V_m(x^4)}, \qquad R_{F,m}(x) = \frac{K_m(-x^2)}{V_m(x^4)},$$

ここで $V_m(X)$ と $K_m(X)$ は命題 1.15, 命題 1.16 に出てくる多項式そのものです。

Proof. 有理関数の分母の多項式は、定理 3.5 の漸化式、及び、系 3.7 の最初の有理関数たちから、帰納法で考える事によって 3 つの有理関数 $R_{s,m}(x)$ と $R_{f,m}(x)$ と $R_{F,m}(x)$ は同じ分母の多項式を持つことになる。$R_{s,m}(x)$ の表示から、分母の多項式による表示が $V_m(x^4)$ となる。分子の多項式による表示は、命題 4.2 の 3 つの有理関数の関係式を満たす事を考える事によって、それぞれ $K_m(x^2)$ と $K_m(-x^2)$ と決まる。 □

この命題 4.3 は、系 3.7 の中にも見る事が出来る。また、これから紹介する具体例にも改めて見る事が出来る。

例 4.4 (see [55, 56]). $m = 3 - 2i \in \mathbb{P}$ に対して, 4 つの有理関数 $R_{s,m}(x)$, $R_{c,m}(x)$, $R_{f,m}(x)$, $R_{F,m}(x)$ は以下のようになる:

$$\begin{aligned} R_{s,m}(x) &= \frac{(3-2i) + (7+4i)x^4 + (-11-10i)x^8 + x^{12}}{1 + (-11-10i)x^4 + (7+4i)x^8 + (3-2i)x^{12}}, \\ R_{c,m}(x) &= \frac{1 - (2-6i)x^2 + (3+8i)x^4 + (12-4i)x^6 + (3+8i)x^8 - (2-6i)x^{10} + x^{12}}{1 + (2-6i)x^2 + (3+8i)x^4 - (12-4i)x^6 + (3+8i)x^8 + (2-6i)x^{10} + x^{12}}, \\ R_{f,m}(x) &= \frac{1 - (2-6i)x^2 + (3+8i)x^4 + (12-4i)x^6 + (3+8i)x^8 - (2-6i)x^{10} + x^{12}}{1 + (-11-10i)x^4 + (7+4i)x^8 + (3-2i)x^{12}}, \\ R_{F,m}(x) &= \frac{1 + (2-6i)x^2 + (3+8i)x^4 - (12-4i)x^6 + (3+8i)x^8 + (2-6i)x^{10} + x^{12}}{1 + (-11-10i)x^4 + (7+4i)x^8 + (3-2i)x^{12}}. \end{aligned}$$

この具体例における命題 1.15, 命題 1.16, 命題 1.17(命題 4.3) の主要な多項式 $V_m(X)$, $W_m(X)$, $K_m(X)$ は以下のようになる:

$$\begin{aligned} V_m(X) &= 1 + (-11-10i)X + (7+4i)X^2 + (3-2i)X^3, \\ W_m(X) &= (3-2i) + (7+4i)X + (-11-10i)X^2 + X^3, \\ K_m(X) &= 1 - (2-6i)X + (3+8i)X^2 + (12-4i)X^3 + (3+8i)X^4 - (2-6i)X^5 + X^6. \end{aligned}$$

例 4.5 (see [56], cf. [2]). $m = 1 + 4i = P_{1,-1} \in \mathbb{P}$ に対して、4つの有理関数 $R_{s,m}(x) = F_{1,-1}$, $R_{c,m}(x) = G_{1,-1}$, $R_{f,m}(x) = H_{1,-1}$, $R_{F,m}(x) = I_{1,-1}$ は以下のようになる ($x := \mathrm{sl}(u)$ と見る):

$$R_{s,m}(x) = F_{1,-1} = \frac{(1+4i) - (20+12i)x^4 - (10-28i)x^8 + (12-20i)x^{12} + x^{16}}{1 + (12-20i)x^4 - (10-28i)x^8 - (20+12i)x^{12} + (1+4i)x^{16}},$$

$$R_{c,m}(x) = G_{1,-1} = \frac{\begin{aligned}1 + (8-4i)x^2 - (4-8i)x^4 - (8+12i)x^6 - (10+48i)x^8 \\ - (8+12i)x^{10} - (4-8i)x^{12} + (8-4i)x^{14} + x^{16}\end{aligned}}{\begin{aligned}1 - (8-4i)x^2 - (4-8i)x^4 + (8+12i)x^6 - (10+48i)x^8 \\ + (8+12i)x^{10} - (4-8i)x^{12} - (8-4i)x^{14} + x^{16}\end{aligned}},$$

$$R_{f,m}(x) = H_{1,-1} = \frac{\begin{aligned}1 + (8-4i)x^2 - (4-8i)x^4 - (8+12i)x^6 - (10+48i)x^8 \\ - (8+12i)x^{10} - (4-8i)x^{12} + (8-4i)x^{14} + x^{16}\end{aligned}}{1 + (12-20i)x^4 - (10-28i)x^8 - (20+12i)x^{12} + (1+4i)x^{16}},$$

$$R_{F,m}(x) = I_{1,-1} = \frac{\begin{aligned}1 - (8-4i)x^2 - (4-8i)x^4 + (8+12i)x^6 - (10+48i)x^8 \\ + (8+12i)x^{10} - (4-8i)x^{12} - (8-4i)x^{14} + x^{16}\end{aligned}}{1 + (12-20i)x^4 - (10-28i)x^8 - (20+12i)x^{12} + (1+4i)x^{16}}.$$

この具体例における命題 1.15, 命題 1.16, 命題 1.17(命題 4.3) の主要な多項式 $V_m(X)$, $W_m(X)$, $K_m(X)$ は以下のようになる:

$$\begin{aligned}
V_m(X) &= 1 + (12-20i)X - (10-28i)X^2 - (20+12i)X^3 + (1+4i)X^4, \\
W_m(X) &= (1+4i) - (20+12i)X - (10-28i)X^2 + (12-20i)X^3 + X^4, \\
K_m(X) &= 1 + (8-4i)X - (4-8i)X^2 - (8+12i)X^3 - (10+48i)X^4 \\
&\quad - (8+12i)X^5 - (4-8i)X^6 + (8-4i)X^7 + X^8.
\end{aligned}$$

4.1. **この章を書き終えるに当たり⋯.** この第4章ではずっと有理関数の形状を考えてきました。命題 1.15, 命題 1.16, を含む形で命題 1.17(命題 4.3) の証明を与えるためには？

実際には、既に前章の漸化式たち (定理 3.3, 定理 3.5) と最初の有理関数達 (系 3.7) に対して帰納法を用いる事により、たくさんの具体例を保持している。上記の例 4.5 はその事を示唆しています。なので命題 1.17(命題 4.3) に相当するものは先に感知している。また [14, p245, Proposition 8.2] において命題 1.17(命題 4.3) に相当する表示もサラッと出ている。[14, p245, Proposition 8.2] を起点にこの報告論文の主題の有理関数の土台となるものが造れないのか？命題 1.15, 命題 1.16 は、Eisenstein [1, 2] や筆者の [55, Proposition 2.2] において既知であるから、これらを含む形にして、何とか定式化出来ないか？このような意志においてまとめられたものが、この第4章の有理関数の型状になります。

実際に、定義 4.1 を与え、命題 1.15, 命題 1.16 の書き換えに相当する (4.1) なるものを準備し、lemniscate 関数の性質を使い、有理関数どうしの関係式、命題 4.2 を用意し、最後に、(4.1)、命題 4.2、前章の定理 3.5、最初の有理関数達 (系 3.7) に対して帰納法と、いった道具を総動員して命題 4.3(命題 1.17 に相当する) を得るに至りました。

しかし、わざわざこのような物を書いているのは、実際の研究では、実に流動的で、色々な物事が同時に進行している。数行前に、僕自身のこの章に関する数学的な意志を述べ、そして、実

際に進行してなされたことを書いたが、真実は、書きたい記述したい内容が先に在って、それを何とか数学的な記述に載せる、さらには、その後の数学的な前進や発展のための展望台の役割を担う物を造り上げる。この目的のために定義を巧く調整する。少なくとも僕の場合は、こんな感じです。

- 厳然たる数学的な意志がある
- 実際に展開される数学があり
- 書きたい事、記述したい事、伝えたい事が、確かに在って
- これらの目的のために定義を巧く調整する

出来上がっている数学を理解する事と（これは、これで大変だが…）、自身が数学を、自身が感知した内容でしかも自身でその価値を確信し、その内容を数学の論文として記述する。労力は、この後者の、『内容を数学の論文として記述する』が、遥かに上回る。ある先生が、良く口癖のようにおしゃっていた。『勉強は努力…されど、研究ともなると命がけ…』しまいには、『数学の論文は命がけで書くもんだ !! 』と。時間の経過とともに、この『命がけで』の意味が本当に良く解ってくる。

話が長くなり横道に入りそうなので、ここで一旦しめる。要は、自身がしてきた事の確認のためと、それらを踏まえて、これから、数学の論文を書こうという人のための参考になれば、と思い書いた次第です。さらに、この報告論文を読んでいる人のために書いた部分もある。この報告論文の場合、例えば第３章の漸化式。ここでは目的は有理関数の具体例の抽出のためにであり、それに合った記述がある。この第４章では、有理関数の型状を考えてきた。やはり、その目的に合った記述がある。同じものを研究しているのに、定義が変わるのはこのためです。さらに言ってしまえば、第３章、第４章、第５章、…と同じ研究テーマでありながら独立した話が展開される。と思って読んでもらった方が読みやすいと思う。しかも、得られた結果を使い回したり等もする。最後に、この後の書かれる内容と、この章の内容の関連についてだが、実際の講演では Eisenstein の合同関係式のメカニズムを道標として、お話をしました。そのメカニズムの一つがこの第４章の命題 4.3(命題 1.17) になります。Eisenstein の合同関係式のメカニズム（この報告論文の p12–p14 を参照）の説明のためには、まだ、道具が足りません。それを次の章で用意したいと思います。

5. 有理関数どうしの微分関係式について (SOME DIFFERENTIAL RELATIONS)

lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数に依って定義される有理関数について色々調べているが、有理関数どうしの関係式はたくさん存在します。その実、それらは、以下の３タイプに類別されます。

(1) 帰納的な関係式、つまり漸化式（これは第３章で話をした。本質は primary 数の帰納的な関係式と加法定理による）
(2) 対称的な関係式、つまり関数等式 (これについては次の章にまわす。本質は primary 数と加法定理による)
(3) 微分関係式（この章でお話しする内容）

この章では lemniscate 関数の微分関係式 (この報告論文の p17) を適応して得られる有理関数どうしの微分関係式を提示します。そもそも、有理関数どうしの微分関係式を考えるのは、何とか Eisenstein の合同関係式のメカニズムを説明できないか？という目的があります。ただ、この目的とは別で、（筆者は当然これから話す内容は何度も試行錯誤や計算等をして見ているので…）有理関数どうしの微分関係式を見ていて、個々の有理関数がピタピタと巧くハマり込んでいるな…としみじみ感じてしまうのです。それと、微分という操作も実に、曖昧なものを残しているな…と感じてしまうのです。微分の操作が「曖昧なものを残す」というのは、筆者の個人的な感覚です。それらは、これから話す内容で伝わればと思う次第です。

5.1. 定義 4.1 に基づいた微分関係式について. 定義 4.1 の $R_{s,m}(x), R_{f,m}(x)$, $R_{F,m}(x)$ に対して $x := \mathrm{sl}(u)$ とし、この x についての微分関係式を考える。このために、以下の記号を準備する:

$$R'_{s,m}(x) := \frac{d}{dx}R_{s,m}(x), \qquad R'_{f,m}(x) := \frac{d}{dx}R_{f,m}(x),$$
$$R'_{F,m}(x) := \frac{d}{dx}R_{F,m}(x), \qquad \text{ここでは} \quad x := \mathrm{sl}(u).$$

lemniscate 関数の微分関係式 (p17) から $x = \mathrm{sl}(u)$ に対して、直ちに

$$dx = \mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)du, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)}.$$

を得る。以上述べた記号等を用いる事により、x についての $R_{s,m}(x), R_{f,m}(x)$, $R_{F,m}(x)$ に対する微分関係式を得る。

命題 5.1. *x についての $R_{s,m}(x), R_{f,m}(x)$, $R_{F,m}(x)$ に対する微分関係式は以下のように成る:*

$$R_{s,m}(x) + xR'_{s,m}(x) = mR_{f,m}(x)R_{F,m}(x),$$
$$R_{f,m}(x) + \frac{x^2-1}{x}R'_{f,m}(x) = mR_{s,m}(x)R_{F,m}(x),$$
$$R_{F,m}(x) + \frac{x^2+1}{x}R'_{F,m}(x) = mR_{s,m}(x)R_{f,m}(x).$$

Proof. lemniscate 関数の微分関係式、定義 4.1、そして $x := \mathrm{sl}(u)$ としていることから

$$\begin{aligned} R'_{s,m}(x) &= \frac{d}{dx}R_{s,m}(x) = \frac{d}{du}R_{s,m}(x)\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}\frac{du}{dx} \\ &= \Big(\frac{m\,\mathrm{fl}(mu)\,\mathrm{Fl}(mu)\,\mathrm{sl}(u) - \mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)\,\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}^2(u)}\Big)\frac{1}{\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{sl}(u)}\Big(m\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)} - \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}\Big) \\ &= \frac{1}{x}\Big(mR_{f,m}(x)R_{F,m}(x) - R_{s,m}(x)\Big). \end{aligned}$$

この上記の関係式を書き換える事によって

$$R_{s,m}(x) + xR'_{s,m}(x) = mR_{f,m}(x)R_{F,m}(x).$$

を得る。$R_{f,m}(x)$ と $R_{F,m}(x)$ についての微分関係式も同様にして得られる. □

補足 5.2. 命題 *5.1* の 1 番目の関係式に対して、$x := \mathrm{sl}(u)$、$y := \mathrm{sl}(mu)$ 置くことによりこの 1 番目の関係式を書き換えると、以下のようになる。

$$\text{(H3)} \qquad \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = m\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

また逆に、$x := \mathrm{sl}(u)$、$y := \mathrm{sl}(mu)$ とし、*(H3)* を書き換えて 1 番目の関係式が得られる。1 番目の関係式と *(H3)* は同値なものである。*(*気になられた読者は、御自身の手 *(*計算*)* で確認する事を勧めます*)* この *(H3)* は本質的には *lemniscate* 関数の倍角公式、まさしく $x := \mathrm{sl}(u)$、$y := \mathrm{sl}(mu)$ の関係を表している。なので、当然ある有理関数 $y = R(x)$ を

$$y = R(x) := xR_{s,m}(x)$$

のように取ると、当然これは微分方程式 *(H3)* を満たす。そもそもは、この微分方程式 *(H3)* からの議論が歴史的な流れです。実際に *Eisenstein* はこの微分方程式 *(H3)* から、議論をはじめ *Eisenstein* の合同関係式の証明を与えている [1, 2]。また、*Abel* がしたことは微分方程式 *(H3)* の一般化、例えば [21, p165]

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-(c_1)^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

を与え、自身が造った楕円関数論を用いて、この上記微分方程式の満たす場合を考えたことである [17, 19, 20], [21]。以上、歴史的な内容との関連をここに書いた次第です。

5.2. 系 3.8 に基づいた有理関数どうしの微分関係式について. そもそも系 3.8(この報告論文 p25) から、考察の対象である 4 つの楕円関数は、皆、$\mathbb{Q}(i)$ 係数の $\mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数として認識が出来る。しかし、前章ではわざわざ、$\mathbb{Q}(i)$ 係数の $x = \mathrm{sl}(u)$ の有理関数としての定義を与えた。この方が、有理関数の形状を考える上で、説明の見通しやすさを考えても、この方が良い。この場では改めて $\mathbb{Q}(i)$ 係数の $w = \mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数としての定義を与え、その後、それら有理関数の微分関係式を提示します。

定義 5.3. $m \in \mathbb{P}$ である m に対して、4つの有理関数 $R_{s,m}(w)$, $R_{c,m}(w)$, $R_{f,m}(w)$ そして $R_{F,m}(w)$ を、$w := \mathrm{sl}^2(u)$ として、以下の等式を満たすものとして定義します：

$$R_{s,m}(\mathrm{sl}^2(u)) := \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad R_{c,m}(\mathrm{sl}^2(u)) := \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)},$$
$$R_{f,m}(\mathrm{sl}^2(u)) := \frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}, \qquad R_{F,m}(\mathrm{sl}^2(u)) := \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

この後の基本的な計算や論法は直前の subsection と全く同じです。定義 5.3 の $R_{s,m}(w), R_{f,m}(w)$, $R_{F,m}(w)$ に対して $w := \mathrm{sl}^2(u)$ とし、この w についての微分関係式を考える。このために、以下の記号を準備する:

$$R'_{s,m}(w) := \frac{d}{dw}R_{s,m}(w), \qquad R'_{f,m}(w) := \frac{d}{dw}R_{f,m}(w),$$
$$R'_{F,m}(w) := \frac{d}{dw}R_{F,m}(w), \qquad \text{ここでは} \quad w := \mathrm{sl}^2(u).$$

lemniscate 関数の微分関係式 (p17) から $w = \mathrm{sl}^2(u)$ に対して、直ちに

$$dw = 2\,\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)du, \qquad \frac{du}{dw} = \frac{1}{2\,\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)}.$$

を得る。以上述べた記号等を用いる事により、w についての $R_{s,m}(w), R_{f,m}(w)$, $R_{F,m}(w)$ に対する微分関係式を得る。

命題 5.4. *w についての $R_{s,m}(w), R_{f,m}(w)$, $R_{F,m}(w)$ に対する微分関係式は以下のように成る:*

$$R_{s,m}(w) + 2wR'_{s,m}(w) = mR_{f,m}(w)R_{F,m}(w),$$
$$R_{f,m}(w) + 2(w-1)R'_{f,m}(w) = mR_{s,m}(w)R_{F,m}(w),$$
$$R_{F,m}(w) + 2(w+1)R'_{F,m}(w) = mR_{s,m}(w)R_{f,m}(w).$$

Proof. lemniscate 関数の微分関係式、定義 5.3、そして $w := \mathrm{sl}^2(u)$ としていることから

$$\begin{aligned}
R'_{s,m}(w) &= \frac{d}{dw}R_{s,m}(w) = \frac{d}{du}R_{s,m}(w)\frac{du}{dw} = \frac{d}{du}\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}\frac{du}{dw} \\
&= \left(\frac{m\,\mathrm{fl}(mu)\,\mathrm{Fl}(mu)\,\mathrm{sl}(u) - \mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)\,\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}^2(u)}\right)\frac{1}{2\,\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)} \\
&= \frac{1}{2\,\mathrm{sl}^2(u)}\left(m\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)} - \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}\right) \\
&= \frac{1}{2w}\Big(mR_{f,m}(w)R_{F,m}(w) - R_{s,m}(w)\Big).
\end{aligned}$$

この上記の関係式を書き換える事によって

$$R_{s,m}(w) + 2wR'_{s,m}(w) = mR_{f,m}(w)R_{F,m}(w).$$

を得る。$R_{f,m}(w)$ と $R_{F,m}(w)$ についての微分関係式も同様にして得られる. □

5.3. ある有理関数の微分関係式と Eisenstein の合同関係式について. Abel の認識 [17], [21, p84]、Eisenstein の認識 [1, 2] これらが意味する事を数学で記述すると

$$\text{(H1)} \qquad \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} \in \mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}^4(u)),$$

という事になる。ここでは $\mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}(u)^4)$ は $\mathbb{Q}(i)$ 上における $\mathrm{sl}(u)^4$ の有理関数体を意味する。

この歴史的な認識 (H1) を受けて、有理関数 $R_{s,m}(X)$ を以下のように定義します。

定義 5.5. $m \in \mathbb{P}$ である m に対して、有理関数 $R_{s,m}(X)$ を、$X := \mathrm{sl}^4(u)$ として、以下の等式を満たすものとして定義します:

$$R_{s,m}(X) := \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad \text{ここでは} \quad X := \mathrm{sl}^4(u), \quad m \in \mathbb{P}.$$

この定義された有理関数 $R_{s,m}(X)$ に対して以下のような記号を準備します:

$$R'_{s,m}(X) := \frac{d}{dX} R_{s,m}(X),$$

そして $X = \mathrm{sl}^4(u)$ と置いているので、直ちに（３度目）

$$dX = 4\,\mathrm{sl}^3(u)\,\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u) du, \qquad \frac{du}{dX} = \frac{1}{4\,\mathrm{sl}^3(u)\,\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)}.$$

を得る。以上述べた記号等、及び lemniscate 関数の微分関係式から以下の有理関数 $R_{s,m}(X)$ の微分関係式を得る。

命題 5.6. *X についての $R_{s,m}(X)$ の微分関係式は以下のようになる:*

$$R_{s,m}(X) + 4XR'_{s,m}(X) = m\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

Proof. lemniscate の微分関係式、上記の記号、定義 5.5、そして $X = \mathrm{sl}^4(u)$ としていることから

$$\begin{aligned}
R'_{s,m}(X) &= \frac{d}{dX}R_{s,m}(X) = \frac{d}{du}R_{s,m}(X)\frac{du}{dX} = \frac{d}{du}\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}\frac{du}{dX} \\
&= \left(\frac{m\,\mathrm{fl}(mu)\,\mathrm{Fl}(mu)\,\mathrm{sl}(u) - \mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)\,\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}^2(u)}\right)\frac{1}{4\,\mathrm{sl}^3(u)\,\mathrm{fl}(u)\,\mathrm{Fl}(u)} \\
&= \frac{1}{4\,\mathrm{sl}^4(u)}\left(m\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)} - \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}\right) \\
&= \frac{1}{4X}\left(m\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)} - R_{s,m}(X)\right).
\end{aligned}$$

この上記関係式を書き換える事によって、

$$R_{s,m}(X) + 4XR'_{s,m}(X) = m\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

を得る。 □

lemniscate 関数 $\mathrm{sl}(mu)/\,\mathrm{sl}(u)$ に対しては、$x := \mathrm{sl}(u)$, $w := \mathrm{sl}^2(u)$, そして $X := \mathrm{sl}^4(u)$ とそれぞれ x や w そして X の有理関数としての認識が可能となる。それ故に、３タイプの微分関係式

(係数部分が互いに異なる) が出現した。この、**『x や w そして X の有理関数としての認識が可能となる』**という事実が筆者に混乱を引き起こした。詳しくは後に述べる事にして、以上により『Eisenstein の合同関係式のメカニズム』のための道具がそろった。これより上記、命題 5.6、等を用いて『Eisenstein の合同関係式のメカニズム』の説明に入ります。

5.4. Eisenstein の合同関係式のメカニズム (筆者が与えた証明). まず命題 5.6 より

(Ep1) $$R_{s,m}(X)+4XR'_{s,m}(X)=m\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

この関係式 (Ep1) の右辺は、定義 4.1、及び、命題 4.3 から

(Ep2) $$m\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}=mR_{f,m}(x)R_{F,m}(x)=m\frac{K_m(x^2)K_m(-x^2)}{(V_m(x^4))^2},$$

と成ります。ここでは、$K_m(X)$ と $V_m(X)$ は、命題 1.15 や命題 1.16 に出てくる多項式そのものです。そして、$x:=\mathrm{sl}(u)$ とします。一方で、関係式 (Ep1) の左辺に対して、命題 1.15 や直前の subsection の記号の意味を踏まえると、

(Ep3) $$\begin{aligned}R_{s,m}(X)+4XR'_{s,m}(X)&=\frac{W_m(X)}{V_m(X)}+4X\left(\frac{W'_m(X)V_m(X)-W_m(X)V'_m(X)}{V_m(X)^2}\right)\\&=\frac{W_m(X)V_m(X)}{V_m(X)^2}+\frac{4X(W'_m(X)V_m(X)-W_m(X)V'_m(X))}{V_m(X)^2},\end{aligned}$$

となります。ここでは $W_m(X)$ と $V_m(X)$ は命題 1.15 の多項式そのものです。但し $X=\mathrm{sl}^4(u)$ とします。

この 3 つの関係式 (Ep1), (Ep2), (Ep3) から

$$\frac{W_m(X)V_m(X)}{V_m(X)^2}+\frac{4X(W'_m(X)V_m(X)-W_m(X)V'_m(X))}{V_m(X)^2}=m\frac{K_m(x^2)K_m(-x^2)}{(V_m(x^4))^2}.$$

となります。この上記の関係式に対して、$X=\mathrm{sl}^4(u)$ と $x=\mathrm{sl}(u)$ に留意して、以下を得ます。

$$W_m(X)V_m(X)+4X(W'_m(X)V_m(X)-W_m(X)V'_m(X))=mK_m(x^2)K_m(-x^2).$$

さらに、この上記の関係式の両辺を m で割ることにより、以下を得ます。

(Ep4) $$\frac{1}{m}\Big(W_m(X)V_m(X)+4X(W'_m(X)V_m(X)-W_m(X)V'_m(X))\Big)=K_m(x^2)K_m(-x^2).$$

この関係式 (Ep4) の右辺は、その式の形から直ちに

(Ep5) $$K_m(x^2)K_m(-x^2)\ \in\ \mathbb{Z}[i][x^4]=\mathbb{Z}[i][X].$$

と成ることが解ります。それゆえ、(Ep4) と (Ep5) から

(Ep6) $$\frac{1}{m}\Big(W_m(X)V_m(X)+4X(W'_m(X)V_m(X)-W_m(X)V'_m(X))\Big)\ \in\ \mathbb{Z}[i][X].$$

を得ます。

この事実 (Ep6) が、Eisenstein の合同関係式の証明の中で重要な意味を持ちます。また、以上述べた部分 (Ep1)〜(Ep6) が、筆者の主張する『Eisenstein の合同関係式のメカニズム』になります。原論文 [2, 8] と比較しても、異なります。

これより先の話は、Eisenstein の証明 [2, 8] と殆ど同じです。

命題 1.15 に基づき、以下のように係数を置きます。

(Ep7)
$$W_m(X) = A_0 + A_1X + A_2X^2 + A_3X^3 + \cdots + A_{\frac{N-1}{4}}X^{\frac{N-1}{4}},$$
$$V_m(X) = B_0 + B_1X + B_2X^2 + B_3X^3 + \cdots + B_{\frac{N-1}{4}}X^{\frac{N-1}{4}},$$
$$(A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{\frac{N-1}{4}}, B_0, B_1, B_2, \cdots, B_{\frac{N-1}{4}} \in \mathbb{Z}[i]),$$

ここでは $m = a + ib$ は primary 数 $(a, b \in \mathbb{Z})$。そして、$N := a^2 + b^2$.

これに従って計算すると

$$\begin{aligned}
&W_m(X)V_m(X) + 4X(W'_m(X)V_m(X) - W_m(X)V'_m(X)) \\
&= W_m(X)V_m(X) + 4XW'_m(X)V_m(X) - 4XW_m(X)V'_m(X) \\
&= A_0B_0 + (A_1B_0 + A_0B_1)X + (A_0B_2 + A_1B_1 + A_2B_0)X^2 \\
&\quad + (A_0B_3 + A_1B_2 + A_2B_1 + A_3B_0)X^3 + \cdots \\
&\quad + 4A_1B_0X + (8A_2B_0 + 4A_1B_1)X^2 + (12A_3B_0 + 8A_2B_1 + 4A_1B_2)X^3 + \cdots \\
&\quad - 4A_0B_1X - (8A_0B_2 + 4A_1B_1)X^2 - (12A_0B_3 + 8A_1B_2 + 4A_2B_1)X^3 + \cdots \\
&= A_0B_0 + (5A_1B_0 - 3A_0B_1)X + (-7A_0B_2 + A_1B_1 + 9A_2B_0)X^2 \\
&\qquad + (-11A_0B_3 - 3A_1B_2 + 5A_2B_1 + 13A_3B_0)X^3 + \cdots .
\end{aligned}$$

今は $B_0 = 1$ を認めます (次章の補足 6.7 を参照)。すると

(Ep8)
$$\begin{aligned}
&W_m(X)V_m(X) + 4X(W'_m(X)V_m(X) - W_m(X)V'_m(X)) \\
&= A_0 + (5A_1 - 3A_0B_1)X + (-7A_0B_2 + A_1B_1 + 9A_2)X^2 \\
&\qquad + (-11A_0B_3 - 3A_1B_2 + 5A_2B_1 + 13A_3)X^3 + \cdots .
\end{aligned}$$

事実 (Ep6) と計算結果 (Ep8) から、もし m が $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary prime 数だと仮定すると、

(Ep9)
$$\frac{A_0}{m}, \frac{A_1}{m}, \frac{A_2}{m}, \frac{A_3}{m}, \cdots, \frac{A_{\frac{N-5}{4}}}{m} \in \mathbb{Z}[i].$$

となります。命題 1.15 (次章の補足 6.7 を参照) から、

(Ep10)
$$W_m(X) = X^{\frac{N-1}{4}}V_m(X^{-1}), \quad ここでは\ X = x^4 = \mathrm{sl}^4(u).$$

係数の置き方 (Ep7) に、上記 (Ep10) の関係を適応させる事により

(Ep11)
$$A_0 = B_{\frac{N-1}{4}},\ A_1 = B_{\frac{N-5}{4}},\ A_2 = B_{\frac{N-9}{4}},\ \cdots,\ A_{\frac{N-1}{4}} = B_0 = 1.$$

を得ます。よって、係数の置き方 (Ep7)、係数同士の関係 (Ep11)、そして m が $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary prime 数と仮定して得られる (Ep9) から、以下の Eisenstein の合同関係式を得るに至りました:

$$W_m(X) \equiv X^{\frac{N-1}{4}} \pmod{m}, \qquad V_m(X) \equiv 1 \pmod{m}.$$

□

5.5. **この章を書き終えるに当たり⋯.** この章では有理関数の微分関係式を考え続けてきました。実際に、$\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数の m に対して

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)},\qquad \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)},\qquad \frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)},\qquad \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

の４つの楕円関数は、$\mathrm{sl}(u)$ による表示を考える事により、そこに有理関数が現れます。この事実を肯定しているのが系 3.8 に成ります。しかし、既にこの段階で、$x=\mathrm{sl}(u)$ の有理関数と考えるのか、それとも、$w=\mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数を考えるのか ⋯ と２手に分かれます。さらに、

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)},$$

に至っては⋯$X=\mathrm{sl}^4(u)$ の有理関数としての認識が可能です。とにかく、思いついたのは全て計算でまとめて置こう。という意志のもとで実際に x の有理関数としての命題 5.1、w の有理関数としての命題 5.4、そして X の有理関数としての命題 5.6、と計算結果を整理しました。その上で、計算結果の係数を見たときに『微分』という操作の曖昧さを個人的には感じています。そして、**目的**に即した物をこの中から、選択しなければ成りません。ここまでの話してきた内容と、ここで実践されたこと、そして、この後実践されること、を比較した形で書くと、

(1) $x=\mathrm{sl}(u)$ の有理関数として考え、**有理関数の型**を明らかにした。
(2) $X=\mathrm{sl}^4(u)$ の有理関数として考え、**Eisenstein の合同関係式のメカニズム**を明らかにした。
(3) $w=\mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数として考え、**有理関数どうしの対称性**をさらに明らかにした。

というのが、実状でした。上記 (1) は第４章で、上記 (2) はこの第５章で、上記 (3) はこの後の第６章で、展開される内容です。

次に『Eisenstein の合同関係式のメカニズム』と筆者が主張する理由を述べたいと思います。理由は３つあります。この先は本文 p36 を見ながらお読みください。１つ目は、証明のスタートである微分関係式 (Ep1) を見て感じる事ですが、考えてきた有理関数がピタピタとキッチリとハマり込んでいる事です。２つ目は、有理関数の分母に同じ多項式 $V_m(X)$ が現れたことです。この事実は、第４章の命題 4.3 による内容のものです。これによって、有理関数どうしの等式が、一気に（分母がはじかれて）多項式の等式 ((Ep4) とその直前の式) へと変換されました。そして、この命題 4.3 は Abel の [17, 21] で導入された lemniscate 関数、$\mathrm{fl}(u)$ 及び $\mathrm{Fl}(u)$ に対して、

$$\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)},\qquad \frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

の表示を考えた事により得られたものです。最後の３つ目は、(Ep5)、(Ep6)、に見られるように、現れている多項式が、$\mathbb{Z}[i]$ 上の $X=\mathrm{sl}^4(u)$ の多項式としての認識を (Ep5) により容易にしました。この (Ep5) に現れている多項式 $K_m(x^2)$ は、Gauss によって導入された lemniscate 関数 $\mathrm{cl}(u)$ に対して

$$\frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)},$$

を $\mathrm{sl}(u)$ の有理関数としての表示を考えた事により出現しました。この事実は、命題 1.16、[55, Proposition 2.2] によるものです。以上の３つが、とても絶妙に役立っているという事、この事が筆者に『Eisenstein の合同関係式のメカニズム』と主張させています。

また、『Eisenstein の合同関係式のメカニズム』の説明のために、Abel の視点、Gauss の視点が、交錯しているのが上記の説明でも理解できます。それ故、

「Gauss, Abel, Eisenstein, を繋ぐ虹の架け橋」

と副題を付けた次第です。

次に、Eisenstein がしたオリジナルの証明と『Eisenstein の合同関係式のメカニズム (p36,(Ep1)〜(Ep6))』を比較したいと思います。Eisenstein がしたオリジナルの証明は、[2, 8] さらに、細部に至るまでカバーしたものが [9] にあります。筆者がオリジナルの証明で、納得できなかったのは、筆者の立場で言う (Ep5), (Ep6) を得るまでのプロセスです。Eisenstein がしたオリジナルの証明でも、筆者の立場で言う (Ep5), (Ep6) を得て、その後、係数の情報を整理していきます。なので、(Ep8) に原論文 [2] と同じ計算結果が現れます。(似て非なる物を筆者が計算しています。) Eisenstein がしたオリジナルの証明の中の (Ep5), (Ep6) に相当する物を得るまでのプロセスも筆者にとっては判然としないのですが、そもそも、スタートから、筆者にとっては躓きます。筆者は微分関係式 (Ep1) からスタートしこの (Ep1) の両辺 (右辺 (Ep2)、左辺 (Ep3)) についての情報を整理それぞれ出したのに対して、Eisenstein は微分方程式

$$\text{(H3)} \qquad \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = m\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

を与え、これを満たすものとして $x := \mathrm{sl}(u)$、$y := \mathrm{sl}(mu)$ を踏まえて、議論が展開します。この、微分関係式を変形したりして議論が進むのだが、どうも、その関係式の左辺の係数の情報は理解できるのだが、その関係式の右辺の係数の情報が、筆者にとっては判然としない。筆者の立場で言う (Ep5) に相当する物が筆者には不明瞭に感じています。勿論、そう感じたから、個人的にでも理解を得たいと努力した結果として Eisenstein の合同関係式の別証明が与えられるに至りました [59]。Eisenstein がしたオリジナルの証明は、細部に至るまでカバーしたものが [9] にあり、それも、今回の発表の準備の一環として改めて読み返しては見たのですが、それでも、個人的には Eisenstein がしたオリジナルの証明には一部分納得出来ずにいます。ここに、筆者の数学の『好き』と『嫌い』が現れているだけなのかもしれないのですが…

本報告論文は

『lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数に依って定義される有理関数（達）について』

のテーマを扱っています。上記のテーマのもとで、lemniscate 関数の特質を抽出するという事をしてきているのですが、三角関数に対して、同様のスタイルで三角関数の特質を抽出するという事をするためには、

『三角関数と $\mathbb{Z}$ 上の奇数に依って定義される多項式（達）について』

というテーマを設定し、色々調べていくことに成ります。勿論、似て非なる特質を保持していますので（数学の専門家達の間での認識はどうかは知らないが、少なくとも筆者はこのように強く感じている。）、三角関数の $\sin nu/\sin u$ に依って定義される $w=\sin^2 u$ の多項式 $P_{s,n}(w)$ に対して n を奇素数ととる事により同様の合同関係式が出現します。この報告論文の p3 の (1.2) が現物です。この三角関数の場合の合同関係式の証明も込めた話は [3] や、[55] にあります。これらを紹介しておきます。

この報告論文の中で、『三角関数と $\mathbb{Z}$ 上の奇数に依って定義される多項式（達）について』の事も書くと書いたが、期限が在る事もあり、さすがに、それらを整理しまとめる時間がないので（時間が無くなってしまい、書き記す物の選別に入らざる得なくなりました。)、この内容に関しては、タイトルとは異なるので切り捨てます。筆者は、このテーマで、[55, 56, 57, 58, 59] の中から、三角関数に相当する部分の物を整理しまとめるつもりではいました。また、筆者の感覚でですが、上記のテーマではないが、別角度から、改めて再編成をし、まとめたもの、つまり、『三角関数と $\mathbb{Z}$ 上の奇数に依って定義される多項式（達）について』と似て非なる世界の話として、宮川幸隆氏の『双曲多項式の諸性質』[4] を紹介しておきます。尚、宮川幸隆氏により、本講演の最終講演として内容の一部の詳細がなされました。なので、興味を持たれた方は、多分、同じ『津田塾大学　第２４回数学史シンポジウム』の宮川幸隆氏の記事も読まれる事を勧めます。ちなみに、筆者は宮川幸隆氏の『双曲多項式の諸性質』[4] を手に取りながら拝聴していました。

最後に、『Eisenstein の合同関係式のメカニズム』実質的にはその証明の中で、突然『今は $B_0 = 1$ を認めます。(p37)』と出て来ました。この事実は、既知と言えば、既知なのですが、(この報告論文の命題 1.15 の事)、実際に係数の対称的な関係 (Ep 10), (Ep 11) に相当するものは具体例からも感知できます。これに、相当する性質とは何なのか？というと、定義 5.3 の有理関数 $R_{s,m}(w)$ に対して

$$R_{s,m}(w)R_{s,m}\left(\frac{1}{w}\right) = 1. \tag{P2}$$

という関数等式が成立するという事の現れに成ります。次の章では、この有理関数の関数等式達についてのお話をしたいと思います。

6. 有理関数の関数等式達について

6.1. ある目的…. 筆者がかつてまとめて発表した [55, Theorem 2.3] において、この報告論文の定義 4.1 の $R_{s,m}(x)$ と $R_{c,m}(x)$ に対して、以下の関数等式を得ました。

$$R_{s,m}\Big(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\Big)=R_{c,m}(x).$$

また、同時に論文の中の [55, Theorem 5.4] において、同様の関数等式が三角関数の場合にも存在することを明らかにし、対称性（関数等式）という類似の性質があることを指摘しました [55]。以上の内容の話は、こちらの『第１５回数学史シンポジウム』[57, p58–p60] にもあります。そして、[57, p60、問題 3.7] として、

『得られた定理 3.6 の対称性を表す関数等式 (3.4.1),(3.4.2) に対してこれら、現れている対称性を**統合**しているようなものの存在を明らかに出来ないか？』

として、問題を設定しました。問題の設定に至るまでの経緯は『第１５回数学史シンポジウム』[57, p58–p60] やこの報告論文の第 1 章に譲ります。この章では、かつて自身が設定した上記問題に対する 1 つの答えを提示したいと思います。

実は、単に三角関数と lemniscate 関数の双方に対称性（関数等式）という類似の性質があることを指摘するだけならば、この報告論文の定義 4.1 による記述（具体的には上記で述べた関数等式）で充分です。しかし、『現れている対称性を**統合**しているようなものの存在を明らかに出来ないか？』となると、定義 4.1 は相応しくありません。そこで、系 3.8 に基づいて以下のように再定義します。（前章の定義 5.3 です。）

定義 6.1. (前章の定義 5.3) $m\in\mathbb{P}$ である m に対して、4 つの有理関数 $R_{s,m}(w)$, $R_{c,m}(w)$, $R_{f,m}(w)$ そして $R_{F,m}(w)$ を、$w:=\mathrm{sl}^2(u)$ として、以下の等式を満たすものとして定義します：

$$R_{s,m}(\mathrm{sl}^2(u)):=\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)},\qquad R_{c,m}(\mathrm{sl}^2(u)):=\frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)},$$
$$R_{f,m}(\mathrm{sl}^2(u)):=\frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)},\qquad R_{F,m}(\mathrm{sl}^2(u)):=\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}.$$

上記、定義 6.1 をベースに、たくさんの有理関数の関数等式達を列挙したいと思います。

6.2. 有理関数の関数等式達と、それを得るための手法. 以下の命題は、[55, Theorem 2.3] の定義 6.1 をベースにした書き換えです。

命題 6.2. [55, Theorem 2.3] $m\in\mathbb{P}$ である m をとる。このとき、以下を得るに至ります。

$$R_{s,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big)=R_{c,m}(w),\qquad R_{c,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big)=R_{s,m}(w).$$

Proof. これは [55, Theorem 2.3] の証明を、定義 6.1 に合わせて書き換えただけです。$w=\mathrm{sl}^2(u)$ より lemniscate 関数の関係式から直ちに以下を得ます。

$$\mathrm{cl}^2(u)=\frac{1-\mathrm{sl}^2(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)}=\frac{1-w}{1+w}.$$

このようにして、$m \in \mathbb{P}$ である m に対して、定義 6.1、及び、補題 2.2 を用いて以下の関係式を得ます:

$$R_{s,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = R_{s,m}\Big(\frac{1-\mathrm{sl}^2(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)}\Big) = R_{s,m}(\mathrm{cl}^2(u))$$
$$= R_{s,m}\Big(\mathrm{sl}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big) = \frac{\mathrm{sl}\Big(m\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big)}{\mathrm{sl}\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)} = \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)} = R_{c,m}(w).$$

•

同様の計算を適応させて

$$R_{c,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = R_{c,m}\Big(\frac{1-\mathrm{sl}^2(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)}\Big) = R_{c,m}(\mathrm{cl}^2(u))$$
$$= R_{c,m}\Big(\mathrm{sl}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big) = \frac{\mathrm{cl}\Big(m\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big)}{\mathrm{cl}\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)} = \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} = R_{s,m}(w).$$

□

定義 6.1 の有理関数 $R_{f,m}(w)$ と $R_{F,m}(w)$ に対しても、以下のような、同様の関数等式を得る事が出来ます:

命題 6.3. $m \in \mathbb{P}$ である m をとります。このとき、以下を得るに至ります。

$$R_{f,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = \frac{R_{s,m}(w)}{R_{F,m}(w)}, \qquad R_{F,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = \frac{1}{R_{F,m}(w)} = \frac{1}{R_{f,m}(-w)}.$$

Proof. 直前の命題 6.2 の証明方法を適応させ、定義 6.1、及び、補題 2.2 を用いて以下の関係式を得ます:

$$R_{f,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = R_{f,m}\Big(\frac{1-\mathrm{sl}^2(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)}\Big) = R_{f,m}(\mathrm{cl}^2(u))$$
$$= R_{f,m}\Big(\mathrm{sl}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big) = \frac{\mathrm{fl}\Big(m\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big)}{\mathrm{fl}\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}^2\Big(m\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big)}}{\sqrt{1-\mathrm{sl}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)}}$$
$$= \frac{\sqrt{1-\mathrm{cl}^2(mu)}}{\sqrt{1-\mathrm{cl}^2(u)}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{1-\mathrm{sl}^2(mu)}{1+\mathrm{sl}^2(mu)}}}{\sqrt{1-\dfrac{1-\mathrm{sl}^2(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)}}} = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sl}(mu)}{\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(mu)}}\frac{\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(u)}}{\sqrt{2}\,\mathrm{sl}(u)}$$
$$= \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(u)}{\mathrm{Fl}(mu)} = \frac{R_{s,m}(w)}{R_{F,m}(w)},$$

$$R_{F,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big)=R_{F,m}\Big(\frac{1-\mathrm{sl}^2(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)}\Big)=R_{F,m}(\mathrm{cl}^2(u))$$
$$=R_{F,m}\Big(\mathrm{sl}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big)=\frac{\mathrm{Fl}\Big(m\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big)}{\mathrm{Fl}\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)}=\frac{\sqrt{1+\mathrm{sl}^2\Big(m\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)\Big)}}{\sqrt{1+\mathrm{sl}^2\Big(\frac{\omega}{2}-u\Big)}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+\mathrm{cl}^2(mu)}}{\sqrt{1+\mathrm{cl}^2(u)}}=\frac{\sqrt{1+\dfrac{1-\mathrm{sl}^2(mu)}{1+\mathrm{sl}^2(mu)}}}{\sqrt{1+\dfrac{1-\mathrm{sl}^2(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(mu)}}\frac{\sqrt{1+\mathrm{sl}^2(u)}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\mathrm{Fl}(u)}{\mathrm{Fl}(mu)}=\frac{1}{R_{F,m}(w)},$$
$$R_{f,m}(-w)=R_{f,m}(-\mathrm{sl}^2(u))=R_{f,m}(\mathrm{sl}^2(iu))=\frac{\mathrm{fl}(imu)}{\mathrm{fl}(iu)}=\frac{\mathrm{Fl}(mu)}{\mathrm{Fl}(u)}=R_{F,m}(w).$$

□

4つの有理関数 $R_{s,m}(w), R_{c,m}(w), R_{f,m}(w), R_{F,m}(w)$ とある1つの変換
$$\frac{1-w}{1+w},$$
に対して、命題 6.2、命題 6.3 において、4つの関数等式を得るに至りました。

また、別のある1つの変換
$$\frac{1+w}{1-w},$$
に対しても、命題 6.2、命題 6.3 における、4つの関数等式を用いる事により以下のような、同様の関数等式を得る事が出来ます。

命題 6.4. $m\in\mathbb{P}$ である m をとります。このとき、以下を得るに至ります。
$$R_{s,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big)=\frac{1}{R_{c,m}(w)},\qquad R_{c,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big)=R_{s,m}(w),$$
$$R_{f,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big)=\frac{R_{s,m}(w)}{R_{F,m}(-w)},\qquad R_{F,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big)=\frac{1}{R_{f,m}(w)}.$$

Proof. 有理関数 $R_{s,m}(w)$ に対して、命題 6.2 から以下を得ます。

(*1) $$R_{s,m}(\mathrm{cl}^2(u))=R_{s,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big)=R_{c,m}(w)=\frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)}.$$

上記の関係式 (*1) を用いて、以下の関係式を得ます。
$$R_{s,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big)=R_{s,m}\Big(\frac{1+\mathrm{sl}^2(u)}{1-\mathrm{sl}^2(u)}\Big)=R_{s,m}\Big(\frac{1}{\mathrm{cl}^2(u)}\Big)=R_{s,m}(\mathrm{cl}^2(iu))$$
$$\overset{(*1)}{=}\frac{\mathrm{cl}(imu)}{\mathrm{cl}(iu)}=\frac{\mathrm{cl}(u)}{\mathrm{cl}(mu)}=\frac{1}{R_{c,m}(w)}.$$

他の関数等式達も、同様の手法で得る事が出来ます。

有理関数 $R_{c,m}(w)$ に対して、命題 6.2 から以下を得ます。

$$R_{c,m}(\mathrm{cl}^2(u)) = R_{c,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = R_{s,m}(w) = \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}. \tag{*2}$$

上記の関係式 (*2) を用いて、以下の関係式を得ます。

$$\begin{aligned} R_{c,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big) &= R_{c,m}\Big(\frac{1+\mathrm{sl}^2(u)}{1-\mathrm{sl}^2(u)}\Big) = R_{c,m}\Big(\frac{1}{\mathrm{cl}^2(u)}\Big) = R_{c,m}(\mathrm{cl}^2(iu)) \\ &\overset{(*2)}{=} \frac{\mathrm{sl}(imu)}{\mathrm{sl}(iu)} = \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} = R_{s,m}(w). \end{aligned}$$

有理関数 $R_{f,m}(w)$ に対して、命題 6.3 から以下を得ます。

$$R_{f,m}(\mathrm{cl}^2(u)) = R_{f,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = \frac{R_{s,m}(w)}{R_{F,m}(w)} = \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}\frac{\mathrm{Fl}(u)}{\mathrm{Fl}(mu)}. \tag{*3}$$

上記の関係式 (*3) を用いて、以下の関係式を得ます。

$$\begin{aligned} R_{f,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big) &= R_{f,m}\Big(\frac{1+\mathrm{sl}^2(u)}{1-\mathrm{sl}^2(u)}\Big) = R_{f,m}\Big(\frac{1}{\mathrm{cl}^2(u)}\Big) = R_{f,m}(\mathrm{cl}^2(iu)) \\ &\overset{(*3)}{=} \frac{\mathrm{sl}(imu)}{\mathrm{sl}(iu)}\frac{\mathrm{Fl}(iu)}{\mathrm{Fl}(imu)} = \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}\frac{\mathrm{fl}(u)}{\mathrm{fl}(mu)} = \frac{R_{s,m}(w)}{R_{f,m}(w)}. \end{aligned}$$

以下のような、関係式も直ちに得られます。

$$R_{F,m}(-w) = R_{F,m}(-\mathrm{sl}^2(u)) = R_{F,m}(\mathrm{sl}^2(iu)) = \frac{\mathrm{Fl}(imu)}{\mathrm{Fl}(iu)} = \frac{\mathrm{fl}(mu)}{\mathrm{fl}(u)} = R_{f,m}(w).$$

有理関数 $R_{F,m}(w)$ に対して、命題 6.3 から以下を得ます。

$$R_{F,m}(\mathrm{cl}^2(u)) = R_{F,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = \frac{1}{R_{F,m}(w)} = \frac{\mathrm{Fl}(u)}{\mathrm{Fl}(mu)}. \tag{*4}$$

上記の関係式 (*4) を用いて、以下の関係式を得ます。

$$\begin{aligned} R_{F,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big) &= R_{F,m}\Big(\frac{1+\mathrm{sl}^2(u)}{1-\mathrm{sl}^2(u)}\Big) = R_{F,m}\Big(\frac{1}{\mathrm{cl}^2(u)}\Big) = R_{F,m}(\mathrm{cl}^2(iu)) \\ &\overset{(*4)}{=} \frac{\mathrm{Fl}(iu)}{\mathrm{Fl}(imu)} = \frac{\mathrm{fl}(u)}{\mathrm{fl}(mu)} = \frac{1}{R_{f,m}(w)}. \end{aligned}$$

□

命題 6.3、命題 6.4 の証明の中で、$R_{f,m}(-w)$ と $R_{F,m}(-w)$ の関数等式を得ています。同様にして、$R_{s,m}(-w)$ と $R_{c,m}(-w)$ の関数等式もまた得ることができます。これら、4 つの関数等式を以下に整理します。

命題 6.5. $m \in \mathbb{P}$ である m をとります。このとき、以下を得るに至ります。

$$R_{s,m}(-w) = R_{s,m}(w), \qquad R_{c,m}(-w) = \frac{1}{R_{c,m}(w)},$$
$$R_{f,m}(-w) = R_{F,m}(w), \qquad R_{F,m}(-w) = R_{f,m}(w).$$

関数等式を得るための手法はいくつかあります。実際に、補題 2.2 を用いて命題 6.2、命題 6.3 を得ました。そして、得た関数等式、命題 6.2、命題 6.3 を用いて、命題 6.4 を得ました。命題 6.4 は補題 2.2 からも改めて得る事が出来ます。例えば、

$$R_{s,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big) = R_{s,m}\Big(\frac{1+\mathrm{sl}^2(u)}{1-\mathrm{sl}^2(u)}\Big) = R_{s,m}(\frac{1}{\mathrm{cl}^2(u)}) = R_{s,m}(\mathrm{cl}^2(iu))$$

$$= R_{s,m}\Big(\mathrm{sl}^2\Big(\frac{\omega}{2} - iu\Big)\Big) = \frac{\mathrm{sl}\Big(m\Big(\frac{\omega}{2} - iu\Big)\Big)}{\mathrm{sl}\Big(\frac{\omega}{2} - iu\Big)} = \frac{\mathrm{cl}(u)}{\mathrm{cl}(mu)} = \frac{1}{R_{c,m}(w)}.$$

また、得られた複数の関数等式を、合体させて別の関数等式を得る事も出来ます。例えば、命題 6.2 と命題 6.4 から、以下の関数等式が既知です。

$$R_{c,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = R_{s,m}(w) \qquad \text{そして} \qquad R_{c,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big) = R_{s,m}(w).$$

なので、直ちに

$$R_{c,m}\Big(\frac{1-w}{1+w}\Big) = R_{c,m}\Big(\frac{1+w}{1-w}\Big).$$

この上記関係式の w の処に改めて $(1-w)/(1+w)$ を代入して以下の関数等式を得る事が出来ます。

$$\text{(P1)} \qquad R_{c,m}(w) = R_{c,m}\Big(\frac{1}{w}\Big).$$

命題 6.2 と命題 6.4 の $R_{s,m}(w)$ の関数等式 2 つから、上記の方法と同じようにして以下の関数等式を得る事が出来ます。

$$\text{(P2)} \qquad R_{s,m}(w)R_{s,m}\Big(\frac{1}{w}\Big) = 1.$$

以上、紹介した手法によって、改めて有理関数の関数等式達を得る事が出来ます。

補足 6.6. 論文 [55] *(Proposition 1.2 in Section 1)* により、以下の事は既知です。

$$\frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)} = \frac{K_m(x^2)}{K_m(-x^2)} = \frac{K_m(w)}{K_m(-w)}, \qquad \text{ここでは} \quad x := \mathrm{sl}(u),\ w := \mathrm{sl}^2(u),$$

そして、$K_m(X)$ が相反多項式に成ります。$K_m(X)$ が相反多項式に成っていることは具体例 [56, Chapter 3]、[58] からも感知されます。関数等式 *(P1)* はこの事実を表しています。

補足 6.7. 命題 *1.15 (* [14, Proposition 8.2]*)* から*,* 以下の事は既知です。

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} = \frac{W_m(x^4)}{V_m(x^4)}, \quad \text{そして} \quad W_m(x^4) = x^{N-1}V_m(x^{-4}).$$

関数等式 *(P2)* は、この事実を表しています。さらに、この章で得たいくつかの関係式 *(*関数等式*)* を用いて $\mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ の積表示を以下のようにして得る事が出来ます。関数等式 $R_{s,m}(-w) = R_{s,m}(w)$ *(*$w := \mathrm{sl}^2(u)$*)* から、

$$\text{(H1)} \qquad \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} \in \mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}^4(u)),$$

が主張されます。ここでは $\mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}(u)^4)$ は $\mathbb{Q}(i)$ 上における $\mathrm{sl}(u)^4$ の有理関数体を意味します。

そして、改めて u の楕円関数として $\phi(u) := \mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ を取ります。このとき、楕円関数 $\phi(u)$ は以下の関係式を満たします。

$$\phi(u) = \phi(iu) = \phi(-u) = \phi(-iu). \tag{e1}$$

また、楕円関数 $\phi(u)$ は以下の零点を持ちます。

$$u = \frac{2\omega r_j}{m}, \quad (j = 1, 2, \cdots, N_m - 1) \tag{e2}$$

ここでは、r_j は *primary* 数 m の剰余系です。*($N_m = a^2 + b^2, m = a + ib, (a, b \in \mathbb{Z}), m \in \mathbb{P}$).* この剰余系 r_j を *primary* 数 m の *1/4* の剰余系に切り替えて *($j = 1, 2, \cdots, (N_m - 1)/4$),* 楕円関数 $\phi(u)$ に対して, *(H1), (e1), (e2), (P2)* を用いる事によって, 以下を得ます。

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} = C\, \Pi_{k=1}^{\frac{N_m-1}{4}} \frac{\left(\mathrm{sl}(u)^4 - \mathrm{sl}(\frac{2\omega r_j}{m})^4\right)}{\left(1 - \mathrm{sl}(u)^4 \mathrm{sl}(\frac{2\omega r_j}{m})^4\right)}. \tag{H2}$$

この上記関係式に、u の楕円関数と見て $u = \omega/2$ を代入することによって $C = 1$ を得ます。$C = 1$ を得て、積表示を、それぞれ分母、分子、展開したものを考える事によって *(*関数等式 *(P2)* を踏まえて*)*、$B_0 = 1$ を含むこの報告論文の *p37* の *(Ep11)* が得られます。

N.H. Abel は *(H1)* を [17] の中で認識していました。また、積表示 *(H2)* を用いて, *F.G.M. Eisenstein* は 4 次剰余相互法則の証明を与えています。これは [1] の中の話です。.

6.3. 関数等式を与える変換達に対する考察. 直前の subsection において、以下の 3 つの変換に対して

$$\frac{1-w}{1+w}, \quad \frac{1+w}{1-w}, \quad -w,$$

4 つの有理関数 $R_{s,m}(w), R_{c,m}(w), R_{f,m}(w)$, $R_{F,m}(w)$ の関数等式を明らかにしました。全部で 1 2 本 (個？) の関数等式を提示しました。系 3.8 を基に $\mathbb{Q}(i)$ 上の、$m \in \mathbb{Z}[i]$ である primary 数 m と lemniscate 関数に依って定義される $\mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数を考察しているのですが、関数等式がどれだけ出力されてくるのか？「とにかく、思いついた物は計算して出してみよう！」というスタンスで計算したのが直前の subsection での話です。ここでは、今一度、関数等式を得る手法と、関数等式の持つ意味の両方の面から考察をしてみます。すると、命題 6.2、命題 6.3 が意味しているものの 1 つとして、$w := \mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数 $R_{s,m}(w), R_{c,m}(w), R_{f,m}(w)$, $R_{F,m}(w)$ が $\mathrm{cl}^2(u)$ の有理関数としても、認識が出来ることが挙げられます。同様に考えると命題 6.4 が意味しているものの 1 つとして、$w := \mathrm{sl}^2(u)$ の有理関数 $R_{s,m}(w), R_{c,m}(w), R_{f,m}(w)$, $R_{F,m}(w)$ が $1/\mathrm{cl}^2(u)$ の有理関数としても、認識が出来ることが挙げられます。このような情勢を踏まえて、今一度 lemniscate 関数の $\mathrm{sl}(u)$ と $\mathrm{cl}(u)$ の関係式について整理したいと思います。そもそも、関係式は既知なので (この報告論文 p17)、それぞれの視点、$\mathrm{sl}(u)$ の立場、及び、$\mathrm{cl}(u)$ の立場で整理すると

$$\mathrm{cl}^2(u) = \frac{1-\mathrm{sl}^2(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)}, \qquad \mathrm{sl}^2(u) = \frac{1-\mathrm{cl}^2(u)}{1+\mathrm{cl}^2(u)}.$$

(互いに、一方を書き換える事により他方になる)

となります。この上記関係式を踏まえて、直前の subsection に対してした関数等式を得るための手法を適応させる事により、以下の８タイプの有理関数を考える事が可能に成ります:

$$\mathrm{sl}^2(u),\quad -\mathrm{sl}^2(u),\quad \frac{1}{\mathrm{sl}^2(u)},\quad -\frac{1}{\mathrm{sl}^2(u)},\quad \mathrm{cl}^2(u),\quad -\mathrm{cl}^2(u),\quad \frac{1}{\mathrm{cl}^2(u)},\quad -\frac{1}{\mathrm{cl}^2(u)}.$$

これを $w := \mathrm{sl}^2(u)$ を踏まえて書き換えると、以下のような変換達になります:

$$w,\quad -w,\quad \frac{1}{w},\quad -\frac{1}{w},\quad \frac{1-w}{1+w},\quad \frac{w-1}{1+w},\quad \frac{1+w}{1-w},\quad \frac{1+w}{w-1}.$$

この８つの変換に対して４つの有理関数 $R_{s,m}(w), R_{c,m}(w), R_{f,m}(w)$, $R_{F,m}(w)$ は関数等式を保持します。

さらに付け加えると、ここに、ある１つの有限群を認識します。上記８つの変換を１次分数変換とみなし、その合成変換で算法（積）を定義すると、確かに１つの有限群を認識します。これを G_l と置きます。算法表をそれぞれ考える事により

$$G_l \cong D_4,$$

が解ります。ここで D_4 は２面体群 D_n の１つです。($|D_n| = 2n$) ここまで、述べた内容を以下にまとめます。

定理 6.8. *G_l を、以下の８つの１次分数変換とその合成変換によって算法が定義される有限群とします:*

$$G_l := \left\{w,\quad -w,\quad \frac{1}{w},\quad -\frac{1}{w},\quad \frac{1-w}{1+w},\quad \frac{w-1}{1+w}.\quad \frac{1+w}{1-w},\quad \frac{1+w}{w-1}\right\};$$

ここで $T_1(w), T_2(w) \in G_l$ に対して、算法を以下のように決めます。

$$T_1T_2(w) := T_1(T_2(w));$$

算法表をつくり比較することにより、以下を得ます。

$$G_l \cong D_4,$$

ここで D_4 は２面体群 D_n の１つです。

８つの変換 $T(w) \in G_l$ に対して、４つの有理関数 $R_{s,m}(w), R_{c,m}(w), R_{f,m}(w)$, $R_{F,m}(w)$ は関数等式を保持します。それらを一覧表として整理します。*(ここに命題 6.2、命題 6.3、命題 6.4、命題 6.5 は含まれています):*

*	w	$-w$	$\frac{1}{w}$	$-\frac{1}{w}$
$R_{s,m}$	$R_{c,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)$	$R_{c,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)$	$\frac{1}{R_{c,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)}$	$\frac{1}{R_{c,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)}$
$R_{c,m}$	$R_{s,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)$	$\frac{1}{R_{s,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)}$	$R_{s,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)$	$\frac{1}{R_{s,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)}$
$R_{f,m}$	$\frac{1}{R_{F,m}\left(\frac{1+w}{1-w}\right)}$	$\frac{1}{R_{F,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)}$	$\frac{1}{R_{F,m}\left(\frac{1+w}{w-1}\right)}$	$\frac{1}{R_{F,m}\left(\frac{w-1}{1+w}\right)}$
$R_{F,m}$	$\frac{1}{R_{f,m}\left(\frac{w-1}{1+w}\right)}$	$\frac{1}{R_{f,m}\left(\frac{1+w}{w-1}\right)}$	$\frac{1}{R_{f,m}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)}$	$\frac{1}{R_{f,m}\left(\frac{1+w}{1-w}\right)}$

TABLE 1. 関数等式の計算結果 (1)

*	$\frac{1-w}{1+w}$	$\frac{w-1}{1+w}$	$\frac{1+w}{1-w}$	$\frac{1+w}{w-1}$
$R_{s,m}$	$R_{c,m}(w)$	$R_{c,m}(w)$	$\frac{1}{R_{c,m}(w)}$	$\frac{1}{R_{c,m}(w)}$
$R_{c,m}$	$R_{s,m}(w)$	$\frac{1}{R_{s,m}(w)}$	$R_{s,m}(w)$	$\frac{1}{R_{s,m}(w)}$
$R_{f,m}$	$\frac{R_{s,m}(w)}{R_{F,m}(w)}$	$\frac{1}{R_{F,m}(w)}$	$\frac{R_{s,m}(w)}{R_{F,m}(-w)}$	$\frac{1}{R_{F,m}(-w)}$
$R_{F,m}$	$\frac{1}{R_{f,m}(-w)}$	$\frac{R_{s,m}(w)}{R_{f,m}(-w)}$	$\frac{1}{R_{f,m}(w)}$	$\frac{R_{s,m}(w)}{R_{f,m}(w)}$

TABLE 2. 関数等式の計算結果 (2)

6.4. 三角関数の場合における関数等式達について.

「lemniscate 関数に対してやってきたことを、三角関数に対してもするとどうか?」

普通は、逆で、

「三角関数に対してやってきたことを、lemniscate 関数に対してもするとどうか?」

が正しい研究の道のりのはずである。**関数等式**に関しては、逆転し、lemniscate 関数に対してまずは色々調べてみた。それは、既に、具体例から示唆されていたからです。そもそも、三角関数の場合は具体例からは、対称性 (関数等式) があるとは、思えない。少なくとも筆者は対称性を感じられなかった。lemniscate 関数に対してやってきたことを、関数等式をガチャガチャ色々思いつく限りいじっていたら定理 6.8 なる事実に辿り着いた。そこに、有限群が出現するとは思わなかった。しかも、その有限群が 2 面体群と同型である。

同様の事を、三角関数に対してしたら何が見えるか?

これが、この subsection で為されることです。結論を言うと、三角関数の場合にも定理 6.8 と同様の対称性とある有限群との関連が明らかになりました。改めて、似て非なる性質を得るに至りました。それらを数学として述べるために以下を準備します。

補題 6.9. 定数 m を $\mathbb{Z}$ 上の奇数とします。このとき

$$\frac{\tan mu}{\tan u} \in \mathbb{Q}(\tan^2 u),$$

が得られます。ここで、$\mathbb{Q}(\tan^2 u)$ は $\mathbb{Q}$ 上における $\tan^2 u$ の有理関数体を意味します。

Proof. 関数 T_m を以下のように定義します

$$T_m = T_m(u) :\doteq \frac{\tan mu}{\tan u}.$$

三角関数の加法定理による計算により以下を得ます。

$$\begin{aligned}
T_m = \frac{\tan mu}{\tan u} &= \frac{\tan(m-2+2)u}{\tan u} = \frac{1}{\tan u}\left(\frac{\tan(m-2)u + \tan 2u}{1 - \tan(m-2)u \tan 2u}\right) \\
&= \frac{1}{\tan u}\,\frac{\tan(m-2)u + \dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u}}{1 - \tan(m-2)u\,\dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u}} \\
&= \frac{1}{\tan u}\,\frac{(1-\tan^2 u)\tan(m-2)u + 2\tan u}{1 - \tan^2 u - 2\tan(m-2)u\tan u} \\
&= \frac{(1-\tan^2 u)\left(\dfrac{\tan(m-2)u}{\tan u}\right) + 2}{1 - \tan^2 u - 2\left(\dfrac{\tan(m-2)u}{\tan u}\right)\tan^2 u} \\
&= \frac{(1-\tan^2 u)\,T_{m-2} + 2}{1 - \tan^2 u - 2\tan^2 u\,T_{m-2}}.
\end{aligned}$$

上記計算結果により、以下の漸化式を得ました。

$$T_m = \frac{(1-\tan^2 u)\,T_{m-2} + 2}{1 - \tan^2 u - 2\tan^2 u\,T_{m-2}}.$$

T_1 と T_3 の計算結果は以下のようになります:

$$T_1 = 1, \qquad T_3 = \frac{3 - \tan^2 u}{1 - 3\tan^2 u}.$$

帰納法により、漸化式を用いて補題が得られます。 □

上記、補題 6.9 と [55, Section 5] を基にして、3 つの $w = \sin^2 u$ の関数 $P_{s,m}(w), P_{c,m}(w)$, $R_{t,m}(w/(w-1))$ を考えてみるのです。

定義 6.10. (cf. [55, Definition 5.6].) 奇数 m($\mathbb{Z}$ 上の) に対して、$P_{s,m}(w)$, $P_{c,m}(w)$, $R_{t,m}(w/(w-1))$ を以下の関係式を満たすものとして定義します:

$$P_{s,m}(w) := \frac{\sin mu}{\sin u}, \qquad P_{c,m}(w) := \frac{\cos mu}{\cos u},$$
$$R_{t,m}(-\tan^2 u) = R_{t,m}\Big(\frac{w}{w-1}\Big) := \frac{\tan mu}{\tan u}, \qquad \text{ここでは} \quad w := \sin^2 u.$$

三角関数の場合には以下の 3 つの関係式があります:

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1, \qquad 1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}, \qquad 1 + \frac{1}{\tan^2 u} = \frac{1}{\sin^2 u}.$$

[55, Theorem 5.7] から、上記、定義 6.10 に合わせてそれを書き換える事によって、以下の関数等式が得られます。

(c1) $$P_{s,m}(1-w) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} P_{c,m}(w).$$

また、定義 6.10 に含まれる事ですが、

(c2) $$R_{t,m}\Big(\frac{w}{w-1}\Big) = \frac{P_{s,m}(w)}{P_{c,m}(w)}$$

という関係式も保持しています。奇数 m に対して $\tan mu/\tan u$ が $\tan^2 u$ の有理関数としての認識を可能にしているのは、先の補題 6.9 ですが、同様にして、奇数 m に対して $\sin mu/\sin u$ や $\cos mu/\cos u$ が $\sin^2 u$ の多項式であることが解ります ([58, p353])。そして、関数等式 (c1) から $\cos^2 u$ の多項式としての認識が可能であること、関数等式 (c2) から、$\tan^2 u$ の有理関数としての意義が見いだせる事が解ります。この 2 つの関数等式 (c1), (c2) と先に述べた三角関数の 3 つの関係式を基に、考えられる関数等式達を lemniscate 関数のときと同じようにして掘り出していきます。すると、関数等式を与える変換が以下の 6 つの変換により与える物が本質であることが解ります:

$$w, \qquad \frac{1}{w}, \qquad 1-w, \qquad \frac{w-1}{w}, \qquad \frac{w}{w-1}, \qquad \frac{1}{1-w}.$$

この上記 6 つの変換に対して、lemniscate 関数のときと同様の手法により、$P_{s,m}(w), P_{c,m}(w)$, $R_{t,m}(w/(w-1))$ の関数等式を得ることが出来ます。

さらに付け加えると、ここに、ある 1 つの有限群を認識します。上記 6 つの変換を 1 次分数変換とみなし、その合成変換で算法 (積) を定義すると、確かに 1 つの有限群を認識します。これを G_c と置きます。算法表をそれぞれ考える事により

$$G_c \cong D_3,$$

が解ります。(ここで D_3 は２面体群 D_n の１つです。($|D_n| = 2n$)) また、この事から直ぐに

$$G_c \cong S_3 \cong D_3,$$

が得られます。(ここで S_n は対称群を表します) ここまで、述べた内容を以下にまとめます。

定理 6.11. *G_c を、以下の６つの１次分数変換とその合成変換によって算法が定義される有限群とします:*

$$G_c := \left\{w, \quad \frac{1}{w}, \quad 1-w, \quad \frac{w-1}{w}, \quad \frac{w}{w-1}, \quad \frac{1}{1-w}\right\};$$

ここで $T_1(w), T_2(w) \in G_c$ に対して、算法を以下のように決めます。

$$T_1T_2(w) := T_1(T_2(w));$$

算法表をつくり比較することにより、以下を得ます。

$$G_c \cong S_3 \cong D_3,$$

ここで S_3 は対称群 S_n の１つです。また D_3 は２面体群 D_n の１つです。

６つの変換 $T(w) \in G_c$ に対して、$P_{s,m}(w), P_{c,m}(w)$, $R_{t,m}(w/(w-1))$ は関数等式を保持します。(以下の表においては $m = 4n+1, n \subsetneq \mathbb{N}$ の場合の計算結果になります):

$*$	w	$\frac{1}{w}$	$1-w$	$\frac{w-1}{w}$	$\frac{w}{w-1}$	$\frac{1}{1-w}$
$P_{s,m}$	$P_{c,m}(1-w)$	$P_{c,m}\left(\frac{w-1}{w}\right)$	$P_{c,m}(w)$	$P_{c,m}\left(\frac{1}{w}\right)$	$P_{c,m}\left(\frac{1}{1-w}\right)$	$P_{c,m}\left(\frac{w}{w-1}\right)$
$P_{c,m}$	$P_{s,m}(1-w)$	$P_{s,m}\left(\frac{w-1}{w}\right)$	$P_{s,m}(w)$	$P_{s,m}\left(\frac{1}{w}\right)$	$P_{s,m}\left(\frac{1}{1-w}\right)$	$P_{s,m}\left(\frac{w}{w-1}\right)$
$R_{t,m}$	$\frac{1}{R_{t,m}\left(\frac{1}{w}\right)}$	$\frac{1}{R_{t,m}(w)}$	$\frac{1}{R_{t,m}\left(\frac{1}{1-w}\right)}$	$\frac{1}{R_{t,m}\left(\frac{w}{w-1}\right)}$	$\frac{1}{R_{t,m}\left(\frac{w-1}{w}\right)}$	$\frac{1}{R_{t,m}(1-w)}$

TABLE 3. 関数等式の計算結果 (3)〜三角関数の場合〜

6.5. この章を書き終えるに当たり…. まずは、この章の目的に対して１つの回答（解答？）を与えたいと思います。

『第１５回数学史シンポジウム』[57, p60、問題 3.7] として、

> 『得られた定理 3.6 の対称性を表す関数等式 (3.4.1),(3.4.2) に対してこれら、現れている対称性を**統合**しているようなものの存在を明らかに出来ないか？』

として、問題を設定しました。これに対する、筆者が得た解答は

> 定理 6.8(lemniscate 関数の場合の関数等式達) と定理 6.11(三角関数の場合の関数等式達) を比較します。双方の場合の関数等式を与える変換が特定され、さらに、その変換の合成によって有限群が出現し、その有限群が２面体群 D_n と同型である事が判明しました。(lemniscate 関数の場合は D_4 、三角関数の場合は D_3) 対称性を**統合**しているようなものの存在として２面体群 D_n が出現しました。

になります。改めて、似て非なる性質としての対称性（関数等式）に対して、その深化を与える事が出来ました。筆者が得た学問的前進の１つです。しかし、当時を振り返り、関数等式がいくらでも出現するような感覚の中で、「…とにかく思いついたものは計算！」ほとんど、暗中模索に近い状況だったのを思い出します。キリが無いので、自身が実際に実行していることの分析をしたら、lemniscate 関数の場合に、８個の変換を調べれば十分であることが解りました。しかし、それが有限群を構成するとは予想はしていませんでした。合成変換を試しに計算したら…がキッカケだったと思います。lemniscate 関数の場合の話が先に出来上がり、三角関数の場合には、既に見当はついていました。ただ、ちゃんと数学としての体裁を整えるのに苦労をした記憶があります。

次に、この章を書いた理由を述べたいと思います。理由は２つあります。

１つは、三宅克哉氏 [32] の質問に回答のため、また、内容を読者に伝えるためにです。筆者の講演の終了の後に、座長を務めた三宅克哉氏 [32] に

『その有理関数の零点はどうなっているのですか？』

という質問をされ

『…零点ですか…(中略) 零点に関しては高木貞治先生の学位論文で尽きていると思います [23]。粗い意味での考察はしているのですが…(後略)』

と、筆者は回答をしました。実は、研究の対象の有理関数は、零点と極で対称性の在ることがその具体例からも感知される事です。その有理関数の持つ零点と極の対称性を、関数の特質から明示できないのか？という着眼で調べてはいました。言い換えると、『零点と極の対称性を一目で解らせる関数等式を求める事』に成ります。関数の特質を調べるという意味で、『粗い意味での考察』という言葉を使い、実際にこの報告論文の p45 の関数等式 (P1)(P2) を紹介しました。補足 6.6、補足 6.7 はさらにその詳細になります。

２つ目は、この関数等式 (P2)、及び、補足 6.7 に関してですが、前章の『Eisenstein の合同関係式のメカニズム』の補足のためにどうしても、関数等式 (P2)、及び、補足 6.7 を書き記す必要が生じたからです。

そもそも、この章の本質的な内容は今回の講演では一切話していません。しかし、上記に書いてある通りなのですが、ここに書いて置かなければならないのかな…と感じ、この章を書いた次第です。(この章の内容は 2009 の秋の数学会（大阪大学）で発表はしています。)

7. ベースキャンプからアタックラインを確認すること

ようやく、第３章 (漸化式)、第４章 (有理関数の形状)、第５章 (有理関数の微分関係式)、第６章 (有理関数の関数等式)、と『lemniscate 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数に依って定義される有理関数（達）』に対して、筆者が書きたいものは、これで書き終えました。しかし、これは『数学という知の蓄積、知の統合体』という視点から見れば、局所的な行動です。このような研究の動機、背景、そもそも、筆者が目指している処、等を第１章でも書きましたが、今一度、第１章の内容に相当する物を時系列で、箇条書きにして参考、参照文献がわかる形で整理したいと思います。

7.1. 数学の潮流、受け継がれて往く数学の意志. 以下、箇条書きにして整理しますが、個人的な感覚、感性で勝手に書き込んでいる部分もあります。筆者が勝手に書いているノートと思っていただけると助かります。

(1) Gauss による (1801)、『Gauss 整数論第７章 (円の分割を定める、三角関数による等分方程式理論)』[16]
(2) Abel による (1827-1829)、『Recherches(楕円関数による等分方程式理論)』[17, 18, 19, 20, 21]
(3) Eisenstein による (1845-1846)、『三角関数やlemniscate 関数を用いた相互法則の証明』[1, 2]
(4) Kronecker による (1880)、『Kronecker 青春の夢』[24, 25], [31, 13 章 (類体論)), [32]
(5) Hilbert による (1900)、『Hilbert の第 12 問題』[26], [28], [31], [34]
(6) 高木、竹内による (1903-1920)、『Hilbert の第 12 問題の進展、類体論の完成による「Kronecker 青春の夢」の解決』[23], [31, 13 章 (類体論)], [32]
(7) 志村五郎、谷山豊による (1957-)、『虚数乗法論の高次元化、一般化？の理論の構成』[35, 36, 37]

こうして観ると脈々と受け継がれて往く数学の意志を確かに感じます。上記に書いた (1)〜(7) は連続的ですが…時に、不連続に (時代を超えて) 受け継がれる場合もあります。例えば上記の (1)-(5) の Gauss–Abel–Eisenstein–Kronecker–Hilbert という大道を体解して発表された記事もあります。

7.2. 高瀬正仁氏、Norbert Schappacher 氏による発表記事. 以下、箇条書きにして整理しますが、個人的な感覚、感性で勝手に書き込んでいる部分もあります。

(T1) [24, 25](『虚数乗法論』の歴史的意義についてまとめられたもの)
(N1) [27](lemniscate 曲線,lemniscate 関数について歴史的景観を与えたもの)
(T2) [26](『Hilbert の第 12 問題』に対して一つの方向性を提示したもの)
(N2) [28](『Hilbert の第 12 問題』に対する意義、歴史的景観を提示したもの)

『虚数乗法論』や『Hilbert の第 12 問題』に対してより深い理解を得たいのなら、上記の記事は何度も読み返しておいた方が良いと感じています。

7.3. 津田塾大学『数学史シンポジウム』の講演者、杉本　敏夫氏、高瀬　正仁氏、今野　秀二氏の３氏の記事を追いかけて. 毎年のように、この津田塾大学『数学史シンポジウム』が開催されます。第１４回以降、毎年のように講演依頼が筆者の手元に届きます。但し、今回の場合は少し様子が違ったようです。それは、ここ数年、筆者がこの『数学史シンポジウム』をサボっていたからだと思われます。発表はせず、シンポジウムに出席をして人の講演の後に質問ばかりしていたら、とある先生に「質問ばかりしていないで、あなたも発表をしなさい！」と怒られてしまった。しか

し、講演を引き受ける以上は安請け合いは出来ないし、また、発表に耐えられるだけの中身の在るものを提示しなければ結果的にシンポジウムの質的低下を招きかねない。講演する以上は、また、その内容を記事にするということは「それだけの責任」が伴う。その先生は「頑張って研究成果を上げなさい！」というエールのつもりで言ったのだろうけど。ここ数年はこの『数学史シンポジウム』そのものを欠席していました。また、「それだけの責任」という観点で、講演者に個人差があるようにも感じられました。さらに、「それだけの責任」という観点で主催者側に、そこまでの意識があるとも感じられませんでした。

> 『人は人、社会は社会!そんな事を気にせず、思いついた物が在るのなら計算をしなさい。数学の中での位置づけを与えなさい。それらを記事にまとめなさい。発表をしなさい。』

大学院時代の先輩達、恩義の先生達からの怒鳴り口調の説教を賜る事に成るのだろうか…

筆者はこれまでに、この津田塾大学『数学史シンポジウム』において２度ほど講演をしました。第１５回 [57] と第１７回 [58] の２度です。今回で３度目になりますが、その内容は、この２つ第１５回 [57] と第１７回 [58] を受けて、その内容の深化と進化を与えたものが、この報告論文になります。第１７回 [58] とタイトルが殆ど同じですが、その中身の重さは（内容の深化と進化を見てみると）全く異なります。第１７回 [58] は、筆者の感覚で安請け合いをした記事とも言えなくないな…と感じています。当時を振り返っても、相応の物を書かなくてはと責任を果たすために primary 数のノートと虚数乗法論についてのノートを追記したのを思い出します。そもそもの筆者の数学的意志は第１５回 [57] において公表したとおりです。その筆者の数学的意志（の一部）を受け継ぐ内容の物が、この報告論文の内容です。

この津田塾大学『数学史シンポジウム』において様々な分野の方々が講演をなさっています。また、津田塾大学『数学史シンポジウム』は、数学通信の数学教室だより（第１８巻　第３号、２０１３年１１月号)、の津田塾大学学芸学部数学科の中で紹介をされていました。なので、今後しばらくは続いていくものと思われます。この場をかりて、筆者が発表した記事（３編、今回のを含みます）と関連する記事をいくつか紹介したいと思います。具体的には、講演者、杉本　敏夫氏、高瀬　正仁氏、今野　秀二氏の３氏の記事を追いかけました。それから、紹介する記事は第１４回数学史シンポジウムから前回の第２３回数学史シンポジウムまでの発表された記事に限定させてもらいます。

(1) (杉本　敏夫氏による発表記事)「ガウスが行った数値計算」[42, 43, 44] において実際にガウスがどう数学を展開したか、実際の計算をどのようにして行ったか、これらの再現が与えられている。特に、[44] は、lemniscate 曲線の５等分の [61] の訂正や、先にも触れたが lemniscate 関数の倍角公式をガウスがどう計算をしたのかの再構築が与えられている。また [44] は数学史家が実際に果たす責任という物を体現している記事だと感じる。また、[45] においてガウスがつきつめた４次剰余相互法則の話がまとめられている。
(2) (高瀬　正仁氏による発表記事)「ガウスの数学日記について」[46, 47]。『ガウスの数学日記』の概略が [46] に、そして、『ガウスの数学日記』の数学史的見解が [47] にある。特に、[46, p28] において４次剰余相互法則と lemniscate 関数の関係をガウスがどのように感じていたか（第１４６項）がある。それから、『数学史通史の試み〜数論と関数論〜』[48] と

先にも述べたが [26] を読み込むことによって新たに造らなければならない分野（——論）が見えて来るのかもしれない。[49] は、[48, 26] の中に含まれる内容だと筆者は感じている。

(3) （今野　秀二氏による発表記事）ここで、紹介する記事を一言で言うなら『実際に１９世紀 (1800–1899) に展開された楕円関数論』と言えるだろう。今野　秀二氏による発表記事の５編 [50, 51, 52, 53, 54] がそれになる。筆者は今回この報告論文の中で、Eisenstein の合同関係式の筆者による一つのメカニズムを提示したが、１９世紀の楕円関数論を通じての合同関係式については [50, 51, 54] の記事を追うと良いと思う。特に [54] において、Kronecker が提示した合同関係式の詳しい解説がある。

以上、３氏の発表記事を紹介してきました。そして、筆者に時空が出来たこともあり、ここまでを整理する意味で読み返してみたのですが、筆者の発表した記事、第１５回 [57] と第１７回 [58] も含めて互いに関連し合う記事が、第１４回数学史シンポジウムから第１７回数学史シンポジウムの４回のシンポジウムにかけて集中しています。興味を持たれた方は参考にしてください。

このsubsection を書き終えるに当たり、お詫びですが、さすがに第１回からの数学史シンポジウムとこの報告論文との関連のある記事を抽出することまでは出来ませんでした。筆者は第７回以降の「数学史シンポジウム」の報告集は所収してはいます。が、期日の関係上第１４回数学史シンポジウムから前回の第２３回数学史シンポジウムまでの発表された記事に限定させていただきました。改めてお詫びする次第です。

7.4. 三角関数や lemniscate 関数を用いた相互法則の証明と久保田富雄氏の発表記事. この報告論文の参考文献の [15] までの 15 編の記事は、関数 (三角関数や lemniscate 関数) を用いた相互法則の証明に関しての内容を含む文献です。そもそものオリジナルは Eisenstein の [1, 2] になると筆者は考えています。ただ、筆者は全ての Eisenstein の記事を追いかけられてはいないので、この報告論文と関連し、重要な数学的事実を内包している Eisenstein の記事はまだ、数編、ここで挙げた２つ以外にあるとは感じています。それらを補う意味で、とある専門家により教えられた [14, 第８章] は、筆者にとって大変役立っています。また、大きな影響も受けています。先にも述べましたが、この [14, 第８章] を基に、[14, Proposition 8.2] を筆者がこれまでに述べてきた研究スタイルに殉じて、内容を深く掘り下げたものがこの報告論文になります。この報告論文では、Eisenstein が [2] で与えた合同関係式のメカニズムの解説をメインにまとめました。但し、そのメカニズムは筆者によるもので、Eisenstein のオリジナルとは前半部が大きく異なります。先にも述べた通りなのですが、Eisenstein のオリジナルの理解は筆者の中では得られていません。この Eisenstein のオリジナルの詳細をカバーしたものが [9] にあります。

関数 (三角関数や lemniscate 関数) を用いた相互法則の証明に関しての議論を始めるときは、やはり、先ず三角関数を用いた (平方剰余の) の相互法則の証明の議論から始めることになります。これに関して、筆者が最初に出会ったのは [3] でした。後天的にして、何編か関数 (三角関数や lemniscate 関数) を用いた相互法則の証明の記事に出会ったのですが、その手法は、筆者の理解の及ぶ範囲でになりますが、似て非なる３種類に分かれます。

(1) 積表示を考える手法
(2) 合同関係式を与える手法

(3) 上記 (1) の手法を基に、$f(x,y) = -\dot{f}(y,x)$ を満たす関数 $f(x,y)$ を造り、この関数 $f(x,y)$ を用いて与える手法

まず、手法 (1) の積表示に関しては、[1], [3]([3] に関しては筆者の記憶があいまい…(1),(2) の両方が含まれている内容だったかなと…), [4] ([4] に関してのさらに詳しい解説が、こちらのシンポジウム第２３回 [5] にある) 以上は、手法 (1) の三角関数の場合話です。手法 (1) の lemniscate 関数の場合に関しては、[1], [10, p204–208], [13], [29, p519] にあります。

次に手法 (2) の合同関係式については、三角関数の場合は [3], [55] に、lemniscate 関数の場合は、[2], [8], [9], にあります。また、この lemniscate 関数の場合の合同関係式はこの報告論文でも扱いました。

３つ目の手法 (3) に関しては、三角関数に関するものが [7] の冒頭、及び [15, p58–60] に、lemniscate 関数の場合が [6] に、楕円テータに適応させたものが [7] にあります。文献 [7] は筆者の [57] でも紹介しました。

最後に、これら手法 (1),(2),(3) を含む、関数 (三角関数や lemniscate 関数) を用いた相互法則の証明に関しての総合報告が、[10, p200–232], [11], [13], [14] にあります。これら、４つの記事を読み込んだ後に、[12, 第１章] を読むと１つの方向性が見えて来る。その話のために節を改めます。

> 久保田富雄氏の発表記事の中から、[6], [7], [11], [12], をここで、紹介しました。当時になりますが、筆者がこちらの第１５回 [57] の講演発表の後の質問で、Günther Frei さん（第１５回の講演者の一人）から、『相互法則の証明と modular function には、何か関連があるのですか?』というような、質問を受けました。英語による質問を三宅先生が訳されて筆者に伝えてくれました。で、当時の筆者は『(…lemniscate 関数を扱っているけど、$\tau = 1 + i$（周期の比）は固定されているし、そもそも、lemniscate 関数という特殊な事象を扱っているしな…これらを述べた後)…modular function に興味はありますが、今現在は関心はありません。』と回答をした。ちゃんと質問に回答していたのか？という想いは長い間、筆者の心に残ってしまったが、この Günther Frei さんの質問に対する解答が、久保田富雄氏の [12, 第１章] の記事になるのかなと、今は感じている。久保田富雄氏の [12, 第１章] は、今後しばらく筆者に影響を与え続けそうです。

7.5. 次の深化と進化を得るために (アタックラインの模索). この報告論文を書き上げる目的は、中身（内容）は [59] を核にして、必要な過去と現在を抽出して、未来への足場を造るためにです。良くも、悪くも、こちらの津田塾大学数学史シンポジウムは『自由』というのを許容しているシンポジウムであると認識しています。[59] が今後どのような扱いをされるかは不明ですが、著者として、申し上げるならば、著者がしてきた数学的な価値のある記事は、[57] とこの報告論文に集約されます。『自由』というのを許容しているシンポジウムだから出来た事です。この章では報告論文を書き上げるのに必要だった参考、参照文献を４つの部門に分けて改めて整理しました。そして、このような行動の結果、以下の２つの道筋 (アタックライン) が感知されました。それらをここに書き留めて未来に託したいと思います。

問題 7.1. 記事、[10, p200–232], [11], [13], [14] を読み込み、その上で、久保田富雄氏の [12, 第1章] を読み、関数の特質：*(1)* 周期性、*(2)* 対称性 *(*関数等式*)* の観点から *Eisenstein* がした相互法則の証明を再論せよ。このときに、関数等式 *(*この報告論文の*)* 定義 *5.9* の有理関数 $R_{s,m}(w)$ に対して

$$R_{s,m}(w)R_{s,m}\left(\frac{1}{w}\right) = 1. \tag{P2}$$

という関数等式が本質的な役割を果たしていると気付く。三角関数の場合をこれに寄り添う形に書き換えよ。また、このような関数等式を基軸に相互法則を関数の特質：*(1)* 周期性、*(2)* 対称性 *(*関数等式*)* として理解が出来るか？具体的な再現を与え、さらにその一般化を与えよ。

補足 7.2. 上記問題 *7.1* に対して、観念的な記述しか出来ないのならばそれでは、久保田富雄氏の [12, 第1章] を超えない。あくまで、観念的な記述を裏付ける具体的な再現を与える事にこだわる事。

問題 7.3. この報告論文では『*lemniscate* 関数と $\mathbb{Z}[i]$ 上の *primary* 数に依って定義される有理関数（達）』についてまとめられた。その内容を駆使し、*Gauss's Last Entry*、[46, p28] において４次剰余相互法則と *lemniscate* 関数の関係をガウスがどのように感じていたか（第１４６項）に対する１つの解答を与えよ。また、この時に [14, 第８章, 第１０章] を参照、参考にすると良いと思われる。

補足 7.4. この問題 *7.3* は [14, p418, Appencix C] にある *open problems* の１つです。この報告論文が、この *open problem* に対する１つの解答を与えるのに何らかの寄与をするものと筆者は考えている。

これで、取り敢えず、筆者の書いて置きたいものを打ち止めにします。(2014.01.28)

筆者に対する [57] とこの報告論文の数学としての学問的評価、及び、筆者という媒体や、他の数学者によって成される [57] とこの報告論文のその後の学問的前進等は、これらは以後の未来に託すことにしようと思います。

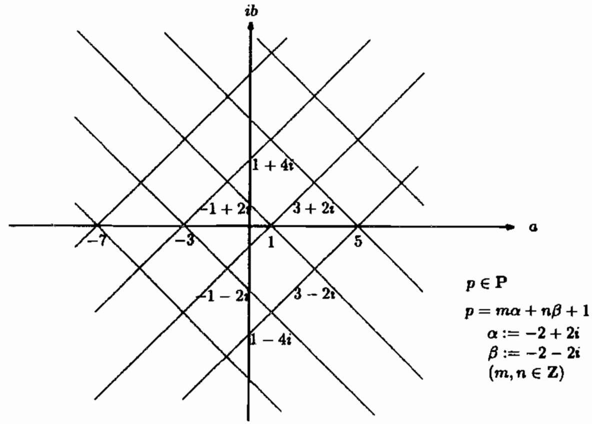

Figure 1 (Lattice of primary numbers of $\mathbf{Z}[i]$)

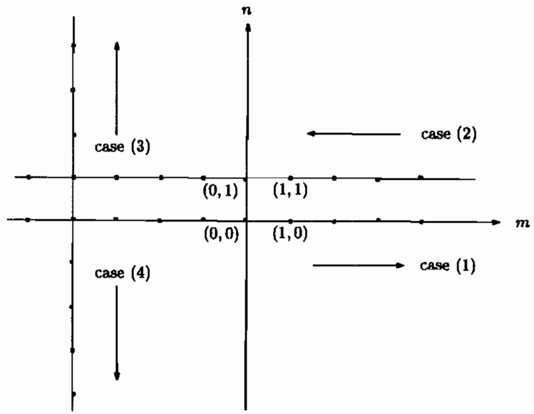

Figure 2 ((m, n) of $P_{m,n}$)

References

[1] G.Eisenstein: *Application de l'algèbre à l'arithmétique transcendante*, J. fur reine u. angew. Math **29**(1845), 177–184.

[2] G.Eisenstein, *Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen, I: Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscotenfunctionen, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformationsformeln*, J. fur reine u. angew. Math **30**(1846), 185–210.

[3] M. Yukitaka: *Entrance examination and the law of quardratic reciprocity*, Mathematical communication for mathematician, No 30(1998), 20–23, in Japanese.
宮川　幸隆:「入試の良問と平方剰余の相互法則」, 数研通信 No 30(1998), p20–23.

[4] 宮川　幸隆: 「双曲多項式の諸性質」、数学（日本数学会編集）、岩波書店、第５８巻、第３号、２００６年７月夏季号.

[5] 宮川　幸隆: 『平方剰余の相互法則の証明』、第２３回　数学史シンポジウム (2012.10.14),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.34 (2013.4), p411–424.

[6] T.Kubota: *Some arithmetical applications of an elliptic function*, J. Reine Angew. Math. **214/215**(1964), 141–145.

[7] T.Kubota: *Anwendung Jacobischer Thetafunktionen auf die Potenzreste*, Nagoya Math. J. 19(1961) 1–13.

[8] K. Watanabe, Y. Miyagawa and T. Higuchi: *A remark on the analytic proof of the law of biquadratic reciprocity*, Journal of the Yokohama National University, Sec. 1, No. 43, (1996).

[9] 伊波　靖:『4 次剰余相互法則の関数論的考察』, 筑波大学教育研究科　修士論文, (2000)

[10] 平松　豊一: 数理情報科学シリーズ 18, 数論を学ぶ人のための『相互法則入門』, 牧野書店 1998.

[11] 久保田　富雄: 「整数論の発展をもとめて」(Gauss の第４証明をめぐる問題)、数学の歩み、8-4 (1961), 198–207 (この記事は、上記、平松『相互法則入門』217–232 にもある。)

[12] 久保田　富雄: 「数論論説　～メタプレクティック理論と幾何学的相互法則～」, 牧野書店 1999.

[13] H.J.S.Smith: Report on the theory of numbers; reprinted, 1894 and 1965, in The Collected Mathematical Papers (originally published, in six parts, as a report of The British Association, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, and 1865.), Chelsea Publishing Company Bronx, New york.

[14] F. Lemmermeyer: Reciprocity Laws ; From Euler to Eisenstein, Chapter 8, Springer, (2000).

[15] K. Ireland and M Rosen: A Classical Introduction to Modern Number Theory, New york:Springer-Verlag, (1990).

[16] 高瀬　正仁: 訳　『ガウス整数論』　朝倉書店 1995.

[17] N.H.Abel: *Recherches sur les functions elliptiques*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.**2** (1827), 101–181. Bd.**3**(1828), 160–190.

[18] N.H.Abel: *Mémoire sur une classe particulière d'equations résolubles algébriquement*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.4(1829), 131–156.

[19] N.H.Abel: *Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques*, Astronomische Nachrichten, 6, 138, pp. 365–388, (1828).

[20] N.H.Abel: *Addition au mémoire précédent*, Astronomische Nachrichten, 6, 138, pp. 365–388, (1828).

[21] 高瀬　正仁　訳　『アーベル／ガロア楕円関数論』　朝倉書店　(1998).

[22] Y. Kawada: Gauss and elliptic functions, Sophia Kokyuroku in Mathematics, No **24**(1986), in Japanese.
河田　敬義:　『ガウスの楕円関数論』上智大学数学講究録　No 24, 1986.

[23] T.Takagi: *Über die im Bereiche der rationalen komplexen Zahlen Abelscher Zahlkörper*, J. Coll. Sci. Tokyo **19** (1903), 1–42; Collected Papers, 13–39.

[24] M. Takase: *Three aspects of the theory of complex multiplication*, The intersection of history and mathematics, Sci. Network Hist. Stud, **15** (1994), 91–108.

[25] 高瀬　正仁: 『ガウスの遺産と継承者達』　ドイツ数学史の構想、　海鳴社, 1990.

[26] M. Takase: *Gauss's Disquisitiones arithmeticae and Hilbert's 12th problem*, Sugaku, Mathematical Society of Japan **54** (2002.10), 415–426, in japanese.
高瀬　正仁:　論説　『Gauss「整数論」と Hilbert の第１２問題』、数学（日本数学会編集）、岩波書店、第５４巻、第４号、２００２年１０月　秋季号.

[27] N. Schappacher: *Some Milestones of Lemniscatomy*, Algebraic Geometry (Sinan Sertoz, ed.), Lecture Note in Pure and Applied Mathematics **193**, (1997).

[28] N. Schappacher: *On the history of Hilbert's twelfth problem: a comedy of errors*, Sèminaires et Congrès (Soc. Math. France), **3**(1998), 243–273.

[29] デュドネ編　『数学史　Ⅱ』（１７００～１９００）　上野　健爾、金子　晃、浪川　幸彦、森田　康夫、山下　純一　訳　岩波書店　(1985)

[30] J.H. Shlverman and J. Tate（著）、足立　恒雄、木田　雅成、小松　啓一、田谷　久雄　（訳）　『楕円曲線論入門』(第３版)　シュプリンガー・ファラーク東京　(1997)

[31] 河田　敬義: 「数論１、Ⅱ、Ⅲ」（岩波講座　基礎数学）岩波書店　(1979)

[32] 足立　恒雄、三宅　克哉:　『類体論講義』　（日評数学選書）日本評論社　1998.

[33] A. Baker: Transcendental Number Theory, Chapter 6, Cambridge Univ. Press, (1975).

[34] 杉浦　光夫（編）:　『ヒルベルトの２３の問題』、日本評論社　1997.

[35] 志村　五郎:　『保型関数と整数論Ｉ』、 数学 第 11 巻 (1959), p193–205.

[36] 志村　五郎:　『保型関数と整数論Ⅱ』、 数学 第 13 巻 (1961/62), p65–80.

[37] 志村　五郎、谷山　豊:『近代的整数論』、現代数学講座 9A、共立出版, (1957).

[38] H.M. Stark: *Class-numbers of complex quardratic fields, Modular functions of one variable*, I, (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972), Lect. Notes in Math. **320**(1973) 153–174.

[39] M.Ward: *Arithmetical properties of polynomials associated with the lemniscate elliptic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**(1950), 359–362.

[40] G.B Mathews: *Division of the lemniscate into seven equal parts*, Proc. London Math. Soc. (2) **14** (1915), 464–466.

[41] G.B Mathews: *A direct method in the multiplication theory of the lemniscate function and other elliptic functions*, Proc. London Math. Soc. (2) 14 (1915), 467–475.

[42] 杉本　敏夫: 『ガウスが行った数値計算』、第１４回　数学史シンポジウム (2003.10.25),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.25 (2004.4), p29–48.

[43] 杉本　敏夫: 『ガウスが行った数値計算 (続)』、第１５回　数学史シンポジウム (2004.10.17),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.26 (2005.4), p14–29.

[44] 杉本　敏夫: 『ガウスが行った数値計算 (参)』、第１６回　数学史シンポジウム (2005.10.16),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.27 (2006.4), p11–30.

[45] 杉本　敏夫: 『ガウスと虚数平面』、第２２回　数学史シンポジウム (2011.10.29),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.33 (2012.4), p45–58.

[46] 高瀬　正仁: 『ガウスの数学日記について』、第１４回　数学史シンポジウム (2003.10.25),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.25 (2004.4), p13–28.

[47] 高瀬　正仁: 『ガウスの数学日記について (続)』、第１５回　数学史シンポジウム (2004.10.17),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.26 (2005.4), p30–43.

[48] 高瀬　正仁: 『数学史通史の試み～数論と関数論～』、第１６回　数学史シンポジウム (2005.10.16),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.27 (2006.4), p46–61.

[49] 高瀬　正仁: 『ヤコビの逆問題の発見』、第２２回　数学史シンポジウム (2011.10.29),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.33 (2012.4), p183–193.

[50] 今野　秀二: 『クロネッカーについて』、第１５回　数学史シンポジウム (2004.10.17),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 No.26 (2005.4), p104–113.

[51] 今野 秀二: 『アイゼンシュタインによる楕円関数』、第１６回 数学史シンポジウム (2005.10.16), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 No.27 (2006.4), p31–45.

[52] 今野 秀二: 『Jacobi の"FUNNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM"について』、第１７回 数学史シンポジウム (2006.10.15), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 No.28 (2007.4), p211–222.

[53] 今野 秀二: 『Jacobi の"FUNNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM"その２』、第１９回 数学史シンポジウム (2008.10.12), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 No.30 (2009.4), p196–208.

[54] 今野 秀二: 『Kronecker の楕円関数研究』、第２０回 数学史シンポジウム (2009.10.18), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 No.31 (2010.4), p179–192.

[55] T.Ogawa: *Similarities between the trigonometric function and the lemniscate function from arithemetic view point*, Tsukuba Journal of Mathematics, **29**(2005), 65–77.

[56] T.Ogawa: *Analogies between Circular Functions and Lemniscate Functions from a Viewpoint of Number Theory*, Doctoral thesis (Mathematics), University of Tsukuba (2006).

[57] 小川 琢磨: 「三角関数 ｖｓ (対) lemniscate 関数 ～懐かしさを感じた場所から、見えた景色～」第１５回 数学史シンポジウム (2004.10.16), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 No.26 (2005.4), 44–77.

[58] 小川 琢磨: 「Rational functions defined by the lemniscate functions and the primary number of Gaussian integer (step 1)」第１７回 数学史シンポジウム (2006.10.15), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 No.28 (2007.4), 351–373.

[59] T.Ogawa: *Rational functions defined by the lemniscate functions and the primary number of Gaussian integer*, preprint, (2009).

[60] T.Ogawa and K.Yasuo: *A product formula defined by the beta function and Gauss's hypergeometric function*, Tsukuba Journal of Mathematics, Vol.34, No.1(2010), 13–30.

[61] T. Takagi: History of mathematics for 19-century, (revival version), Kyouritsu-Shuppan, (1996), in japanese.
高木 貞治: 『近代数学史談』『数学雑談』(復刻版) 共立出版 1996.

小川 琢磨 (Takuma Ogawa) 埼玉県 春日部市 永沼 159-3, 郵便番号 344-0123
E-mail address: takumaro_math1@mopera.net