双曲多項式の性質（２）

宮川　幸隆

1　序文

本稿は、昨年度の津田塾大学数学史シンポジウムに於ける筆者の講演で紹介した双曲多項式の、更なる性質を紹介するものである。

双曲多項式は幾つかの諸性質（双曲多項式は第二種 Tschebyscheff 多項式を特殊化して得られること、その有理整係数が持つ整数論的性質、昨年度の津田塾大学数学史シンポジウムに於いて述べた様に sm 関数を用いて美しく因数分解され、その因数分解は初等整数論に於ける平方剰余の相互法則の証明に最もエレガントに応用されること、線形三項間漸化式を満たすこと、二階線形同次微分方程式を満たすこと、双曲多項式列が直交多項式系を成すこと、母関数の関係を満たすこと、曲線 $y^2x = -4$ が曲線群 $\{y = W_n(x)\}$　$(W_n(x)$ は第 n 双曲多項式$)$ の包絡線であること、超幾何級数で表されること、零点が代数的に可解であること、等々）を持つが、参考文献 [1] では、それらの結果のみを述べ、参考文献 [2] では、それらの結果すべてに厳密な証明を与えた。

双曲多項式の背後には双曲関数なるものが存在し、それは Legendre 関数や Legendre 陪関数の親戚であると思われる。また、双曲多項式自身は Laguerre 多項式の親戚であると思われる。Legendre 陪関数や Laguerre 多項式は自然現象と神秘的な関係を持つ（20 世紀に入り現代物理学の基礎理論である量子力学が現われた時期、水素原子の波動関数が Legendre 陪関数や Laguerre 多項式で書き表された）。双曲多項式や双曲関数も、自然現象と神秘的な関係を持つことが期待されるが、その様な解明は今後の物理学の発見、研究に俟ちたい。

そこで、筆者の講演では、今後数年間に亘って上記の諸性質を一つずつ述べさせて頂きたいと思うが、本稿では、上記の諸性質の内の一つである線形三項間漸化式を解いてみたい。即ち、本稿は、参考文献 [1] の内容の一部に厳密な証明を付け加えたものであることを申し添えておく。

2　双曲線関数の背後に潜む多項式、双曲多項式

本節では、まず、関数 sw を

$$sw(z) = z - \frac{1}{z}$$

と定義する。$\mathbb{C}$ を複素数全体の集合とするとき、$\mathbb{C}$ から 0 のみを除いた集合 $\mathbb{C} - \{0\}$ のことを $\mathbb{C}$ の乗法群と呼び、$\mathbb{C}^\times$ という記号で表わした：　$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$.

$sw(z)$ の定義域は $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ と考えることにする。

まず、0 でない任意の複素数 z と任意の奇数 n とに対し

$$sw(z^n) = sw(z)W_n(sw^2(z))$$

を満たし、係数が全て整数である $(n-1)/2$ 次式 $W_n(X)$ が存在することを示そう。
このことは、次の事実によって示される：

Fact 1.1

$$W_1(X) = 1.$$

Fact 1.2

$$W_3(X) = X + 3.$$

Proof.

$$sw(z^3) = z^3 - \frac{1}{z^3} = \left(z - \frac{1}{z}\right)\left(z^2 + 1 + \frac{1}{z^2}\right) = sw(z)\left\{\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 3\right\} = sw(z)\{sw^2(z) + 3\}$$

であるから、

$$W_3(X) = X + 3.$$

q.e.d.

Fact 1.3　$k \geq 3$ なる奇数 k に対して、

$$W_{k+2}(X) = (X+2)W_k(X) - W_{k-2}(X).$$

Proof.

$n = k, \quad k-2$ のとき、W_n が存在すると仮定すると、

$$sw(z^{k+2}) = z^{k+2} - \frac{1}{z^{k+2}} = \left(z^k - \frac{1}{z^k}\right)\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - \left(z^{k-2} - \frac{1}{z^{k-2}}\right) = sw(z^k)\left\{\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 2\right\} - sw(z^{k-2})$$

$$= sw(z)W_k(sw^2(z))\{sw^2(z)+2\} - sw(z)W_{k-2}(sw^2(z)) = sw(z)[\{sw^2(z)+2\}W_k(sw^2(z)) - W_{k-2}(sw^2(z))].$$

よって、$n = k+2$ のときも、W_n が存在して、

$$W_{k+2}(X) = (X+2)W_k(X) - W_{k-2}(X).$$

Fact 1.1 と Fact 1.2 によって、$W_1, \quad W_3$ は存在するから、任意の奇数 n に対して、W_n が存在する。

q.e.d.

この W_n を第 n 双曲多項式と呼ぼう：

Facts 1.1, 1.2, 1.3 により

$W_1(X) = 1,$

$W_3(X) = X + 3,$

$$W_5(X) = (X+2)W_3(X) - W_1(X) = (X+2)(X+3) - 1 = X^2 + 5X + 5,$$

$$\begin{aligned} W_7(X) &= (X+2)W_5(X) - W_3(X) = (X+2)(X^2+5X+5) - (X+3) \\ &= X^3 + 7X^2 + 14X + 7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_9(X) &= (X+2)W_7(X) - W_5(X) \\ &= (X+2)(X^3+7X^2+14X+7) - (X^2+5X+5) \\ &= X^4 + 9X^3 + 27X^2 + 30X + 9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{11}(X) &= (X+2)W_9(X) - W_7(X) \\ &= (X+2)(X^4+9X^3+27X^2+30X+9) - (X^3+7X^2+14X+7) \\ &= X^5 + 11X^4 + 44X^3 + 77X^2 + 55X + 11, \end{aligned}$$

$\vdots$

等々となる。

3　双曲多項式の漸化式を解く

さて、双曲多項式の漸化式

3.0.1

$$W_{k+2}(X) = (X+2)W_k(X) - W_{k-2}(X)$$

を初期条件

$$W_1(X) = 1, \quad W_3(X) = X+3$$

の下で解いて見よう：

漸化式 3.0.1 において、k を $k+2$ に換えると、

3.0.2

$$W_{k+4}(X) = (X+2)W_{k+2}(X) - W_k(X)$$

が成り立ち、

漸化式 3.0.1

$$W_{k+2}(X) = (X+2)W_k(X) - W_{k-2}(X)$$

を漸化式 3.0.2

$$W_{k+4}(X) = (X+2)W_{k+2}(X) - W_k(X)$$

に代入すると、

$$W_{k+4}(X) = (X+2)[(X+2)W_k(X) - W_{k-2}(X)] - W_k(X) = (X^2+4X+3)W_k(X) - (X+2)W_{k-2}(X)$$

が成立するから、

$$\begin{pmatrix} W_{n+4} \\ W_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2+4X+3 & -(X+2) \\ X+2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_n \\ W_{n-2} \end{pmatrix}$$

が成り立つが、行列 $\begin{pmatrix} X^2+4X+3 & -(X+2) \\ X+2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は λ の 2 次方程式

$\lambda^2-(X^2+4X+2)\lambda+1=0$ を解くことによって、

$$\lambda = \frac{X^2+4X+2+(X+2)\sqrt{X^2+4X}}{2}, \quad \frac{X^2+4X+2-(X+2)\sqrt{X^2+4X}}{2}$$

と求まる。

3.0.3 双曲多項式の漸化式を解く際の行列の固有値

$$\lambda_+(X) = \frac{X^2+4X+2+(X+2)\sqrt{X^2+4X}}{2}, \quad \lambda_-(X) = \frac{X^2+4X+2-(X+2)\sqrt{X^2+4X}}{2}$$

と置くことにしよう。行列 $\begin{pmatrix} X^2+4X+3 & -(X+2) \\ X+2 & -1 \end{pmatrix}$ の、

固有値 λ_+ に属する固有ベクトルとしてベクトル $\begin{pmatrix} \frac{X+2+\sqrt{X^2+4X}}{2} \end{pmatrix}$ を採ることが出来、

固有値 λ_- に属する固有ベクトルとしてベクトル $\begin{pmatrix} \frac{X+2-\sqrt{X^2+4X}}{2} \end{pmatrix}$ を採ることが出来るから、

$$P = \begin{pmatrix} \frac{X+2+\sqrt{X^2+4X}}{2} & \frac{X+2-\sqrt{X^2+4X}}{2} \end{pmatrix}$$

なる行列を考えると、

3.0.4 双曲多項式の漸化式を解く際の行列の対角化

$$P^{-1} \begin{pmatrix} X^2+4X+3 & -(X+2) \\ X+2 & -1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

よって、

3.0.5 双曲多項式の漸化式を解く際の行列の対角化の n 乗

$$P^{-1} \begin{pmatrix} X^2+4X+3 & -(X+2) \\ X+2 & -1 \end{pmatrix}^n P = \begin{pmatrix} {\lambda_+}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_-}^n \end{pmatrix}.$$

従って、

3.0.6　双曲多項式の漸化式を解く際の行列の対角化の n 乗による解表示

$$\begin{pmatrix} W_{4n+3} \\ W_{4n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2+4X+3 & -(X+2) \\ X+2 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} W_3 \\ W_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} {\lambda_+}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_-}^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} W_3 \\ W_1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。そこで、

$$\mu_+ = \frac{X+2+\sqrt{X^2+4X}}{2}, \quad \mu_- = \frac{X+2-\sqrt{X^2+4X}}{2}$$

と置くとき、${\mu_+}^2 = \lambda_+, \quad {\mu_-}^2 = \lambda_-$ であることを用いると、3.0.6 から、

$$\begin{pmatrix} W_{4n+3} \\ W_{4n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}} \begin{pmatrix} \mu_+ & \mu_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\mu_+}^{2n} & 0 \\ 0 & {\mu_-}^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mu_- \\ -1 & \mu_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_+ + \mu_- + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}} \begin{pmatrix} {\mu_+}^{2n+2} + {\mu_+}^{2n+1} - {\mu_-}^{2n+2} - {\mu_-}^{2n+1} \\ {\mu_+}^{2n+1} + {\mu_+}^{2n} - {\mu_-}^{2n+1} - {\mu_-}^{2n} \end{pmatrix}$$

となる。

よって、

$$W_{4n+1} = \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}((\mu_+)^{2n+1} + (\mu_+)^{2n} - (\mu_-)^{2n+1} - (\mu_-)^{2n})$$

となる。

よって、$4n+1 = 2k-1$ とおくと、$2n = k-1$ であるから、

$$W_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}((\mu_+)^k + (\mu_+)^{k-1} - (\mu_-)^k - (\mu_-)^{k-1})$$

となる。

$$W_1 = W_{2-1} = \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}((\mu_+)^1 + (\mu_+)^0 - (\mu_-)^1 - (\mu_-)^0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}\Bigg(\Big(\frac{X+2+\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^1 + \Big(\frac{X+2+\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^0$$

$$-\Big(\frac{X+2-\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^1 - \Big(\frac{X+2-\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^0\Bigg) = \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}} \times \sqrt{X^2+4X} = 1,$$

$$W_3 = W_{4-1} = \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}((\mu_+)^2 + (\mu_+)^1 - (\mu_-)^2 - (\mu_-)^1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}\Bigg(\Big(\frac{X+2+\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{X+2+\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^1$$

$$-\Big(\frac{X+2-\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{X+2-\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^1\Bigg)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}\Bigg(\frac{X^2+4X+2+(X+2)\sqrt{X^2+4X}}{2} - \frac{X^2+4X+2-(X+2)\sqrt{X^2+4X}}{2}$$

$$+\sqrt{X^2+4X}\Bigg) = (X+2)+1 = X+3,$$

$$W_5 = W_{6-1} = \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}((\mu_+)^3 + (\mu_+)^2 - (\mu_-)^3 - (\mu_-)^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}\Bigg(\Big(\frac{X+2+\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^3 + \Big(\frac{X+2+\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^2$$

$$-\Big(\frac{X+2-\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^3 - \Big(\frac{X+2-\sqrt{X^2+4X}}{2}\Big)^2\Bigg)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{X^2+4X}}\Bigg(\frac{(X+2)(X^2+4X+1)+(X^2+4X+3)\sqrt{X^2+4X}}{2}$$

$$-\frac{(X+2)(X^2+4X+1)-(X^2+4X+3)\sqrt{X^2+4X}}{2} + \frac{X^2+4X+2+(X+2)\sqrt{X^2+4X}}{2}$$

$$-\frac{X^2+4X+2-(X+2)\sqrt{X^2+4X}}{2}\Bigg) = (X^2+4X+3)+(X+2) = X^2+5X+5,$$

等々である。

さて、$X=-1$ のときは、

$$\mu_+ = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \mu_- = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

であり、$X=-2$ のときは、

$$\mu_+ = \sqrt{-1}, \quad \mu_- = -\sqrt{-1}$$

であるが、

$$\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

の積は 1 であるから、

$$\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

とから、

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

の積も 1 である。このことは、3.0.4 からも窺える。何となれば、

3.0.3 から、

$$\lambda_+(-1) = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \lambda_-(-1) = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

であり、3.0.4 の両辺の行列式をとることによって、

$$\lambda_+(X)\lambda_-(X) = 1$$

であるからである。
　同様にして、

$$\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}$$

の積は1であるから、

$$(\sqrt{-1})^2 = -1, \quad (-\sqrt{-1})^2 = -1$$

とから、

$$-1, \quad -1$$

の積も1である。このことは、3.0.4からも窺える。何となれば、3.0.3から、

$$\lambda_+(-2) = -1, \quad \lambda_-(-2) = -1$$

であり、3.0.4の両辺の行列式をとることによって、

$$\lambda_+(X)\lambda_-(X) = 1$$

であるからである。

4　参考文献

[1]　宮川 幸隆，双曲多項式の諸性質，日本数学会編集の雑誌「数学」第５８巻，第３号，２００６年7月，夏季号.

[2]　宮川 幸隆，電子書籍「微積分/解析/集合と写像/関数論の初歩/代数/整数論/ テータ関数/算術幾何平均/微分方程式/超幾何・合流型超幾何関数/代数的可解性」，電子書籍販売サイト：forkN，パソコン，iPad，iPhone，Kindle，Android携帯の全てで読むことが出来ます，２０１３年７月.

[3]　西本 敏彦，超幾何・合流型超幾何微分方程式，共立出版，１９９８年.