「指数」はなぜ指数と云うのか？

その概念と用語の歴史的変遷を巡って

鈴木　真治[1]

1.はじめに

本論では、指数と云う現在では常識となった便利な数の風景がどのような変遷を経て形成されていったか、について考えてみたい。特に、概念と用語の形成の歴史的背景と受容の経緯に焦点を絞り、指数関数は対象から外した。[2]このような地味なテーマを取り上げた理由は、なぜ exponent（指数）と英語と漢字で命名されたのか、それはいつ誰によってなされたのか、と云う基本的な事実について、特に漢字名について、語る本はそれほど多くなく[3]、本論執筆時点においてネット上にも、正しい情報を見つけることは出来なかったからである。

それどころか我々が一番信頼する「日本国語大辞典」、"The Oxford English Dictionary"、"Grand Larousse De La Langue Française"、"Deutsches Fremdwörterbuch"などの辞典類も「指数の初出文献」に関しては、実は、誤った情報を提示していることが明らかになった。また、数学史の標準的な通史書の間で、このテーマに関連した歴史的解釈ではなく歴史的事実に対して、しばしば異なる記述が見受けられた。

純粋に数学理論を展開するだけならば「名前をどう付けるかは数学にと

1　2014 年 1 月 30 日投稿　nqi01765@nifty.com

2　指数関数まで含めた歴史的変遷については例えば次の論文を参照されたい。数学のみならず物理学にまで言及していて興味深いが非ヨーロッパ数学については、バビロニアを除いては、調査されておらず、現在の眼で見ると、ヨーロッパ偏重と言わざるを得ない。
Lorenzo J. Curtis　"Concept of the exponential law prior to 1900"　Am. J. Phys. 46(9), Sept. 1978.pp896-906 [16]

3　明確な説明のある出版物は、一つ『授業を楽しくする数学用語の由来』（片野善一郎 著）[39]を除いて、見当たらなかった。実は、本書もシンポジュウムの 1 カ月程前に知った。もっと前に知っていれば、シンポジュウムの題目は「『指数』はいつから指数と云うようになったのか？」にしていたであろう。

って本質的な意味はない。」と、ヒルベルトを気取って、済ませることも可能であろうし、いつ誰が命名したかなどはどうでも良いことかもしれない。しかし、それでは理論としての数学、技術としての数学を理解することは出来ても、歴史としての数学、文化としての数学を体感することは出来ないであろう。それ故に、著者は、このような小さな疑問に適切に答え、数学の歴史的側面の理解を深化させることは数学史にしか出来ない重要な責務の一つであると考え、本論を発表した次第である。本論が読者諸氏の数学史の視点を些少なりとも広げることに役立つならば著者の歓びで、これに勝るものはない。

さて、本論の効用を簡単に列記しておく。次に掲げる問題に興味のある方には 100%の納得感が得られなかったとしても、本論は、少なくとも、これらの問題を更に追求する上での有益な試金石にはなろう。

(1) 17 世紀イギリスに於いて、ニュートンに次いで重要とされる数学者ウォーリスが、「指数」として、1656 年の『無限算術』では"index" を使用していたのに 1685 年の『代数論』では "exponent" へと用語を変更した背景は何か？　他の数学者の動向を見る限り、ウォーリスの単なる気まぐれではないことは確かである。

(2) ドイツ語の指数 "exponenten" を初めて使った人物は誰か？通常は、「ドイツ語の数学用語の創始者」であるクリスチャン・ヴォルフとされているが、この場合は違う。

(3) 現在の数論では常識となっているガウスが創めた"index" と "exponent" の使い分けとは何か？

(4) "exponent" と "index" の使い分けについての歴史的経緯はどのようなものであったか？　16 世紀から 19 世紀の様々な国での 80 冊以上の数学書における"exponent" 系と "index"系単語の使われ方の調査を試みた。

(5) 「指数」及び"exponent"と"index"等の初出文献（「指数」はいつ頃から指数と云うようになったのか？）

(6) 著名な辞典類の指数に関する初出文献についての過誤や著名な数学史書に於ける指数に関する過誤

(7) なぜ「対数」に比べて「指数」と云う漢字訳語が創案されるのが 100 年以上も遅れたのか？

(8)　なぜ「対数」に比べて「指数」の漢字の語源説明をしている文献が少ないのか？

(9)　指数の歴史ではどのような文献が重要か？

(10)　「指数」はなぜ指数と云うのか？

(11)　アルキメデスの巨大数の法華経への影響について（仮説）

（コメント）

(1)については、そもそもそのような変更が行われていたこと自体が、これまで論じられたことがなかったのではなかろうか。それ故、この問題に対する著者の分析は未だ十分に読者諸兄を納得させるには至らないかもしれないが、問題提起としては意味があると考えている。

(2)はライプニッツだと思われる。少なくともヴォルフが発表する20年以上前にチルンハウスへの手紙の中で使っている。ライプニッツは著作や論文はラテン語で、手紙はフランス語で書くことが多かったが、同国人チルンハウスにはドイツ語で手紙の遣り取りをしていたのである。

(3)は恐らくガウス研究家にとっては常識であったのかもしれない。しかし、(4)で挙げる「使用頻度表」に基づく統計的側面から、この使い分けについて、ルジャンドルや他の数学者と比較することで、新たな視点からガウスの卓越性が発見出来たことは興味深い。

(4)の歴史的考察を書くための検証資料である"exponent"系と"index"系単語の使用頻度表は、本論の特色の一つで、他の出版物の中には恐らく無いであろう。著者が独自に調査した結果である。"index"と"exponent"の用語変遷の分析には大変興味深い資料となろう。

(5)は(9)とも(6)とも関係がある。指数の歴史において命名された時期を特定することは興味ある問題であり、この意味で(9)と関係する。そして現行の多くの辞典類においてその初出情報が誤っていることで(6)と関連する訳である。

(6)のようなものを強く掲げるのは些か「品がない」し、本論にしても過誤は少なからずあろうから、当初は触れない積りであった。しかし、これらの権威ある辞典や著書の誤りが、他の語源辞典や数学史書に伝播していることが確認されたので、やはりきちんと正しておく必要があると考え直し、明示しておくことにした。

(7)、(8)は実は清国の鎖国政策に原因があるのだが、数学と雖も社会の中で行われる営みであり、政治や社会の桎梏から自由では有り得ないことを示す良い例として、この現象は理解されるであろう。
(9)はブルバキ、カッツ、カジョリ、ボイヤー等の標準書を参照して文献を選択した。従って、選択されている文献に大きな特色はないが、出来るだけ原典あるいはそれに近いものを提示するように心掛けた。その結果、本論の引用文献では英語、フランス語、ドイツ語、ラテン語、ギリシャ語、中国語、アラビア語、サンスクリット語が飛び交うこととなった。これは最近のネット環境の飛躍的改善の賜物であるのだが、それにしてもこれだけのものを蒐集するのはかなりの労力を要した。逆に言えば、それだけ読者への利便性を提供するものであるわけだから、本論の価値を高めているとも言えよう。また、漢字用語「指数」についての文献は如上の標準書にはないので、著者が国会図書館で独自に調査した結果を主に反映させている。
(10)については本論のメインテーマであるが、前頁の脚注にもあるように、この問題だけなら片野氏の著書を読めば一渉りの理解は得られるであろう。
(11)は本論の中で、最も実証的な根拠の薄いものであり、本来はこのような場に載せるべき代物ではない。一方で、この仮説は本論の中で最も歴史ロマンを感じさせるものでもあり、このまま埋もれさせておくのも惜しい気がしたので、敢えて生煮えの状態のまま提示して批判は読者諸兄に任せることとした。愚論に対する失笑は甘んじて受けるとしても、本論読了後に、巨大数を考察するために指数概念を練り上げた古代最高の天才数学者の吐息を大乗仏教の最高峰と評される経典の中に感じて頂けることを期待している。

2. 歴史上初めて現れた指数

数世界における指数の出自と命名の経緯を語る前に、その二卵性双生児とも言える冪（power）[4]、現在なら累乗と言った方が馴染みやすいかもし

[4] 本論に関連して「累乗はなぜ冪と呼んでいたのか？」「power をどうして累乗と訳したのか？」に興味のある方は次を参照されたい。
『数学用語と記号ものがたり』（片野善一郎 著）[40]p99-100

れない、について簡単に触れておくことにする。この二つの違いは簡単に言えば a^n そのものを指すのが冪で、掛ける回数 n に焦点を合わせたのが指数である。例えば、9 は 3^2 であるわけだが、9 が 3 の平方であると言うときは、2 乗されていることは判っていても 2 そのものはあくまでも 3 の脇役のような位置づけにあり、主役は 3 を 2 回掛けて作りだされた 9 である。かなり漠然とした言い方をしたが、もう少し具体的に言えば、指数法則が認識された時点が指数の発見と見なして良いのではないかと、個人的には、考えている。そういう意味では、指数が発見されるのは冪の出現のだいぶ後になる。実際、歴史上に冪が現われたのは非常に古く、バビロニアでは B.C.16 世紀頃に作成された、平方数表、平方根表、立方根表や三平方の定理について書かれた粘土板もあるし[5]、エジプトのカフン出土のパピルスには、直角三角形を作る数字が四組出ている。古代インドの「アーバスタンバ・シュルバスートラ」[6]（B.C.5 世紀）には $3^2+4^2=5^2, 12^2+5^2=13^2, 15^2+8^2=17^2$ の例が挙げられている。中国では「周髀算経」[7]（B.C.2 世紀）にも勾股の法（三平方の定理）の計算例がある。ギリシャではピュタゴラス学派の段階（B.C.5 世紀）で既に冪の概念は明示されている。このように冪、特に平方、は数学の歴史の最も初期の段階から姿を現わしていた。一方、この段階では、指数法則に対して言明する文献は見当たらず、指数概念は未だ発見されていないと考えるべきであろう。

しかし、ユークレイデスになると、指数法則 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ に相当する命題を原論において言及している。[8]

（9 巻命題 11）　もし任意個の数が単位から始まり順次に比例するならば、それらの数のうち小さい数が大きい数を割った商はこれらの比例する数のどれか一つである。

注：　この命題を現代表記で表現するならば次のようになる。

数列 $1, a_1, a_2, \cdots$ が順次同じ比例関係にある、つまり $a_1/1=a_2/a_1=a_3/a_2 \ldots$

---

[5] 詳しくは『バビロニアの数学』（室井和夫著）[59]p23-26 参照のこと。驚いたことに簡単な指数・対数表や $x^2+y^2=z^2$ を満たす x,y,z が
$x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2$ と表せることを示唆する数表もある。また、$100^2, 100^3, \cdots, 100^{10}$ に当たる冪表も B.C.1800 頃に作成されている。" Mathematics Emerging: A Sourcebook 1540 – 1900" Jacqueline Stedall [12] p2-5

[6] 本書の訳文は『科学の名著 1、インド天文学・数学集』[62]にある。特に、p411-412 参照

[7] 本書の訳文は『科学の名著 2、中国天文学・数学集』[63]p273-350 にある。

[8] 訳文は『ユークリッド　原論』（中村幸四郎、寺坂英孝、池田美恵、伊東俊太郎 訳）[31]による。また、この指摘は『ブルバキ数学史』[29]p181 による。一方、ブルバキがなぜアルキメデスの『砂の計算者』について一言も触れていないのかは著者には理解出来ない。

ならば、$a_n \div a_m$ $(m < n)$に対して、適当な数 a_k がこのうちにあって、
$a_n \div a_m = a_k$ となる。

ια'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

XI.

Si quotlibet numeri deinceps proportionales sunt ab unitate, minor maiorem secundum aliquem eorum metitur, qui inter numeros proportionales exstant.

参考までに該当命題について、I. L. HEIBERG が編纂した原論のギリシャ語とラテン語も併記しておく。こうして並べてみると、古代ギリシャ語のイオニア数字では 11 が ι α’で表されていたことが判るであろう。

（系）　そして次のことはあきらかである、割る数が単位から数えて何番目であろうと、その商は割られた数から前の方向に数えて同じ位置にある。
　注：　$a_n \div a_m = a_k$ において、$k = n - m$ である。

Πόρισμα.

Καὶ φανερόν, ὅτι ἣν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ μονάδος, τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρουμένου ἐπὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ. — ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollarium.

Et manifestum est, quem obtineat locum metiens ab unitate, eandem etiam eum, secundum quem metiatur, ante eum, quem metiatur, obtinere. — quod erat demonstrandum.

言葉だけを見ていると、これのどこが指数法則なのかとも思えるかもしれないが、数列 $1, a_1, a_2, \cdots$ が現代表記を使えば、$1, r^1, r^2, \cdots$ $(r = a_1)$ であることに注意すれば、（系）で言っていることを算式で表現すると確かに指数法則を表わしている。この時代には、算式は未だ発明されておらず、すべて言葉で表現していた。

3. 巨大数の表現に利用された指数

それにしても、この命題は指数法則の表現としてはいささか迂遠な感じがする。指数法則というよりも等比数列[9]の性質を述べている、と言った方が的を射ているであろう。もっと明示的に指数法則の表現を与えた人物を知りたいところである。幸い、ユークレイデス Εὐκλείδης とそれ程変わらない時代にその数学者はいた。アルキメデス Ἀρχιμήδης である。彼は『砂の計算者』において、次のような注釈を与えている。

> Χρήσιμο δέ ἐστι καὶ τόδε γιγνωσκόμενον. Εἴ κα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζωντί τινες ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάττων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογου ἀπέχει, ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάττονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους.

9 等比数列そのものはバビロニアやエジプトに遡れる。『ブルバキ数学史』[29]p181

ところで、つぎの関係も知っていると便利です。すなわち、もし1からはじまる等比数列のほかの項（a^n）を同じ等比数列のほかの項（a^m）に掛けるならば、得られる積（a^{m+n}）は同じ等比数列に属し、小さいほうの乗項が1から隔たっているだけ、大きい方の乗項から隔たっている項（a^nは1から n+1 番目であるから、a^{m+n}はa^mから n+1 番目）になり、それは両乗項の1からの隔たりの和より1だけ小さい数だけ1から隔たっている（1から n+m+1=(n+1)+(m+1)-1 番目）ということになります。
『ギリシヤの科学（世界の名著 9）』[21]p496

アルキメデスはこの文章の前で、10 進数の桁の取り扱いと云う特殊ではあるが重要な場合について指数法則を適用し、上掲文で一般化した後、その証明を明晰に与えている。彼はこの法則を巨大数の表現のために利用しており、単なる等比数列の性質を述べるに留まったユークレイデスとは視点が全く違っている。これだけの偉業がありながら、法華経に影響を与えることはあっても（⇒31）、これを受け継いで十進法位取り表記、小数へと数の世界を拡大・進展させるギリシャ人はおらず[10]、アルキメデスは2000 年以上も後にガウスから小言をいわれることになる。[11]

4. ディオファントスの冪記号

方向性は違うが、アルキメデスの後に、冪の概念と冪記号を大きく発展させた一番の人物はアレクサンドリアのディオファントス Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς[12]であろう。彼は代数学においてネッセマンの言うところの「言語代数」から「省略代数」への進展を行い、1300 年後にヴィエトに

10　失われたパッポスの『集成』第2巻の初めの部分はギリシャ命数法における四つ組数（百万の冪乗）の体系だったらしく、これはアルキメデスの八つ組数（百万×百万の冪乗）の体系を踏襲するものであったと考えられている。『ボイヤー数学史 2』[3]第4章 p96

11　ガウスはアルキメデスを古代の数学者で最も深く尊敬しながらも、彼が『砂の計算者』で位取りの原理あるいは十進法記数法を発見できなかったことを許すことの出来ない唯一のこととした。「どうして彼はそれを見落としたのであろう。もし彼がその発見をしていたら、科学はいま頃どんな高峰に達していただろうか。」『ガウスの生涯』（ダニングトン著）[28]p214　相手がアルキメデスだからこその不満だったのだろうが、このガウスの指摘から逆に位取りの原理の発見の難しさを推し量ることが出来る。

12　「ディオファントスはギリシャ人ではない。」との指摘を足立恒雄氏から頂いた。彼の生涯は有名な墓碑銘とアレクサンドリアに住んでいたことくらいしか判っていない。従って、なに人なのかも判らないのだが、彼の数学が、抽象的な数を扱っているとしてもその手法は、伝統的なギリシャ数学の延長線上になく、どちらかと言えばバビロニアの代数学に似ていることは確かであろう。

大きな影響を与え、その後の代数記号の流れを決定付けた。また、フェルマーに天啓を授け、数論と云う豊饒な数学分野の開拓に走らせたのも他ならぬ、ディオファントスである。ここでは、有名なフェルマー予想の欄外書き込みの直接のもととなった問題を使ってディオファントスの略記号を例示することにする。その現代性に驚かされると同時に、指数については、未だ一般性を獲得しておらず、彼の興味があくまでも個別の冪であって、指数ではなかったことが窺われる[13]。また、実際にフェルマーが読んだバシェット版ではこの略記号は使われていないことも注意しておく。

η.

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{\text{ιϛ}}$ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Καὶ τετάχθω ὁ αος $\Delta^{Y}\,\bar{\alpha}$, ὁ ἄρα ἕτερος ἔσται $\mathring{M}\,\overline{\text{ιϛ}}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\bar{\alpha}$· δεήσει ἄρα $\mathring{M}\,\overline{\text{ιϛ}}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\bar{\alpha}$ ἴσας εἶναι □ῳ.

πλάσσω τὸν □ον ἀπὸ ςῶν ὅσων δήποτε ⋔ τοσούτων M ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν $\overline{\text{ιϛ}}$ $\mathring{M}$ πλευρά· ἔστω ς $\bar{\beta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\bar{\delta}$. αὐτὸς ἄρα ὁ □ος ἔσται $\Delta^{Y}\,\bar{\delta}$ $\mathring{M}\,\overline{\text{ιϛ}}$ ⋔ ς $\overline{\text{ιϛ}}$· ταῦτα ἴσα $\mathring{M}\,\overline{\text{ιϛ}}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\bar{\alpha}$. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια.

Δ^{Y} ἄρα $\bar{\varepsilon}$ ἴσαι ς $\overline{\text{ιϛ}}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\overline{\text{ιϛ}}$ πέμπτων.

ἔσται ὁ μὲν $\overset{\text{κε}}{\overline{\text{σνϛ}}}$, ὁ δὲ $\overset{\text{κε}}{\overline{\text{ρμδ}}}$, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι $\overset{\text{κε}}{\overline{\text{υ}}}$, ἤτοι $\mathring{M}\,\overline{\text{ιϛ}}$, καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ
Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς. (A.D.201-B.C.285)
(算術 ディオファントス Tannery 編纂 1893 出版)

13 ディオファントスは 10 進法位取り表記や小数への方向でアルキメデスのアイデアを発展させたわけではないが、指数法則は良く知っていたし、平方、立方のみならず4乗、5乗、6乗及び1乗から6乗の逆数、負冪、についても特別の名前を与え、代数を「省略代数」段階にまで引き上げた。『ボイヤー数学史 2』[3]第4章4 p90-92

(ディオファントスの略記号の簡単な説明)

x^{-2}	x^{-1}	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	$-$
$\Delta^{Y\chi}$	ς^{χ}	$\mathring{M}$	ς	Δ^{Y}	K^{Y}	$\Delta^{Y}\Delta$	ΔK^{Y}	$K^{Y}K$	$\pitchfork$

1/2 を除いて、逆数は文字・数字の肩に×を乗せて表している。上記の－記号に「負の数」の意味はなく、「引く」の意味だけである。また、＋記号はない。分数は分母と分子が現代記号と逆になっている。

8.

与えられた平方を二つの平方に分ける。

そこで16($\overline{\iota\varsigma}$)を二つの平方にわけよう。

最初の数をx^2 ($\Delta^{Y}\bar{\alpha}$)としよう。その結果、もう一つの数は $16-x^2$ ($\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}\pitchfork\Delta^{Y}\bar{\alpha}$)である。ゆえに $16-x^2$ ($\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}\pitchfork\Delta^{Y}\bar{\alpha}$)は一つの平方でなければならない。

16($\overline{\iota\varsigma}\,\mathring{M}$)の辺と同じだけの単位を未知数の任意量から減じて平方する。それを $2x-4$($\varsigma\bar{\beta}\pitchfork\mathring{M}\bar{\delta}$)とせよ。その平方はしたがって$4x^2+16-16x$ ($\Delta^{Y}\bar{\delta}\,\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}\pitchfork\varsigma\,\overline{\iota\varsigma}$)である。それを $16-x^2$ ($\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}\pitchfork\Delta^{Y}\bar{\alpha}$)に等しいとせよ；双方から負の項を加え、同類項を同類項から差し引く。

この結果 $5x^2$が$16x$ ($\varsigma\,\overline{\iota\varsigma}$)に等しくなり、未知数は 16/5($\overline{\iota\varsigma}$ πέμπτων)になる。

したがって、求める数の一つは 256/25($\overset{\kappa\epsilon}{\overline{\sigma\nu\varsigma}}$)で、もう一方は 144/25($\overset{\kappa\epsilon}{\overline{\rho\mu\delta}}$)である。さて、この二つの数を加えると 400/25($\overset{\kappa\epsilon}{\overline{\upsilon}}$)となる。すなわち 16 ($\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}$)で、しかもそれらの数の各々が平方である。

ギリシャ語は P.Tannery 編纂版、訳文は『フェルマーを読む』(足立恒雄著) [33]を使用したが、算式・数字部分はギリシャ表記に代えた。

5. 負冪まで考慮された指数

負冪まで含めた指数法則を展開したのはギリシャでもヨーロッパでもなくイスラムの数学者であった。[14]イスラムの数学者は、5 世紀にアレキサンドリアで実質的に滅んでしまったギリシャ数学に加え、古代バビロニアの書記たちの数学、インド人の三角法も学び、それらを統合・発展させた。彼らがギリシャ人と大きく異なっていたのは世俗的な実学を評価し、少なくとも初期の頃は「聖なる知恵」への道筋と見なしていたことである。それ故、多くのイスラムの数学者達は理論だけではなく、その現実社会への応用にも意を砕いた。ムハンマド・イブン・ハサン・カラジー Muhanmmad ibn al Husayn al-Karajiمحمد بن الحسن الكرخى (953－1029：不詳)[15]は主著"Extrait du Fakhrî(代数学の栄光)"において代数学の狙いは「既知のものから出発して未知のものを決定すること」であることを明確に宣言し、これを達成するために算術的技法を磨き上げ、駆使した。このような目的意識のもとで、彼は指数の体系的な取り扱いを研究し、零冪が 1 であること及び初めて無際限に冪（x^n）とその逆（$1/x^n$）を表す命名法を確立した[16]。1853 年に出版されたヴェプケ Woepcke による訳注書で該当箇所の一部を引用しておく。

訳注書及びその訳を読むに際し、2 つばかり注意点を挙げておく。一つ、本書に現れるa^2のような記号がこの時代にあったはずはなく、ヴェプケが付けた注釈であること。二つ、例えばa^8は「مال（平方）　مكعب（立方）　مكعب（立方)」とでも名付けたのであろうが、アラビア語は右から左に読むので、下の試訳と順序が逆になっていること。

14 2 の負冪についてならば、B.C.100 年頃に、ジャイナ教の経典アヌオーガッダラスートラ Anuyogadwara-Sutra の中で既に扱われている。[2]

15 アル・カラジーの生涯は殆ど何も判っていない。それどころか、名前さえも 1933 年まではアル・カルヒーとされていた。『アラビア数学の展開』（ロシュディー・ラーシェッド著）[32]1.2 従って、次ページに引用したヴェプケの訳注書 p45 もカルヒーAlkarkhi になっている。また、なぜかアラビア語の Wiki で彼の名前を検索してみると、その名前はアル・カルヒーal-Karkhi الكرخي であった。

16 カラジーは数学的帰納法を初めて世に知らしめた人物（かつてはパスカルと考えられていた）でもある。この冪指数の定義も帰納的である。また、零冪が 1 に等しいことは、かつてはシュケが導入したと考えられていた。
次ページの無際限の冪の定義の仕方なんかも帰納法の創始者にふさわしく、帰納的である。

EXTRAIT DU FAKHRÎ.

I. PUISSANCES ALGÉBRIQUES (اجناس المجهولات ou مراتب المجهولات).

GÉNÉRATION.	NOM ARABE.	TRADUCTION DU NOM ARABE.	EX.
a	جذر ou شىء........ضلع	racine ou chose...côté.	2
$a^2 = a \cdot a$.	مال........ ....بسيط	carré..........surface.	4
$a^3 = a^2 \cdot a$.	كعب................جسم	cube..........solide.	8
$a^4 = a^3 \cdot a = a^2 \cdot a^2$.	مال مال	carré-carré.	16
$a^5 = a^4 \cdot a = a^3 \cdot a^2$.	مال كعب	quadrato-cube.	32
$a^6 = a^5 \cdot a = a^4 \cdot a^2 = a^3 \cdot a^3$.	كعب كعب	cubo-cube.	64
$a^7 = a^6 \cdot a$.	مال مال كعب	quadrato-quadrato-cube.	128
$a^8 = a^7 \cdot a$.	مال كعب كعب	quadrato-cubo-cube.	256
$a^9 = a^8 \cdot a$.	كعب كعب كعب	cubo-cubo-cube.	512

et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

1. 代数的冪

a	根または物（未知数）…辺	2
$a^2 = a \cdot a$.	平方…面	4
$a^3 = a^2 \cdot a$.	立方…立体	8
$a^4 = a^3 \cdot a = a^2 \cdot a^2$.	平方・平方	16
$a^5 = a^4 \cdot a = a^3 \cdot a^2$.	立方・平方	32
$a^6 = a^5 \cdot a = a^4 \cdot a^2 = a^3 \cdot a^3$.	立方・立方	64
$a^7 = a^6 \cdot a$.	立方・平方・平方	128
$a^8 = a^7 \cdot a$.	立方・立方・平方	256
$a^9 = a^8 \cdot a$.	立方・立方・立方	512

など上に無限大となるまで。

EXTRAIT DU FAKHRÎ.

II. VALEURS RÉCIPROQUES DES PUISSANCES ALGÉBRIQUES.

La *partie* (جزء) d'un nombre quelconque est ce qui, multiplié par ce 3r.
nombre, produit l'unité. Lorsque $a > b$, on aura $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}:\frac{1}{a^3}=\frac{1}{a^3}:\frac{1}{a^4}= \text{etc. à l'infini.}$$

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{a^2}=a^2:a.\quad \frac{1}{a^2}:\frac{1}{a^3}=a^3:a^2.\quad \frac{1}{a}:\frac{1}{a^3}=a^3:a.$$

Règle générale : $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a.$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}.\quad \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^3}.\quad \frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^4}.$$

Règle générale : $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}.$

$$\frac{1}{a}\cdot a^2=a.\quad \frac{1}{a}\cdot a^3=a^2.\quad \frac{1}{a}\cdot a^4=a^3.\quad \frac{1}{a}\cdot a^5=a^4.$$

$$\frac{1}{a^2}\cdot a^3=a.\quad \frac{1}{a^2}\cdot a^4=a^2.\quad \frac{1}{a^2}\cdot a^5=a^3.$$ 3v.

Règle générale : $\frac{1}{a^m}\cdot a^n=a^n:a^m.$

donc $\frac{1}{a^2}\cdot a^2=1.\quad \frac{1}{a^2}\cdot a=\frac{1}{a}.\quad \frac{1}{a^3}\cdot a^2=\frac{1}{a}.$

II．代数的冪の逆数の値

任意の数の一部は乗法単位が乗じられている。a > b の場合、$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ が成り立つ。

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}:\frac{1}{a^3}=\frac{1}{a^3}:\frac{1}{a^4}=\text{etc. 無限に}$$

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{a^2}=a^2:a.\quad \frac{1}{a^2}:\frac{1}{a^3}=a^3:a^2.\quad \frac{1}{a}:\frac{1}{a^3}=a^3:a.$$

一般的な規則として： $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a.$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}.\quad \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^3}.\quad \frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^4}.$$

一般的な規則として： $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}.$

$$\frac{1}{a}\cdot a^2=a.\quad \frac{1}{a}\cdot a^3=a^2.\quad \frac{1}{a}\cdot a^4=a^3.\quad \frac{1}{a}\cdot a^5=a^4$$

$$\frac{1}{a^2}\cdot a^3=a.\quad \frac{1}{a^2}\cdot a^4=a^2.\quad \frac{1}{a^2}\cdot a^5=a^3$$

一般的な規則として： $\frac{1}{a^m}.\mathrm{a}^n=a^n:a^m.$

故に、 $\frac{1}{a^2}\cdot a^2=1.\quad \frac{1}{a^2}\cdot a=\frac{1}{a}.\quad \frac{1}{a^3}\cdot a^2=\frac{1}{a}$

（注）：は÷と読み替える。

※1853 年に出版されたヴェプケ Woepcke による訳注書より抜粋拙試訳

6. 表によって明示された指数

更に、イブン・ヤフヤー・サマウアル Ibn Yaḥyā al-Maghribī al-Samaw'alالسموال بن يحيى بن المغربي (1125 頃-1174) は、19 歳のとき "al-Bāhir fī al-jabr (代数の驚嘆)" を書き、カラジーが言葉で表現していた判りにくい指数法則を次のような表を使って、より明解に説明してみせた。オリジナルは判りにくいので、Berggren により翻案された表を引用しておく。A は 1,B は 2 (以下同様) を表すものとし、負冪の部分には p (part の略)、他の冪は t(thing の略で根)、m(mul の略で平方)、c (cube の略で立方) の組合せによって表記されていることに注意すれば表の意味は理解出来よう。

	I pccc	H pmcc	G pmmc	F pcc	: E pmc	D pmm	C pc	B pm	A pt
2^n	$\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
3^n	$\frac{1}{27}\frac{1}{27}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}\frac{1}{27}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}\frac{1}{9}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

0 unit	A t	B m	C c	D mm	E mc	F cc	G mmc	H mcc	I ccc
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	3	9	27	81	243	729	2,187	6,561	19,683

こうしてサマウアルは表を使いながら、われわれが指数法則と呼ぶもの、つまり$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ の説明を始める。「二つの因数の積が属する順位と因数の一方が属する順位との間の距離は、もう片方の因数の属する順位と 1 の属する順位との間の距離に等しい。もし二つの因数がちがった方向にあるならば[距離は]最初の因数の属する順位から単位の方へと測らなければならない。しかし、もしそれらが同じ方向にあるならば、単位からの離れる方向に測らなければならない。」[17] "Episodes in the Mathematics of

[17] 訳を見る限りはサマウアルの表現はアルキメデスの「砂の計算者」に似ている。しかし、「砂の計算者」はアラビア・ルネサンスにおけるアラビア語訳ギリシャ科学書一覧にはない。『十二世紀ルネサンス』[34]p159－164

Medieval Islam "(J. L. Berggren 著)[10]p114 から重訳
翻案されたものは読み易いが、やはり原典の書きぶりにも興味がそそられよう。

مرتبة كعب كعب	مرتبة مال كعب	مرتبة مال مال	مرتبة الكعب	مرتبة المال	مرتبة الشيء	مرتبة الاحاد	مرتبة جزء شيء	مرتبة جزء مال	مرتبة جزء كعب	مرتبة جزء مال مال
٢٠	٢	٥٨	٧٥	١٢٥	٩٦	٩٤	١٤٠	٥٠	٩٠	٢٠
٢	٠	٥	٥	١٠						

degree cube cube	degree *māl* cube	degree *māl* *māl*	degree of the cube	degree of the *māl*	degree of the thing	degree of the unit	degree part thing	degree part *māl*	degree part cube	degree part *māl* *māl*
20	2	58	75	125	96	94	140	50	90	20
2	0	5	5	10						

"al- Bāhir fī al-jabr"　ibn Yaḥyāal-Maghribī Samaw□al 著　Ṣalāḥ Aḥmad, Rushdī Rāshid　編集 p45[18]と Jeffrey A. Oaks の翻訳[19]を併記しておく。アラビア語の原典が算用数字（アラビア数字）ではないことが判って興味深い。[20]このテーブルが下記の二つの式をそれぞれ表していることは容易に読み取れよう。サマウアルはこの表を使って上式を下式で割る２式の割り算を行っている。

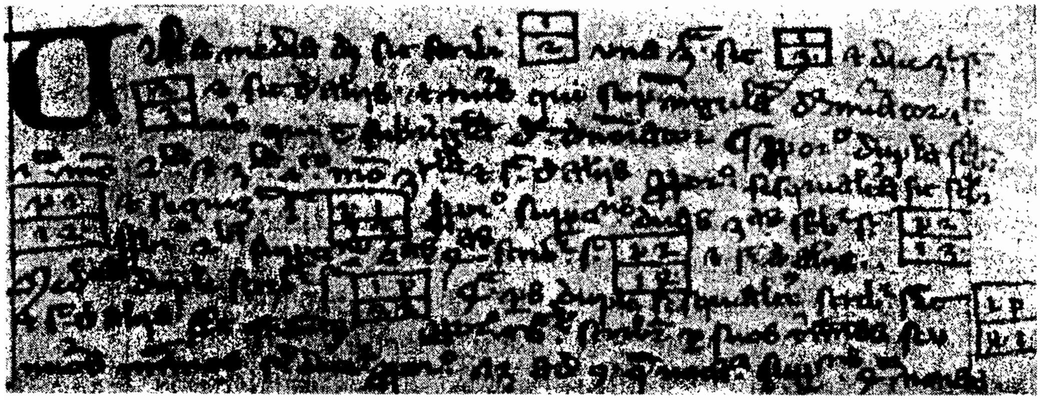
$$20x^6+2x^5+58x^4+75x^3+125x^2+96x+94+140x^{-1}+50x^{-2}+90x^{-3}+20x^{-4}$$

$$2x^3+5x+5+10x^{-1}$$

18 "Historias de al-Khwārizmī (5ª entrega). La cosa"　Luis Puig SUMA 66 Febrero 2011, pp. 89-100 より転載
19 "ALGEBRAIC SYMBOLISM IN MEDIEVAL ARABIC ALGEBRA"　Philosophica 87 (2012) pp. 27-83 [13]
20 この数字は東方アラビアで現代使用されているヒンディー型の数字と殆ど同じである。『数字の歴史』（イフラー）[27]p406

7. 分数冪まで考慮された指数

パリ大学で教鞭を取っていたニコル・オレム Nicole Oresme（1320－1382）は分数冪の計算規則をヨーロッパで初めて未出版原稿“Algorismus proportionum（比のアルゴリズム）[21]”（40 歳頃）において提示している。しかし、彼のアイデアはこの時代のヨーロッパでは進み過ぎていたこと及び正規の出版物として発表されなかったことも与って同時代人には影響を及ぼさず、分数冪もステヴィンの再発見を待たねばならなかった。また、彼は無理数冪の存在については示唆しているが、負冪や零冪についての言及はない。



ニコル・オレム Nicole Oresme（1320－1382）の 40 歳頃の手稿

二分の一は $\boxed{\begin{array}{c}1\\ \hline 2\end{array}}$ と書き、三分の一は $\boxed{\begin{array}{c}1\\ \hline 3\end{array}}$ 、そして三分の二は $\boxed{\begin{array}{c}2\\ \hline 3\end{array}}$ 、以下同様である。横棒の上の数は分子と呼ばれ、横棒の下の数は分母と呼ばれる。倍比（$\frac{2}{1}$）は 2^{la} と書かれ、三倍比（$\frac{3}{1}$）は 3^{la}、以下同様である。1 と$\frac{1}{2}$の比（$\frac{3}{2}$）は $\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{P}\,1\\ \hline 1\,2\end{array}}$ [22]、1 と$\frac{1}{3}$の比（$\frac{4}{3}$）は $\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{P}\,1\\ \hline 1\,3\end{array}}$ と書かれる。1 と$\frac{2}{3}$の比（$\frac{5}{3}$）は $\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{P}\,2\\ \hline 1\,3\end{array}}$ と書かれる。2 と$\frac{3}{4}$の比（$\frac{11}{4}$）は $\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{P}\,3\\ \hline 2\,4\end{array}}$ と書かれる。以下同様である。（$2^{\frac{1}{2}}$）は $\boxed{\begin{array}{c}1\,\mathrm{P}\\ \hline 2\,2\end{array}}$ 、$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ は $\boxed{\begin{array}{c}1\,\mathrm{P}\,1\\ \hline 4\,2\,2\end{array}}$ と書かれる。以下同様である。

『数学表記の歴史』[6]F.Cajori p91-93 と A source book in medieval science Edward Grant 編集[5]p 150-151 を参考にした重訳[23]

---

21 生前は出版されていない。1360 年頃に書かれたと推測されている。

22 現在の分数は比として認識されており、比 3/2 は $1\frac{1}{2}$ と考え、$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{P}\,1\\ \hline 1\,2\end{array}}$ と表現すると云うことであろう。

23 この二著間でも必ずしも手稿の解読・解釈がぴったり一致していない。

叙上のオレムの紹介で、「ヨーロッパで初めて」と付したのには理由があって、西暦紀元前 100 年頃に書かれたとされる幽邃なジャイナ教の経典アヌオーガッダラスートラ Anuyogadwara-Sutra の 142 節中に、既に次のような分数冪の計算が例示されているからである。「第 1 平方根(prathma-varga-mula)と第 2 平方根(dvitiya-varga-mula)を掛けると第 2 平方根の 3 乗(ghana)になる。第 2 平方根と第 3 平方根(tritya-varga-mula)を掛けると第 3 平方根の 3 乗になる。」これは現在の算式で表せば次のことを意味する。

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3 \qquad a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{8}} = \left(a^{\frac{1}{8}}\right)^3$$

また、同節には「世界の総人口は (2 の) 第 6 平方に第 5 平方を掛けた数、または(2 で)96 回割ることの出来る数である。」ともある。$2^6 = 64 \quad 2^5 = 32$ なので、これは次のように書ける。

$$\text{世界の総人口は} \quad 2^{64} \times 2^{32} = 2^{96}$$

これらは整数冪、分数冪に対する下記の指数法則をジャイナ教徒が良く知っていてことの証左であろう[24]。

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

24 足立恒雄氏に「インドではオレムよりも早くに分数冪が現れていたのではないか。」との指摘を頂いた。1928 年に発刊されたカジョリ[6]は当然としても、ブルバキ[29]やカッツ[22]でもオレムのことを分数冪を最初に考えた人物として扱っており、アヌオーガッダラスートラについては触れられていない。上記の内容は[2]を参考にした。日本語でなら『非ヨーロッパ起源の数学』[26]p337-338 に同様の記述がある。但し、アヌオーガッダラスートラの成立時期は、かなりの幅があり、特定出来ていないようだ。

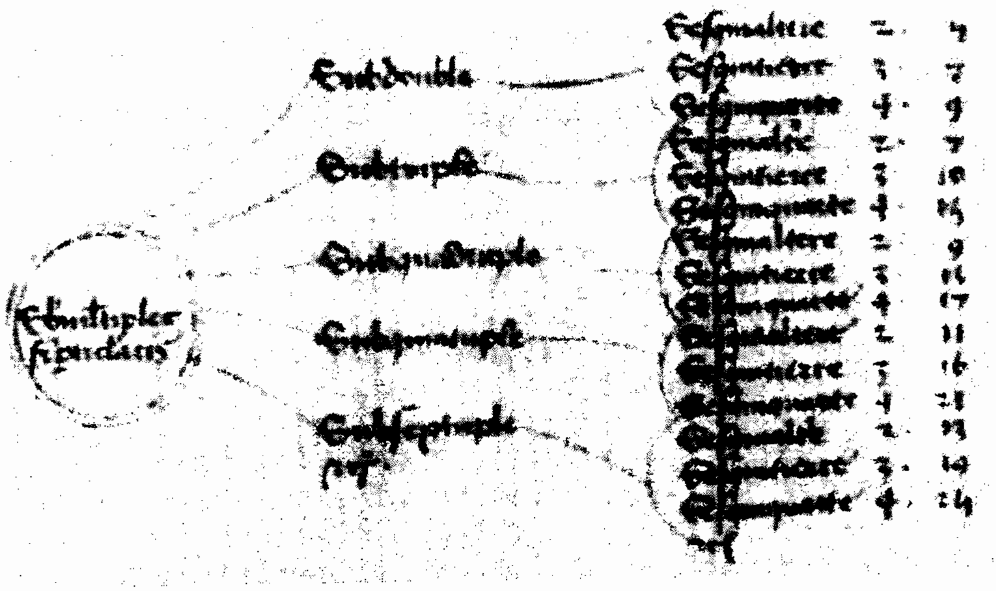
8. ヨーロッパで初めて零冪・負冪まで考慮された指数概念

オレムの約一世紀後、フランス人医師ニコラ・シュケ Nicolas Chuquet（1455－1487）は 1484 年（29 歳）、“Triparty(三部作)” で、ヨーロッパでは初めて負数や零まで含めた指数法則をリヨンで発表している。彼は指数に denominacions（ラテン語で「指名」と云う意味がある）と云う用語を与え、これが 0 の場合や負の場合も想定した考察を行っている。おそらく、中世比例論のキー・ワードである denominatio に由来するものと考えられるが、この概念の定義は人によって異なる[25]ので、シュケがだれの denominatio の定義に影響を受けたのかを特定することは著者には出来ていない。一応、オレムのものとするのが適当かもしれない。

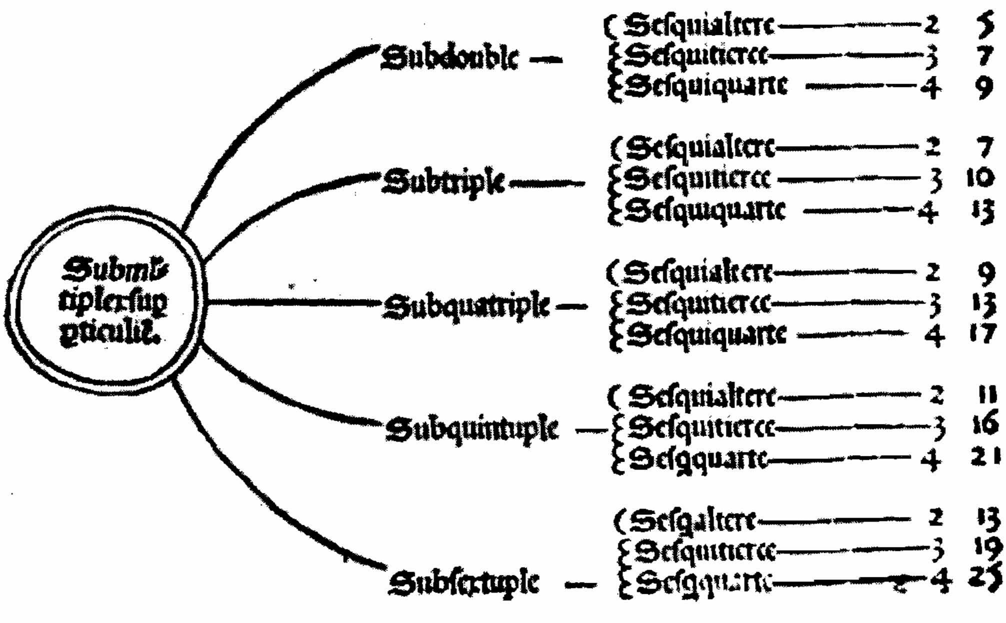
シュケがオレムの著書を読んで影響を受けていたかどうかは別として、少なくとも指数法則を負数や零まで拡張した点ではオレムを超えたが、分数冪を考察しなかったことでは後退した。こちらの書物も手写本に留まり、1880 年までは印刷されなかったのだから、オレム同様、直接的な影響は与えていない。しかし、シュケの手写本に学んだエティエンヌ・ドゥラ・ロシュ Étienne de La Roche が 1520 年にリヨンで出版し、1538 年に再版した “L' arismethique nouellement composee(最新算術集成)” は、次の図を見ても明らかなように、『三部作』を下敷きにして書かれたものであることが判っており、16 世紀にはこちらを通じてシュケの思想は広まった。したがって、『三部作』はまったく影響をあたえなかったわけではない、と言えよう。ちなみに、現在はシュケが「フランス代数学の父」と呼ばれているが、『三部作』が発見されるまではロシュがそう呼ばれていた。彼の現在の評価の中には「剽窃者」と云う厳しいものもある。確かに一言断っておけば良かったかもしれないが、知的所有権などほぼ皆無の時代であったことを勘案し、彼の「剽窃」あってこそシュケの思想が広まり、大いに数学の進歩に寄与したことにも心を致すべきであろう。

---

25 イタリアのカンパヌス、マートン学派のブラッドワーディーン、ニコル・オレムの三者の概念の比較、発展の様子は『中世の数学』（伊東俊太郎編）[35]「中世西洋の比例論」を参照せよ。また、『歴史の中の数学』（マイケル・S・マホーニィ著）[30]の第 3 章も参考になる。マホーニィは、デノミナティオ（denominatio）は、狭義では現代的に言えば比の値のことであり、デノミナティオは文字通りには命名という意味であるが、比の名を与えるところからこの術語が生じた、と注釈を付けている。



シュケの手稿(1484年)　[8]p64



最新算術集成（1520年）エティエンヌ・ドゥラ・ロシュ

いずれにせよ、この後、「指数の《算術数列》と冪の結果の《幾何級数》との、同型の理念が、もはや見失われずに進んでいく。」[26]

ここでは、シュケの手稿そのものではなく、Aristide Marre アリスティド・マレによって編纂された 1880 年出版の "Triparty" から p155-156（一部）を引用し、下線部分を訳しておいた。また、上述した Denominacions が 2 の指数として表に示されていることも見て取れるであろう。しかもその表が「零冪は 1 である」ところからはじまっていることにも注意して頂きたい。また、引用部分より少し前の部分では「零冪が 1 である」ことをきちんと文章で明示し、更に、シュケ独特の記法により「8^3に$7^{1\bar{m}}$を掛けると56^2になる」ことが記されている。これは現代の表記に直すと「$8x^3 \times 7x^{-1} = 56x^2$」のことであり、負冪まで含めた指数法則について彼が把握していたことが窺われる。ちなみに、彼は方程式の係数及び解に負数を認めたことでも代数学の歴史で特筆すべき存在であった。彼が負数の実在性を信じた裏にはリヨンで隆盛を極めた商業数学の影響があると言われている。実際、彼は「三部作」の他に「数の科学はいかに商業の問題に適用されるか」と題した手稿も残しているし、「負債」を負数で表すのみならず、解が負数になるときにそれを「負債」として解釈することも行っている。現在の我々が想像する以上に負数の実在性の発見に於ける複式簿記の占める位置は大きいのかもしれない。

但し、このシュケをしても複素数解になる方程式に対しては「不可能」と言わせしめている。また、彼は非アカデミズムの知識人であり、そのためスコラ哲学的な発想が薄く、技術者的な発想で物を捉えており、その著書を俗語で書いたことにも注意しておく必要がある。このような傾向は確実に拡大し、やがて 17 世紀科学革命の前哨とも言われる 16 世紀数学革命へと繋がる大きな歴史の流れの中に位置づけられるであろう。

26 『ブルバキ数学史』[29]p181 による。　『ボイヤー数学史 3』[4]第 1 章 6.では、「シュケはこの指数法則のことをオレームの比についての著作から知ったようである。」とあり、[8]でも同様の推測がなされているが、それを裏付ける証拠は見つかっていない。また、シュケの思想が一般に広まっていなかったことを示す事実として、1554 年のフランス人ジャック・ペルティエの著作には、ドイツ人シュティフェルの引用はあっても、フランス人シュケの引用はない、ことを挙げておく。

Nombres	Denominacions
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14

¶ Maintenant conuient scauoir que .1. represente et est ou lieu des nombres dõt le denomia.^{on} est .0. / 2 represente et est ou lieu des premiers dont leur denominacion est .1. / 4. tient le lieu des secondz dont leur denominacion est .2. Et .8. est ou lieu des tiers .16. tient la place des quartz .32. represente les quintz Et ainsi des aultres. ¶ Or tant que qui multiplie .1. par .1. monte .1. et pour tant que .1. multiplie par .1. ne se varie point ne aussi quelconque nombre que ce soit multiplie par .1. nest augmente ne diminue Et pour ceste 9sideracion qui multiplie nombre par nombre Il en vient nombre dont sa denominacion est .0. Et qui adiouste .0. auec .0. fait .0. ¶ En apres qui multiplie .2. qui est nombre premier par .1. qui est nombre la multiplicacion monte .2. puis apres qui adiouste leurs denominacions qui sont .0. et .1. font .1. ainsi la multiplicacion mõte .2.^{e} Et de ce vient quant on multiplie nombre par premiers vel e9^{a}. Il en vient premiers Aussi qui multiplie .2.^{e} par .2.^{e} Il en viẽt .4. qui est nombre second Ainsi mõte la multiplicacion .4.^{e} ¶ Car .2. multiplie par .2. font .4. et denominacion adiousteez contra .1. auec .1. font .2. Et de ce vient que qui multiplie premiers par premiers Il en vient secondz. Pareillemẽt qui multiplie .2.^{e} par .4.^{e} Il en vient .8.^{e} Car .2. par .4. mul-

20

(156)

32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20

tipliez et .1. auec .2. adioustez font .3. Et par ausi qui multiplie premiers par secondz, Il en vient tiers. Aussi qui multiplie .4.^{e} par .4.^{e} Il en vient .16. qui est nombre quart et pour ceste cause qui multiplie secondz par secondz Il en vient quartz ¶ Semblement qui multiplie .4. qui est nombre second par .8. qui est nombre tiers montent .32. qui est nombre quint Et par ainsi qui multiplie secondz par tiers vel e9^{a}. Il en vient quintz Et tiers par quartz Il en vient .7.^{es} et quartz par quartz Il en vient .8.^{es} et ainsi des aultres. ¶ En ceste consideracion est maifeste vng secret qui est es nombres pporcionalz. Cest que qui multiplie vng nombre pporcional en soy Il en viẽt le nombre du double de sa denomiacion come qui multiplie .8. qui est tiers en soy Il en vient .64. qui est six.^{e} Et .16. qui est quart multiplie en soy. Il en doit venir .256. qui est huyt.^{e} Et qui multiplie .128. qui est le .7.^{e} pporcional par .512. qui est le 9.^{e} Il en doit venir 65536. qui est le 16^{e}.

Triparty　Nicolas Chuquet（1455－1488）
(三部作　ニコラ・シュケ　1880 年出版)

…同様に、(指数が) 第 3 番の数字である 8 を第 2 番の数字である 4 に掛ける者は誰でも第 5 番の数字である 32 に成らしめる。こうして、第 3 番を第 2 番に掛ける、逆に第 2 番に第 3 番を掛けると、それは第 5 番になる。そして、第 4 番に第 3 番を掛けると第 7 番となり、第 4 番に第 4 番を掛けると第 8 番になり、以下同様である。

この考察において、明らかな比例数の秘密がある。第 3 番である 8 にそれ自身を掛けると第 6 番である 64 になるように、その秘密とは、いかなる比例数に対してもそれ自身を掛けるならば（その結果出来あがる数の指数は）元の数の指数の 2 倍の数になる、と云うことである。そして第 4 番である 16 にそれ自身を掛けると第 8 番である 256 になるはずである。更に、第 7 番である 128 に第 9 番である 512 を掛けると第 16 番である 65536 になるはずである。
"Nicolas Chuquet, Renaissance mathematician: a study with extensive translations of Chuquet's mathematical manuscript completed in 1484"（Graham Flegg, C. Hay, B. Moss）[8]を参考にして、関連するところの一部（下線部）を重訳した。

ここで述べられている"秘密"とは、要するに下記の指数法則のことである。Denominacions の表と合わせて見れば 1 世紀後の対数発見の礎石が既に出来上がっていることに気付かされるであろう。

$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　　$(a^m)^n = a^{mn}$

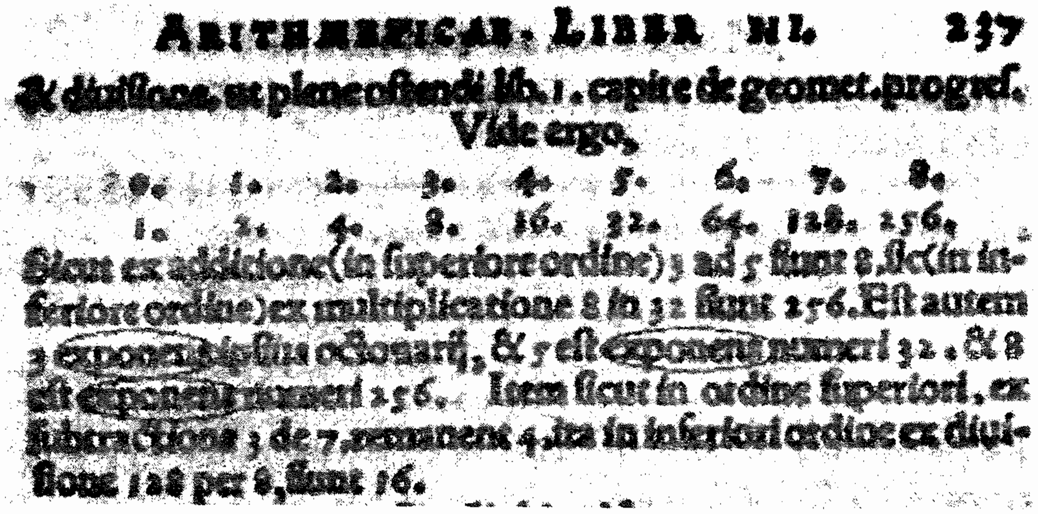
先に、シュケの『三部作』はまったく影響をあたえなかったわけではない、と言ったが[27]、例えば、シュケは 14 世紀にイタリアで使われはじめた millione を基にしてその乗冪を byllion,tryllion,quadrillion, quyllion,sixlion, septyllion,octyllion,nonyllion で表すことで現代に連なる命数法を確立した。この方法の秀逸さを理解するためには煩雑なインド命数法の欠点を思い起こせば良い。また、この名前の付け方は指数を熟知した人間ならではのもので、アルキメデスが指数を利用して巨大数の表現したことを彷彿させる。但し、アルキメデスの場合が日常生活に全く無縁な宇宙論についての問題解決のためであったのに対し、シュケはおそらく日常的な商取引を背景として考察したものと思われる。似たような創造的活動であっても、その動機が全く違うことに留意する必要があろう。

ちなみに、Cajori はこのような命数法はシュケが嚆矢であると記しているが、実は 9 年早く Jehan Adam が似たようなことをやっていた。[8]

[27] 実は、これは次の言葉に対する疑問の表明でもある。「しかし、残念なことに、『三部作』は印刷されることもなく今日でも手稿の形で残っているだけである。そのいくつかの部分は、1520 年にエティエンヌ・ド・ラ・ロッシュの著作の中に組み込まれたが、この著作もシュケ自身のものも大きな影響は持たなかった。」『カッツ　数学の歴史』[22]

9. 指数としての exponens の誕生

さて、現在使用されている exponent のもとになったラテン語 exponens（エクスポネーナス）に指数としての意味を与えたのはドイツ出身で１６世紀最大の代数学者とも言われるミカエル・シュティフェル Michael Stifel（1486-1567）であった。



ARITHMETICAE. LIBER III. 237

& diuisione, ut plene ostendi lib. 1. capite de geomet. progres.

Vide ergo,

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Sicut ex additione (in superiore ordine) 3 ad 5 fiunt 8, sic (in inferiore ordine) ex multiplicatione 8 in 32 fiunt 256. Est autem 3 exponens ipsius octonarii, & 5 est exponens numeri 32. & 8 est exponens numeri 256. Item sicut in ordine superiori, ex subtractione 3 de 7, remanent 4, ita in inferiori ordine ex diuisione 128 per 8, fiunt 16.

Arithmetica Integra　Michael Stifel

（算術全書　ミカエル・シュティフェル 1544 年版）

算術書Ⅲ.

下記を参照せよ。

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

たとえば、(上の順序で) 3 に 5 を加えることで 8 が作られるので、(下の順序で) 8 と 32 の掛けることで 256 が作られる。しかしながら、3 は 8 の指数で、5 は 32 の指数である。そして 8 は 256 の指数である。繰り返しになるが, 上の順序で 7 から 3 を差し引くと 4 が残り、下の順序で 128 を 8 で割ると、それらは 16 になる。

(拙試訳)

1544 年[28]、既に老境に差し掛ったとも言える 58 歳にして、彼はこの専門用語を自著“Arithmetica Integra（算術全書)”において初めて用いた。このような学術書はラテン語で書かれるのが当時の慣習であり、彼もこれに従ったわけである。ラテン語 exponens は語源的には“ex-” + “ponere”（ポネイレ）と分解され、“ex-” (外に)と“ponere” (置く)の合成語として、「外に置く」という意味になる[29]。もしシュティフェルが a^n の表記法まで考え出したのであればこの意味は誠に適切と言わざるを得ないのだが、この表記はデカルトによるものであり、シュティフェルは用語こそ創設したが、表記は特に与えていない。また、この語源から来る語感を絶対視してはいけないと考えるもう一つの理由として、後述するステヴィンの○式記号がある。もしステヴィンがシュティフェルの著書を読んでいて、exponens に指数の意味が与えられていたことを知っていたにもかかわらず、あのような記号を創案したならば、その記号は随分と語感と乖離していることになる。彼の記号はどう見ても「外に置く」には当たらないからである。従って、exponens の語源としては、一般的な意味である「説明する」に由来すると考える方が自然であろう。つまり、「何回掛け合わされているかを説明した数」あるいは「掛け合わされた因数と１との距離を説明した数」であるから、exponens なのである。但し、この辺の解釈は著者の憶測がかなり入っていることを正直に申し述べておきたい。[30]

ミカエル・シュティフェル
Michael Stifel
(1486-1567)

上図に“Arithmetica Integra”の p237 から一部を抜粋し、更にその一部を訳しておいた。もっとも、ラテン語が読めなくても、3 が 8(octo)の指数であり、5 が 32 の指数、8 が 256 の指数であることを言っているらしいことは容易に推察できるであろう。興味のある方は更に p249-250 も覗いて見られると良い。−3 が 1/8 の指数であることにも触れられている。

28 この年までアルキメデスの「砂の計算者」は出版されていない。[17]従って、シュティフェルが「砂の計算者」を読んでいた可能性は低い

29 Oxford English Dictionary を含む膨大なソースを持つネット上の語源辞典を調べるとつぎのような説明がある。exponent (n.) 1706, from Latin *exponentem* (nominative *exponens*), present participle of *exponere* “put forth” (see *expound*). A mathematical term at first; the sense of “one who expounds” is 1812. As an adjective, from 1580s.

30 小島順氏から expones の語源的な指摘に対する著者としての回答でもある。

このようにexponentと云う半永久的に使用されるであろう用語の原語を創出したシュティフェルであるが、司祭と云う宗教家としての一面も持っており、ルターの宗教改革に賛同し、初期の信奉者の一人にもなった。彼は「言葉の計算」と呼んだ一種の数秘術により聖書の暗号を解読したと信じ、1533年10月18日に世界は終わりを迎えると予言した。不幸にして、彼の教区の百姓たちはこの予言を信じ、有り金残らずすべてを使いはたしてしまった。シュティフェルは自分の予言を信じた信徒たちと伴に天に召されると確信していたのだろうが、気がつけばビッテンベルグの監獄にいる罪深い己が姿を見ることになった。当然のこととして、自分の教区から解任され、自宅軟禁の憂き身にあう。しかし、予言癖が治ったとのことで、ルターの口利もあり、1535 年に別の教区を与えられた。この後、「言葉の計算」ではなく「式や数の計算」に精を出し、代数の専門家として大成する。“Arithmetica Integra（算術全書)”はそんな彼の研究の結実である。しかし、「言葉の計算」への情熱も失っていなかったようで、晩年に2冊の本を書いているらしい。exponentがこのような中世と近世の両面を持つヤヌス的ルネサンスの知性によって創設されたと云う歴史的事実は数の風景、或いは数と云う現象の受け取り方もまた他の文化と同様に変革を余儀なくされたことを象徴しているのかもしれない。

10. フランス語の指数 exposant 誕生

シュティフェルがラテン語の exponens に指数の意味を与えてからわずか 10 年後の 1554 年、37 歳のフランス人数学者ジャック・ペルティエ JacquesPeletier[31]（1517-1582）は“ L'Algèbre（代数）”を出版した。この本の中でフランス語による指数 exposant（イクスプゾン）が使われている。

8 PREMIER LIVRE

nous fournìt dé térmés consecutiz, pour exposer les nombrés Radicaus e leurs Sings: commé vous voyèz par la Tablé ici misé.

0,	1,	2,	3,	4	5,	6,	7,	8,	9,	10,
1,	℞,	ζ,	ϙ,	ζζ,	β,	ζϙ,	bβ,	ζζζ,	ϙϙ,	ζβ,
1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512,	1024,

11,	12,	13,	14,	15,	16.
cβ,	ζζϙ,	dβ,	ζbβ,	ϙβ,	ζζζζ.
2048,	4096,	8192,	16384,	32768,	65536.

Au prémier rang, ét la Progression Aritmetiqué, sélon la consecution naturéllé des Nombrés: E l'vnite, qui ét au déssus dé ℞, sé nommera l'exposant dé cé siné ℞: e 2 qui ét au déssus dé ζ, sera l'exposant dé cé siné ζ: E 3, l'exposant dé ϙ: 4, dé ζζ, e einsi par ordré.

L'Algèbre　　Jacques. Peletier

（代数 ジャック・ペルティエ 1554 年版）

31　幾何学問題の解法に負根の使用を了解した最初の人でもある。『初等数学史』（カジョリ）[7]p328

…数の基部とそれらの記号を明示するために、我々は連続した項を提示する：ちょうど、ここで（下記のような）表を設定することによって（それを）参照することが出来る。

（表部分：同原文）

最初の行、そしてそれは等差数列なのだが、に対し、自然な連続的数に応じて：1 より、上記の：その数字は記号の<u>指数</u>である。2 は上記の、その文字は記号の<u>指数</u>である。3 はの<u>指数</u>であり、4 はの順番による

（拙試訳）

この時代の出版事情やフランス語がこの当時の非学術用語であることを考え合わせれば驚くべき対応の速さである。そういう意味で、これがフランス語での指数の初出文献である可能性はかなり高いと思われる。また、本書のｐ１から p2 には何人かのアラビア人数学者の名前とカルダーノやピサのレオナルド、ルカ・パチョリ、イアン・シャヤベー、クレットール・イェンニエーCretosle Ianuer、アダム・リーゼ、ペドロ・ヌネシュ[32]、ディオファントスの名と共にシュティフェルの名前も明示されていて、シュティフェルの影響が裏付けられる。但し、既に注意したようにシュケの名前はない。

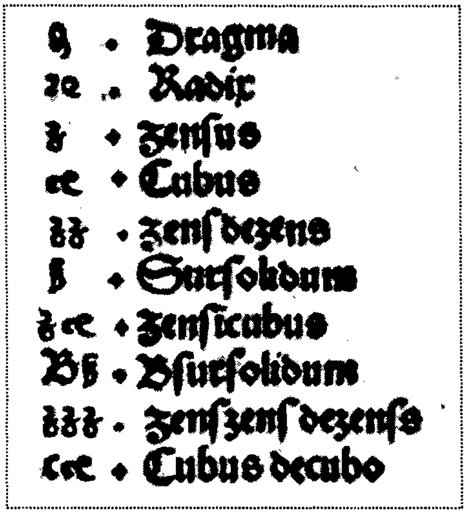
---

32 『カッツ　数学の歴史』[22]によると、ヌネッシュは 1532 年に “Libro de Algebra” をポルトガル語で著わし、1567 年にスペイン語に翻訳して出版したとあるが、1554 年に出版されたペルティエの著書において既にヌネッシュの著書はスペイン語である旨の記述があり、辻褄が合わない。恐らく、ウォーリスの “Treatiseof Algebra（代数論）” にある歴史的考察をそのまま引用したからであろう。カジョリは『初等数学史』[7]p340 で本書に対して、次のような評価が与えた。「そのうち歴史の部分は信用できないもので、価値あるものではない。しかし、他の部分は傑作であって、内容はおどろくほど豊富である。」

但し、著者にはこのカジョリの言い方もいささか一面的ではないかと感じられた。著者はウォーリスの代数論の歴史的部分を読んでみたが、確かにウォーリスの偏見に満ちており、歴史を公平な立場で叙述しているとは言い難いのだが、逆にその稚拙であったり、先入観を持っている点が面白いのである。Jacqueline A .Stedall のような歴史家がこの本をネタにして 17 世紀イギリスの代数学の普及の歴史 “A Discourse Concerning Algebra” [11]を書いたくらいだから、読み方さえ間違わなければ、決して無価値ではない。

本文中に現れる見慣れない記号はクリストル・ルドルフによる「未知数のべき表記法」である。ルドルフは、既に紹介済のミカエル・シュティフェルと並んで 16 世紀前半における最も重要なコス代数家[33]として有名である。シュティフェルの算術全書にも同様の記号が散見されるので、ペルティエはそこから学んだのであろう。

ルドルフによる未知数のべきの表記法



dragma	⇔	1
radix	⇔	x
zensus	⇔	x^2
cubus	⇔	x^3
zens de zens	⇔	x^4
sursolidum	⇔	x^5
zensicubus	⇔	x^6
bissursolidum	⇔	x^7※誤植訂正
zens zens de zens	⇔	x^8
cubus de cubo	⇔	x^9

Die Coss Christoffs Rudolffs: mit schönen Exempeln der Coss
Christoff Rudolff、Michael Stifel fol63
(未知数　クリストル・ルドルフ：未知数の素晴らしい例付き
クリストル・ルドルフ、ミカエル・シュティフェル 1571 年出版)

著者は本書の存在をナンシー大学が管理するネット上のフランス語の語源辞典（Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales）から知った。ただ、この語源辞典では出版年が 1620 年とあったが、本書の 3 ページ目に 1554 と明記されている。語源辞典の誤植であろう。

また、ネットではない大型の辞典でも調査したところ、Le Grand Robert de la langue française : du dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française によると、exposant の初出は 1389 年だが、数学用語としては 1620 年（in D.L.）であった。例文にはダランベールの文章が収載されていた。Trésor de la langue française :

[33] 15,16 世紀のイタリアやドイツでは代数のことを「Coss の技法」と呼んだ。ネッセマン式の区分けなら、省略代数に分類される。この Coss はイタリア語の cosa(物)に由来しており、通常は代数方程式の未知数に与えられる名称である。

dictionnaire de la langue du XIXe et du XXe siècle (1789-1960)も調査したところ、ブルバキの歴史を参照している部分があったのがおもしろかったが、初出は判らない。Grand Larousse De La Langue Française 1986、で調査すると、初出として Pascal による 1658 年の著書があったが、勿論、ジャック・ペルティエの方が 100 年以上早い。

11. 初めて記号化された指数概念

さて、オレム亡き後、久しく失われていた分数冪の概念を再発見したのは小数をヨーロッパに広めた立役者でもある南ネーデルランドのブリュへ生まれのシモン・ステヴィン[34]Simon Stevin(1548-1620)であった。彼はどのようにこれを世に知らしめたのであろうか。

『カジョリ初等数学史』[7]を見ると、叙上のオレムの成果は、その当時全く無視され、「ステヴィンの革新も最初の間は不問にされたが、ついには永久の所有物となった」ことが綴られている。更に、本書には以下の記載があった。

①, ②, ③はそれぞれx, x^2, x^3を表す。彼はこの記号を分数指数にまで拡張した。すなわち、

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, などは$x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$ などを意味する。

・・・・・

このようにして両方の初期の記号の二つが、今日まで伝わった。ドイツの根号記号とステヴィンの分数指数とである。現代の学生は、この両方の記号について算法を知る必要がある。彼らは$\sqrt[3]{a^2}$の意義や、これが$a^{\frac{2}{3}}$に等しいことを学ばねばならない。　『カジョリ初等数学史』[7] p336-339 抜粋

そこで、この分数冪の記号が表記されているページを探して、“L' arithmetiqve de Simon Stevin de Brvges.（シモン・ステヴィンの数学著

---

34 講演の際、「ステヴィンではなくスティーヴンと発音する方が原音に近い。」との指摘をいただいた。著者の方で、その後、いろいろな定評のある著作、例えば[65],[22],[44]、でこの発音について調査したが、すべて「ステヴィン」であった。また、ネット上の Wiki もまた同様であった。しかしながら、オランダ大使館へメールで確認したところ、係官の個人的意見との条件付きではあるが、「ステーヴィン がオランダ語の原音に近い」との回答をいただくことが出来た。一方、ベルギー大使館からは「カタカナにするとステヴェンに近い」との回答をいただいた。これらの調査結果を踏まえ、著者は現状定着している「ステヴィン」を踏襲することにした。

作集)”の全頁（912 ページ）を捲ってみたが、どうにも探し当てることが出来なかった。他の版にはあるのだろうか、などと考えていると、次のような一節を本書のp21（次ページ引用図）に見つけることが出来た。

DES DEFINITIONS. 21

que unité, ſeront tous docides, & eſtant unité, ſeront tous cubes: mais eſtant moindre que unité, ſeront tous plinthides.

QVE LES DIGNITEZ OV DENOMINATEVRS

des quantitez ne ſont pas neceſſairement nombres entiers, mais potentiellement nombres rompuz & nombres radicaux quelconques.

Il eſt aſſez notoire à ceux qui s'exercent en computations algebraiques (car c'eſt à eux que nous parlons ici) que quand il y a extraire racine quarrée de (1), ou de (3), ou bien racine cubique de (2) & de ſemblables, qu'il faut dire, que c'eſt racine d'autant. Par exemple, racine quarrée de 4(1) ſe dict √ 4(1); la raiſon eſt, qu'il n'y a en uſe aucunes algebraiques quantitez qui pourroyent autrement ſignifier telles racines. Toutesfois le $\frac{1}{2}$ en circle ſeroit le charactere de racine de (1), parce que le meſme (ſuivant la reigle de multiplication des autres quantitez) multiplié en ſoy donne produict (1), & par conſequent $\frac{3}{2}$ en un circle ſeroit le charactere de racine quarree de (3), par ce que telle $\frac{3}{2}$ en circle multipliee en ſoy donne produict (3), & ainſi des autres; de ſorte que par tel moyen on pourroit de toutes ſimples quantitez extraire eſpeces de racines quelconques, comme racine cubique de (2) ſeroit $\frac{2}{3}$ en circle, &c.

L' arithmetiqve de Simon Stevin de Brvges.
算術　1585 年出版
（シモン・スティヴィンの数学著作集　1625 年版）

これよりステヴィンが直接的な記号として、分数冪を定義していなくても、文章で同値の内容、例えば丸のなかの 1/2 は①の平方根の記号を意味するし、丸のなかの 3/2 は③の平方根、②の立方根は、丸の中の 2/3 を意味する、を示唆していたことが確認された。

位数または分母は整数とは限らないが、
潜在的に数は任意の根に分解される。

それは代数計算の練習で非常によく知られている（だからこれからここでわれわれが話すことなのだが）、①や③の平方根または②の立方根が抜き出せた場合、そして他の場合も同様に、これらはすべて根であると言わざるを得ない。例えば、4①の平方根は√４①である。その理由としては、もしそうでなければ、根として示唆される可能性のある代数的量に利用出来ないものがあることになるからだ。

全ての丸 1/2 は①の平方根の表記である、なぜなら（他の量についての乗法規則により）それ自体を掛けた同じものが①を生成するからである。それ故、丸 3/2 は③の平方根を表示式であり、その結果、丸 3/2 はそれ自体を掛けることで③を生成する。そしてその他の場合も同様である；そのため我々はそのような簡単な構成要素により任意な根号量を引きだすかもしれない。たとえば②の 3 乗根が丸 2/3 であるように、等々。

（拙試訳）

ボイヤーによると「ステヴィンは、分数のべき指数を実際に使うことはなかったにもかかわらず、丸のなかの 1/2 は平方根、丸のなかの 3/2 は立方の平方根を意味するであろうとはっきり述べている。[35]」カジョリ自身が『初等数学史』[7]より後に著わした『数学表記の歴史』[6]には、この分数冪記号の表記はない。スミスの『数学史』を見ても同様であり、おそらくカジョリの間違いであろう。殆どケアレスミスのような誤りであり、目くじらを立てる必要もないのだが[36]、同じ誤りがグレイゼル[20]や[7]を引用したと思われる邦書の数学史書にも散見されていたので、敢えて明示した。

35 『ボイヤー　数学の歴史３』[4]p75

36 ボイヤーなんかは『数学の歴史』序文で次のように言い放っている。「これだけの範囲を扱う本に、個々の数値の小数点同様、個々の日付けについても正確なことを期するのはおろかなことであろう。」

さて、ステヴィンの記号について、瞥見を述べておく。既述のように彼は10進小数をヨーロッパに広めることに貢献したのだが、具体的には『十分の一法』と云う小冊子を書いたことによる。ここでの小数記号は上記の冪指数記号と同じ、丸付数字を使用するものであった。例えば、32.57を彼は 32⓪5①7②と表記する。この同一性は偶然でも、印刷業者の都合でもなく、恐らくステヴィン自身の冪指数の発想が10進位取り記数法と密接な関係性を持っていたことの証左であろう。例えば、32.57×89.46 は「32⓪5①7②掛ける 89⓪4①6②」であるわけだが、先ずこれらの数を整数と見なして 3257×8946＝29137122 を計算し、その末尾指数④をそれぞれの末尾指数②と②から指数法則 2+2=4 によって求め、これを末尾に付記すれば自然と 2913⓪7①1②2③2④が求まる。除法も同様である。このように彼が例示したこの記数法を使った計算例を辿ってみれば著者の推測に得心が行くであろう。これはステヴィンの冪記号に対する内的理論史的立場からのアプローチと言ってよかろう。

一方の問題提起として、そもそも彼はなぜ『十分の一法』のような書物を書いたのか。そのモティベーションはなにか。このような疑問が湧いて来よう。これらに対する謎解きは外的要因史的立場から分析しなければ決して本質には辿り着けないであろう。詳細は[65]2. 10章.9を参照して頂きたいが、要約して言えば、彼は伝統的なアカデミズムの人ではなく、新しい科学の流れを生み出し、推進した在野の技術者であった。そのため、意識的にアカデミズムの標準語であるラテン語ではなく、より一般の技術者に読んでもらうために俗語によって本を執筆した。従って、その執筆の目的はスコラ学的な本質の究明を求めたものではなく、極めて実利的、実務的に有用な技術を率直に、判り易く示すことであった。

更に、16世紀における、非アカデミズム人によるステヴィンのような行動規範は決して特別なものでは無かった。つまり、ネピアの対数概念の導入が、大航海時代の航海術の必要性や天文学から生じた三角関数との関連から導入されたように、ステヴィンの指数記号の導入は、社会的に力を持ちつつあった新興インテリ勢力としての「天体観測者、測量技師、絨毯検査官、ワイン計量者、立体計測者、貨幣鋳造者、そしてすべての商人たち[37]」が求めた社会の要請の延長線上にあったと考えるべきなのである。

---

37 『十分の一法』の冒頭部分。ステヴィンはこのような階層の人々のために本書を執筆した。

12.　初めて記号化された分数冪指数概念

前節で、「ステヴィンは、分数のべき指数を実際に使うことはなかった。」と断言したが、それではこのような丸付き分数冪記号は無かったのかと言われれば、実はある。叙上のステヴィンの著作の編集をしたアルベール・ジラール Albert Girard が "Invention nouvelle En L'Algebre (代数学の革新)[38]" で、下の引用を見て判るように、印刷が少し見づらいが 49 の前の丸付数字の中身は 3/2 である。

このような分数冪の記号化は 47 年後にニュートンによって達成されるのだが、それまで誰もジラールのアイデアを引き継ぐ者はいなかった。

Des Caracteres des puiſſances & racines.

Combien que les marques ②, ③, ④ &c. denotent les puiſſances, ſecondes, tierces, quartes, c'eſt à dire quarées, cubes, quaré-quarées &c. leſquelles on à fait ſervir ſeulement entieres, mais eſtant rompues le numerateur eſt la puiſſance, & le denominateur la racine, comme $\frac{3}{2}$ 49, le 3 ſignifie la puiſſance cubique, & 2 la racine quarée; qu'on peut prononcer la puiſſance tierce de la racine ſeconde de 49, & communement le cube de la racine de 49, ou ce qui eſt tout un, la racine quarée du cube de 49, car c'eſt touſiours 343.

Invention nouvelle En L'Algebre　　Albert Girard
(代数学の革新　アルベール・ジラール　1629 年版)

冪と根の表記記号

どのように表記②,③,④等に対して第 2、第 3、第 4 の冪が表示されるだろうか。すなわち平方、立方、平方·平方（4 乗）等であり、これらがちょうど整数の場合の使い方であることが知られている。しかしながら端数（分数）の場合に対しては、分子は冪であり、分母は根号である。ちょうど（3/2）49 のようなもので、3 は立方を、そして 2 は平方根を意味する。49 の 2 乗根の 3 乗であると言える。そして、通常 49 の平方根の立方、またはこれがすべてなのだが、49 の立方の平方根でもある。なぜならそれは常に 343 だからである。

（拙試訳）

[38] 本書は代数学の基本定理「すべての代数方程式は、その式に現われる最高次の項の次数と同じ個数の解を有する・・・」の、証明抜きではあるが、初出文献として有名である。

13. 指数としての index の誕生

「指数」の西洋の語源がシュティフェルの exponens であることははっきりしたが、「指数」にはもう一つ index と云うまったく異なる語源があり、現在も微妙な使い分けをしながら併用されている。

1586年、ニュールンベルグの著名な数学者一家の出身である43歳のラザルス・シェーナーLazarus Schoner(1543–1607)は自らが心酔する14年前に非業の死を遂げたペトルス・ラムス Petrus Ramus（1515-1572）[39]の著書"Petri Rami arithmetices libri duo, et algebrae totidem（ペトルス・ラムスの算術二冊と代数同冊　ラザルス・シェーナー補注)"の p199 に対して左記のようなコメント（イタリック部分）を付記いているのだが、そこで彼は正整数のみならずシュティフェルのように分数に対しても指数を使うと云う明らかな進展を見せた。そのとき、シェーナーはシュティフェルが exponens と名付けたところを index と定義した。これがもう一つの「指数」の語源の由来である。下図を見ると上の方に正整数冪、下の方に負冪が例示されているが、共に零冪の指数部分は、ローマ数字を使っているせいか、ブランクとなっている。しかし、零冪が1であることを想定していたであろうことは、そのブランクの下に1が明記されていることから明らかである。実際、本書p310では、同様の表で零冪の指数としてアラビア数字の0が記されている。また、少なくともシェーナーがシュティフェルの『算術全書』を読んでいたことは、本書のp300で引用が明記されていることから間違いない。それにも拘わらず、指数として敢えて exponens ではなく index を採択した背景にはラムスへの敬意があるのではないかと著者は推測している。つまり、ラムスはシュティフィルほど明確に指数を定義し、説明を加えたわけではないが、簡単に示唆するような文章は残しており、例えば、次のような一節では index が使われている。

In multiplication figuratorum valorum facti, in divisione quoti etiam <u>index</u> quaetitur, & dicitur species emergens.

乗法計算において形作られた値があり、除法計算においても商<u>指数</u>が捜し求められていた、そしてその種（の指数）が現れている、と言われている。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（拙試訳）

39 フランスの著名な学者で、初めて数学をパリ大学の教科として認めた。複雑なアリストテレスの推論を三段論法の推論規則の形にまとめるなど大きな功績があったが、聖バーソロミューの虐殺で命を落としている。

corum factoribus respondentium. *Ut esto progressio subdupla aliquot terminorum puta sex 1. 2. 4. 8. 16. 32, & quaeratur quotus deinceps sit futurus 128. factus á quarto 8. per quintum 16? Hic termini arithmeticae progressionis ab 1. per differentiam 1. supernotetur terminis multitudinis geometricae, ut quo quisq; loco sit demonstrent hoc modo:*

I. II. III. IIII. V.

1. 2. 4. 8. 16. 32.

Vides duobus datis 8. & 16 respondentes indices 3 & 4 facere 7. Dices igitur 128 factum á multitudinis termino tertio per quartum esse multitudinis terminorum septimum, universae veró progressionis uno loco remotiorem, hoc est, octavum. Atq; ita datis factoribus & indicibus, quaeritur & invenitur per multiplicationẽ geometricorum terminus certius remotior, perq; indicum arithmeticorum additionem eius loci monstratur index.

Eadem ratio est in fractorũ progressione, ut in hoc exemplo: I. II. III. IIII. V.

1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$.

N 4

Petri Rami arithmetices libri duo, et algebrae totidem Lazarus Schoner
（ペトルス・ラムスの算術二冊と代数同冊 ラザルス・シェーナー補注 1586年版）

・・・2 倍化された 6 つの数 1,2,4,8,16,32 のようないくつかの項のもとで進展させること、そしてそれは 4 番目の項である 8 が 16 倍されることによって 128 になるように、いくつの数が引き起こされて前に進むのであろうか？この場合、初項が 1 で公差が 1 の等差数列の項が多くの幾何学的数列の項の隔たりをもって、それが唯一の場所であることを示している。

Ⅰ. Ⅱ. Ⅲ. Ⅳ. Ⅴ.
1. 2. 4. 8. 16. 32.

指数 3 と 4 に対応する二つの与えられた数 8 と 16 から指数 7 に対応する数を見つけよ。3 と 4 の集まりが 7 であると云う視点から、この数字が 128 であると言うことが判る。実際のところ、一つ先に離れた位置、それは 8 とするのが適切であろう。そして、そのように与えられた因子と指数が、幾何学的数列の中で離れて確定した項と項の乗法により、その場所に表示された指数が算術加算されることによって、研究され発見された。

同様のことが、この例のように、前方に進展する分数に対しても成立する。

Ⅰ. Ⅱ. Ⅲ. Ⅳ. Ⅴ.
1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$.

（拙試訳）

この後、現在に至る併用の時代に突入するのであるが、その併用のされ方は国と時代のみならず個人によって異なる。特筆すべきは、イギリスが当初、index が優勢であったことである。これは、ラムスの死後、イギリスに於いてラムス主義が影響力をもっており、その結果、ラスム主義者であるシェーナーの著作が英語へ翻案されたことによるのかもしれない。[40] 本件についての詳細は、後述するであろう。

40 ラムスの論理学はプロテスタント諸国では非常に人気を集めたが、その理由の一つとしては、かれが聖バーソロミューの大虐殺で殉死したからということも考えられる。『ボイヤー数学史 3』[4]第 1 章 17 p35

14. 現在の指数記号の誕生

この後、ヴィエトが代数学を革命的に発展させ、デカルトへの露払い以上の役割をやってのけるのだが、こと指数表記については未だ「言語代数」や「省略代数」に留まっており、むしろシュケよりも後退してしまうところが歴史の不思議さである。

しかし、ヴィエトは、先人達から完全に離れたわけではなかった。彼はべきに対して、ボンベッリとシュケが提案したような指数ではなく、言葉や省略記号を使い続けている。A^2, B^3あるいはC^4を使う代わりに、ヴィエトは *A quadratum,B cubus* や *C quadrato-quadratum* と書き、1番目と3番目については、ときどき *A quad* や *C quad-quad* と省略して書いた。したがって、彼は、べきの乗法や除法については、規則を言葉で与えなければならなかった。 ・・・・・・ ヴィエトは整数 n が 2 から 6 までの場合の$(A+B)^n$ の展開式を書いているが、一般的な二項定理までは記していない。彼がこの一般化に気付かなかった理由は、おそらく、様々なべきを表すのに、数ではなく言葉を用いたことに関係すると思われる。『カッツ 数学の歴史』[22]9.4.1

全てが明らかになった現在を生きる我々には理解し難いことではあるが、45 次方程式[41]を秒殺で解いて見せたヴィエトの悪魔的な知力と上記のエピソードを照らし合わせて、指数概念の定式化が如何に難しかったかに心

[41] Francois Viete（フランソワ・ヴィエト）(1540-1603)：彼は「ナント勅令」を出したことで有名な名君アンリⅣ世の懐刀であった。今で言えばＣＩＡ長官のようなものと思えば良い。スペインとの戦争中、スペイン王からオランダ総督宛の暗号で書かれた手紙を解読し、フランスに多大な貢献をした。その技は凄まじく「ヴィエトは暗号を解読するために悪魔と結託している。」とスペイン王はヴァチカンに訴えたくらいであった。ヴィエトの頭脳は 5 万人の軍隊よりも恐ろしいとも言われた。1593 年、ベルギーの数学者アドリアーン・ファン・ローメンは 45 次の巨大な方程式を提示して、世界中の、この当時ならヨーロッパ中の、数学者にその解法を問うた。要するに「解けるものなら解いてみよ。」と云う挑戦である。オランダ大使が、ヴィエトの主人であるアンリⅣ世を訪問したおり、フランス中の誰もこの問題を解くことは出来ないだろうと言った。カチンときたアンリⅣ世はヴィエトを呼び寄せて、挑戦を促す。ヴィエトは問題の根底に三角法があることを即座に見破り、ものの数分で最初の解を見つけ、翌日には全ての解を求めて見せた。ヴィエトは 1595 年に、この自分の解法に説明を付けて出版している。ちなみに、1593 年（53 歳）に彼は次のような驚くべき公式も発見している。それは、円の内接正方形と、「窮極の内接正多角形」としての円とを比べるというもので、πの理論的表示としては、おそらく史上最初のものであった。

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

を致さなければならない。

いよいよ現在の指数表記の創設者であるデカルトに登場して頂くのだが、マタイ効果[42]を免れるべく、デカルトの陰に隠れた人物を二人だけ紹介しておこう。一人目はピエール・エリゴンヌ Pierre Hérigone で、1634年に“Cursus mathematicus, nova, brevi et clara methodo demonstratus(実践的な数学者の新しい、素早くて明解な表示方法)”でデカルトの導入した現代の標準表記に肉薄する。例えば本書 p274 にある、

12ba4+16b3a2 2|2 4bd~4b5 [43] は $12ba^4 + 16b^3a^2 = 4bd - 4b^5$

を意味する。しかも、本書はラテン語とフランス語の対訳形式本で、フランス語の指数 exposant をラテン語の exponens の訳語としてきちんと明記されている。勿論、訳語そのものはジャック・ペルチエが 80 年も前に確立しているのだが、デカルトが指数に名前を与えなかったことを考慮すれば、指数概念の固定化の意味においてはデカルトよりも進んでいた。

もう一人はジェイムズ・ヒューム James Hume、彼はイギリス生まれのフランス人で、1636 年 7 月 5 日に“L'algèbre de Viète (ヴィエトの代数)”を上梓し、A^3 に対して Aiij と云う表記を与えた。指数をローマ数字にして右側に列記しているところを除けばデカルトが導入した現代の標準表記にかなり近い。カジョリは[6] § 190 で、“he wrote A^{iii} for A^3. Except for the use of the Roman numerals one has here the notation used by Descartes in 1637 in his La geometric” と書いているが、著者は“L'algèbre de Viète”にあるすべての数式を確認したのだが、どうしても右肩表記には見えなかった。不思議なのは、カジョリ自身が本書でヒュームの原書の数式を写真で引用しており、それを見てもやはり単なる並記表記にしか見えないにもかかわらず、叙上のようなコメントを残していることである。実は、この説はカジョリの前にタヌリがデカルト全集の第5巻 p503-で明示している。そこではデカルトが 1638 年 4 月にメルセンヌへ出した手紙が紹介されており、下記のような算式が見える。

$$x^{\mathrm{IV}} + 4x^{\mathrm{III}} - 19x^{\mathrm{II}} - 106x - 120$$

ここから、デカルトはヒュームの著書を読んで天啓を得た、とタヌリは判断し、カジョリもその説を踏襲したのであろう。著者もこの手紙を見る限

[42] 科学社会学の創始者ロバート・マートンが「条件に恵まれた研究者は優れた業績を挙げることでさらに条件に恵まれる」メカニズムを新約聖書（マタイ福音書第 13 章 12 節）から借用して命名した。

[43] “2|2”を“=”に、“~”を“−”で読み替えて、記号の右の数字を右肩に乗せれば現代表記になる。

り、デカルトはヒュームの著書を読んでいたと考える。ただ、繰り返しになるが、ヒュームは右肩表記にしていない。この右肩表記のアイデアはデカルトの創意だと思われる。些末な話ではあるが、カジョリの書き方だと、指数を右肩に小さく表記するアイデアがヒュームに因るように取れるし、実際、そのように推測する数学史家 [38] もいるので敢えて強調しておいた。また、右肩表記のアイデアの源泉についてであるが、著者は意外に、exposant と云う名前の醸し出す語感に由来するのでないかと推察している。デカルトが数学用語として指数 exponens を知っていたことは判っており[44]、既に述べたように、exponens には「外に置く」と云うニュアンスを語源として持っているので (⇒9) 、この用語がデカルトに右肩表記のインスピレーションを与えたのかもしれない。

更に、"La Geometrie (幾何学)" は「1636 年 11 月 に殆どの部分が執筆された」[45]p268 ことを考慮すると、わずか 4 ヶ月前に出版されたばかりのヒュームの著書からの直接的な影響は無かった可能性もある、と考えている。つまり、デカルトは「幾何学」を書き終えた後にヒュームの著書を読み、指数部分にローマ字を使う方法に興味を持って上記のメルセンヌへの手紙で使ってみた、このような推測も出来るのではなかろうか。いずれにせよ、手紙を見る限り、この後もデカルトは指数表記についてはいろいろ変えており、「幾何学」で現れた表記が必ずしも彼にとって最終形として定着していたわけではなかったことは留意しておく必要があろう。

デカルトのアイデアの源泉に関連する話題としては「ジャン・ボーグランとの剽窃論争」が歴史的には有名であるがここでは触れない。[45]また、これまで紹介したシュケ、ステヴィン、エリゴンヌ、ヒューム以外にも数多くの数学者による指数記号があるが [6] に詳しいのでこれも割愛する。

ヒュームの本が出た翌年、1637 年に 41 歳のルネ・デカルト René Descartes(1596-1650)は歴史的な著書 "Discours de la méthode(方法序説)" の試論の一部として "La Geometrie (幾何学)" を上梓し、その中で現在の指数表記を発表した。ここでは記念すべき指数表記の初出の部分をデカルトの著書から抜粋しておく。

---

[44] デカルト全集 10 巻 p275

[45] 例えば[45]第五章第三節 A.や[18]での Jacqueline A.Stedall の解説を参照せよ。

LIVRE PREMIER. 299

gnes sur le papier, & il suffist de les designer par quelques lettres, chascune par vne seule. Comme pour adiouster la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & escris $a + b$; Et $a -- b$, pour soustraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par soy mesme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainsi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d' $a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 -- b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d' $a^3 -- b^3 + abb$, & ainsi des autres.

La Geometrie　René Descartes

（幾何学 ルネ・デカルト 1637 年版）

・・・しばしば、紙面上に直線を引くことは必ずしも必要ではなく、一文字によってそれぞれを指定するだけで十分である。それで、直線 BD と GH を加え合わせるために、一方をa、他方をbと呼称し、$a+b$と書く。そして、$a-b$はaからbを差し引くことを意味し、abはaにbが掛けられたもので、$\frac{a}{b}$はaをbで割ったもの、aaまたはa^2は a にそれ自身が掛けられたもの、a^3はその結果にaを掛けたもの、以下無際限に同様である。また、a^2+b^2の平方根を取りたければ$\sqrt{a^2+b^2}$と書き、a^3-b^3+abbの立方根を取りたければ$\sqrt[3]{a^3-b^3+abb}$（本文中では$\sqrt{C.}$で立方根を表している）と書く。以下他の根に対しても同様である。　（拙試訳）

既に、最初からa^2とaaを併記しているように、デカルトはこの指数表記に

あまり積極的ではない。実際、“La Geometrie (幾何学)” の他のページを見ても、a^2より aaの方を多く使っている。彼はこの指数表記を正整数の場合にのみ使用し、a^nのような一般指数も採用していない。また、本書に明確な指数の概念の説明はなく、当然、用語の定義もない。デカルトはこの便利な冪の表記方法が指数法則の適用をも簡便にすることに気が付いていなかったのかもしれない。

15. 初めて現代記号化された分数冪指数概念

一方、ジョン・ウォーリス John Wallis(1616-1703)は 1656 年 (40 歳) に “Arithmetica Infinitorum(無限算術)” を上梓、デカルトの表記方法を完全に自家薬籠中の物とし、シェーナーの用語 index を引き継ぎつつ、加えて指数法則を負冪や分数冪に拡張している。しかし、この時点では指数記号を負冪や分数冪にまで広げることは行っていない。

この一見、自明とも思える記号の一般化を初めて敢行したのは他ならぬアイザック・ニュートン Isaac Newton その人であった。彼は、1676 年 6 月 13 日 (34 歳) のオールデンバーグ Oldenburg への手紙の中で、indicem dimensionis と云う用語を使った上で、現在使用されている負冪と分数冪の指数表現を完成させている。

2. Ubi P + PQ ſignificat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt; P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius P + PQ: ſive dimenſio illa integra ſit: ſive (ut ita loquar) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro aa, aaa, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} (8).

Newton's letter to Oldenburg　Isaac Newton

(ニュートンのオールデンバーグへの手紙　1676 年 6 月 13 日)

ここで、P+PQ はその平方根や冪であるか、その平方根や冪が見つけられるべき量を表す。P は第 1 項の量、Q は第 1 項で割られた残余項、そして m/n は P+PQ の冪の指数である。この冪は整数であるか（いわゆる）分数である；正数かまたは負値数である。解析ではaa, aaa, 等に対して通常はa^2, a^3,等と書き表す。従って、私は、

$\sqrt{a}, \sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^3}$,等に対しては$a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{3}{3}}$と書き表す；そして$\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}$, に対してはa^{-1}, a^{-2}, a^{-3}と書き表す。

（拙試訳）

※同じ手紙の前半部分では初めて二項展開定理についての説明がされている。この手紙はオールデンバーグを通して、ライプニッツに届けられた。

著者は、この一般化をあまり自明視すべきではないと考えている。左記のオールデンバーグへの手紙の前半部分は、彼が発見した二項定理について記されているのだが、これはニュートンの無限級数の取り扱いの試金石となる重要な数学的例である。後に、彼が「私の方法」と呼んだ「無限級数と変化率」の統一的取扱の一翼を担う支柱であり、それを可能にしたのが記号的思考ツールとして負冪と分数冪の指数表現であると位置付けることが出来るからである。

秀才の誉れ高いウォーリスが無限算術から 20 年を経て、1685 年（69 歳）に上梓した母国語である英語による著作“Treatise of Algebra（代数論)”では、上記のニュートンの手紙（二項定理部分）を p330-331 で紹介しており、「$a^{\frac{3}{2}}$で$\sqrt{aaa}$を表す。」ことも明示しているにもかかわらず、本書 p91 では 20 年前と同様に負冪や分数冪を記号化しようとしないのは不思議な気がする。

16. ウォーリスの奇妙な変更（英語の２つの指数の誕生）

ジョン・ウォーリス John Wallis(1616-1703)は 1656 年（40 歳）に書いた ラテン語の著作 “Arithmetica Infinitorum（無限算術)” では index を使っているのに、29 年後の 1685 年（69 歳）に上梓した母国語である英語による著作 “Treatise of Algebra（代数論)” ではなぜか exponent に変えている。これについては後で触れることにしよう。

P R O P. LXXXVII. *Theorema.*

SI proponatur ſeries quælibet prædictarum per aliam ſuperioris gradus ſeu poteſtatis dividenda, nulla jam memoratarum ſeries prodire poterit, (cum index poteſtatis ſuperioris ex indice poteſtatis inferioris, major quippe ex minore, auferri non poſſit:) ſed aliuſmodi plane ſeries, cujus nempe termini ſunt reciprocè proportionales homologis terminis alterius ſeriei, quæ indicem habet æqualem exceſſui indicis ſeriei dividentis ſupra indicem ſeriei diviſæ.

Series autem ſic provenientes, ſeries *Reciprocæ* appellentur, habeantq; Indices negativos.

Arithmetica Infinitorum　John Wallis
（無限算術　ジョン・ウォーリス　1656 年）

命題 87　系

もし前述の数列のいずれかが提示されているなら、別のより高次の次数または冪によって割られることで、既に触れた数列のいずれかを生成することは不可能であろう。（なぜならより高次の冪の指数をより低次の冪の指数から、あるいはより小さいものからより大きなものを、取り出すことは不可能だからである。しかし、明らかに他の種類の数列、それはその項が他の数列の対応する項の逆数であるようなもの、それは割られた数列の指数上の割った数列の指数の剰余分に等しい指数を持っている。

更に、そのようにして生じた数列は逆数的数列と呼び得る、そしてそれらは負値の指数を持つ。　　　　　　　　　　　（拙試訳）

更に、本書にはもう一つ指数に絡んだ興味深い歴史的事実が潜んでいる。本書の p91 の引用を見て判るように、指数として用語 exponent が使われていることである。exponent の OED2 による初出文献は 1706 年 “The New World of English Words, or, a General Dictionary　PHILIPS(ed. Kersey) ” [46]であった。しかし、実際には、少なくともこれより 20 年以上前にこの単語は数学用語としてイギリスに現われていたことになる。

the following Terms. But because 1 (the first Term, hath in it no dimension of the Root, the Root but one, the Square but two, &c. therefore the Exponents (in Arithmetical Progression,) we commonly reckon as beginning with 0, and so each

CHAP. XXII. *Composition of Squares, &c.* 91

each Exponent or Denominator of the Power or Degree, expresseth how many Dimensions (of the Root) are in each, or how many Degrees it is from 1.

Exponents	0.	1.	2.	3.	4.	5.	&c.
Powers	1.	A.	AA.	AAA.	AAAA.	AAAAA.	&c.

Treatise of Algebra　John Wallis
（代数論　ジョン・ウォーリス　1685 年）

…しかし、1（第 1 項）は、その中に根の次元を持たず、隣の項は根であり、2 つ隣の項は平方であり、以下同様である。それ故、幕指数は、等差数列なので、我々は通例 0 を最初の項として数え上げる；

そしてそれぞれの幕指数または幕または次数の基準は、（根の）次元数、または 1 からの次数はいくらかを示す式である。

幕指数	0.	1.	2.	3.	4.	5.	etc
幕	1.	A.	AA.	AAA.	AAAA.	AAAAA.	etc.

（拙試訳）

---

46 The New World of English Words, or, a General Dictionary　Edward Phillips 編纂（1658 年）、John Kersey 増補（1706 年）
ちなみに、研究社『英語語源辞典』（寺澤芳雄　主幹）[52]でも「exponent　n 1 [1706][数学]指数、べき指数」とあり、OED2 にある初出年 1706 は踏襲されている。

Now to ſuch a Geometrical Progreſſion, it is uſual to aſſign a Rank of Arithmetical Proportionals, which are called the Exponents or Indices of the Terms in that Geometrical Progreſſion. As

Exponents	0.	1.	2.	3.	4.	5.	&c.
Terms	1.	R.	R^2.	R^3.	R^4.	R^5.	&c.

Treatiseof Algebra　　John Wallis

（代数論　ジョン・ウォーリス　1685年　p89）

今、そのような等比数列に対し、等差数列の位数を割り当てることは有益である、そのような位数はその幾何数列における項の冪指数または指数と呼ばれる。

冪指数	0.	1.	2.	3.	4.	5.	等
項	1.	R.	R^2.	R^3.	R^4.	R^5.	等

（拙試訳）

引用文を読んでみると exponent に併記する形で index が書き添えられているが、exponent と併記出来る場はここ以外にも数多くあるのだが、敢えて併記を避けていたのではないか、と思わせるくらいに index を使っていない。著者は、ウォーリスがうっかり index を使ってしまったのではないかと推測している。つまり、これまで使い慣れた用語である index をなんらかの理由で exponent に更新しようとしたが、つい何か所かは前の用語を使ってしまったと言うことであろう。

せっかくだから、"A compleat body of arithmetic, in four books" についても見ておこう。

Q	A	B	P	E	M
0	1	0	0	1	0
	2	1		8	1
	4	2		64	2
	C 8	3	1	512	3
	16	4		4096	4
1	D 32	5		32768	5
	64	6	2		
	128	7		*F*	*N*
	256	8		1	0
	512	9	3	32	1
2	1024	10		1024	2
	2048	11		32768	3
	4096	12	4		
	8192	13			
	16384	14			
3	32768	15	5		

A The first Series of Proportional Numbers.
B The Indices of that Series of Numbers.
E The second Series of Numbers given.
M The Indices of that Series, to which those in *P* are equal.
F The third Series, whose Indices are equal to those in *Q*.

2. Lemma. *Lemma* 2. If in a Series of Numbers continually proportional from an Unit, any one of them be divided continually by his Side or Root as often as it can, the Number of Divisions shall be the Index of the Number divided, shewing the Distance of that Number from the Unit, or the Number of Intervals between Unity and the Dividend.

As of 729 by the Root 3, the Index is 6.

Indices 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 .
Proportionals 1 . 3 . 9 . 27 . 81 . 243 . 729. 3) 729 (243 (81 (27 (9 (3 (1
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

A compleat body of arithmetic, in four books　　Samuel Jeake

（4冊に於ける算術の完全体 サミュエル・ジーク 1696年版）

A　第一の等比数列
B　（Aの）指数列
E　与えられた第二数列
M　その指数列で、Pに於ける数列と等しい
F　第三数列、その指数はQに於ける数列と等しい

補助定理2．もし1から連続的に比例する数列に於いて、それらの任意な一項がその隣の項かあるいは根によって連続的に出来るだけ割られるならば、その分割数はその数の指数を割り切り、1からその数、又は1と被除数の間の区間の数を示すであろう。

729の根3に於いて、その指数は6である。

指数　　0.　1.　2.　3. 4.　5.　6.
等比数列　1.　3.　9. 27. 81. 243. 729. 3)729(243(81(27 (9(3(1
1.　2.　3. 4.5.6（拙試訳）

上記引用図にあるように確かに、index が指数として使用されている。実は、本書には exponent も使用されているところが 1 カ所（p230）だけであった。しかも、その使われ方が exponent indices　と云うのだからなかなか興味深い。具体的には天文学のパートで 60 進数に対し、定義されているもので、60 の冪（sexagena）と 1/60 の冪（sexagesima）の両方が冪指数（exponent indices）によって指し示されていた。

つまりウォーリスでは基本的に指数は exponent であり、たまたま index が紛れ込んでいたのに対し、ジークの方は基本が index であって、例外的に exponent が使われていた、と云うことである。

このような個々の著書における exponent と index の使い分けの仕方を後でまとめて分析するであろう。

17.　ドイツ語の指数 exponenten の誕生

英語、フランス語とくれば次はドイツ語についても、同様の調査をかけたいと思うのが人情であるが、著名な“ Das Deutsche Wörterbuch von Jacob und Wilhelm Grimm（ヤコブとヴィルヘルムグリムによるドイツ語辞書）”や 1894 年出版の Trübner による“Etymologisches Wörterbuchder deutschen Sprache（ドイツ語語源辞典)”の見出し語に exponenten はなかった。

幸い、“Deutsches Fremdwörterbuch（外国語のドイツ語辞書）”p520 に、クリスティアン・ヴォルフ Christian Wolff（1679－1754）が 1716 年（37 歳）に上梓した“Mathematisches Lexicon(数学用語集）”がドイツ語の書物でラテン語の exponens の語義説明を与えている、との記載を見つけることが出来た。実際に調べた結果を下記に引用しておく。

Exponens dignitatis seu potentiæ, der Exponente einer Dignität,

Ist die Zahl, von welcher die Dignität ihren Nahmen bekommet. Denn wenn derselbe 1 ist, so

611 Exponens

so heisset sie die erste Dignität; ist er 2, die andere; ist er drey, die dritte, und so weiter. Durch die Exponenten pfleget man auch in der Buchstabe-Rechen-Kunst die Dignitäten zu bemercken: welches Cartesius in seiner Geometrie zu erst eingeführet. Als wenn die Wurzel a oder 2 ist; so schreibet man die andere Dignität a^2 oder 2^2, die dritte a^3 oder 2^3, die vierdte a^4 oder 2^4, die fünffte a^5 oder 2^5, und so weiter. Der Herr von Leibnitz und Herr *Newton* haben zu erst die undeterminirten Exponenten eingeführet, dadurch viel Nutzen in der Algebra und höheren Geometrie erwachsen. Denn man hat nicht nur dadurch den Algorithmum irrationalium über die massen erleichtern können, sondern auch unendlich Aufgaben auf einmahl aufzulösen Gelegenheit bekommen. Und ist sich zu verwundern, daß *Cartesius* und andere nach ihm nicht gleich darauf gekommen, und an statt der Ziffern Buchstaben zu Exponenten gebrauchet.

Mathematisches Lexicon
Christian Wolff
クリスチャン・ヴォルフ
（数学用語集　1716 年版）

「指数の位数または冪」、指数の位数

数の場合、その位数から条件にあった（指数の）名前は復元されない。なぜなら同じものが 1 つしかないなら、それ（の指数）は第 1 位であることを意味する。その他にあればそれ（の指数）は第 2 位；順に（3 つあればそれの指数は）第 3 位であり、以下同様。

その指数により、文字の「演算」をも維持して位数を知らせる：それはデカルトの洗練された著書「幾何学」の中で初めて導入された。

aまたは 2 が基底の場合；それで第 2 の（指数の）位数はa^2 または 2^2 と書く。第 3 はa^3 または 2^3 ,第 4 はa^4 または 2^4,第 5 はa^5 または 2^5,以下同様。

ライプニッツ卿とニュートン卿は指数自体を不定元として導入している、こうすることにより、多くの利点が代数と高等幾何学に発生する。

と言うのは、このアルゴリズムによって無理数の扱いを容易にすることが出来るからである。同様にまた、一つの（固定された指数の事例の）研磨から無限（の指数）の版を読み取る好機を得ることも出来る。

そして（指数の使用を）奨励するにあたって、デカルトと他の彼の追随者達（ライプニッツとニュートン）は同等ではない、そして（追随者達はデカルトとは異なり）数字の代わりに文字を指数に使用した。　　（拙試訳）

著者のヴォルフは数学者と言うよりも哲学者で、晩年のライプニッツとも親交があった。この当時のドイツは自前の学術用語を持っておらず[47]、ラテン語から借用することを常としていた。ヴォルフはドイツ語の哲学用語の多くを確立することに貢献した人物であり、「さらに、—デュラー A.Dürer, リース A.Ries, ケプラーJ.Kepler などの有名な先駆者がいたにもかかわらず—ドイツ語の数学用語の創始者とみなされることが多い。」[48]

当初、著者は当時のドイツの状況とヴォルフのこのような学者としての立ち位置を勘案し、『外国語のドイツ語辞書』の編纂者達と同様に、本書を指数のドイツ語における初出文献と考えた。ただ、ヴォルフに影響を与えたライプニッツが気に掛った。この博学・多産な天才がドイツ語に並々ならぬ興味を持っていたことは判っているし[49]、ラテン語文献の中で exponens に通常の指数とは違った意味を与え、数学や論理学の用語として使っていたことは有名な話である[50]。彼がドイツ語 exponenten を案出している可能性は無いとは言えまい。驚いたことに、この予想は当たっており、1694 年に同国人の友人チルンハウス Tschirnhaus への手紙の中で 1 箇所だけ exponenten を使用していることが判った。該当箇所を引用しておく。

47 カント研究者の中島義道氏によると、当時はラテン語が学術の世界の共用語であり、純粋理性批判が読みにくい原因の一つはラテン語によってなされた思考の流れや文体を無理やりドイツ語にしたためと言われている。『純粋理性批判をかみくだく』また、ヴォルフはライプニッツとカントを結び付ける学者として位置づけられることが多い。

48 『ドイツ語の歴史』[19]p282

49 『ドイツ主義協会の提言付きの、理性と言語をよりよく行使するためのドイツ人への警告』(1682/83 成立、死後出版)
『ドイツ語の行使と改善に関する拙論』(1697 執筆、死後出版)

50『結合法論』ライプニッツ著作集 1 [24]p18、『ガロアへの手紙』ライプニッツ著作集 2 [25]p102　ライプニッツは通常の指数 (exponens) の定義も知った上で独自の定義をしたものと考えられる。このことを裏付けるものとして、後者の中の「指数という語を私が使うのは幾何数列の例にならっているのであって、根の指数が 1 、平方の指数が 2、立方の指数が 3 等々であるように、…」なる言明がある。また、後の手紙や論文では通常の指数の意味で使用したものが数多くある。

593

XXIII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Hannover 21. Martis 1694.

Dero Geehrtes vom 27 Febr. habe zu recht erhalten und die laidige confirmation dessen so mir nach abgang meines vorigen von Dero schmertzlichen unfall zu ohren kommen, darauss vernehmen müssen. Die menschliche natur ist also bewand, dass der-

. . . .

594

titatibus differentialibus vel summatoriis liberatas geben köndte, alda aber die incognita vel indeterminata in den exponenten hinein fiele. Allein ich aestimire nicht so hoch die quadraturas, als die conversam tangentium, davon die quadraturae nur ein casus simplicior seyn. Möchte gern pro conversa Tangentium auch eine

distraction sind zu gross. Es heisset inopem me copia fecit. Die perfectio Analytica quadraturarum bestünde meines ermessens darinn, dass man sie durch aequationes transcendentes finitas a quan-

ライプニッツからチルンハウスへの手紙（1694年3月21日）

Leibnizens mathematische Schriften,
herausgegeben von C.i. Gerhardt Bd. IV (Halle, 1859)
Briefwechsel: Wallis, Varignon, Guido Grandi, Zendrini,
Hermann, und von Tschirnhaus

ライプニッツからチルンハウスへ

1694年3月21日　ハノーバーにて

2月27日の失敗によって私はかなり面倒な確認を得る必要に迫られました。私が以前処理した後に耳に入ってくる私自身の名誉を損なう辛い件から話を聞かなければなりません。

・・・・・・・・・・・・・・・

それは私の作ったささやかな存在量を意味します。その解析的求積法の完成に於いてその中で私はある自由度を選ぶことが出来るでしょう、その自由度は有限量の差または総和の超越方程式によって与えられる可能性があります。しかしながらその未知量または不確定量はその指数に該当するでしょう。しかし、私はその求積法をそんなに高く評価しておりません。（なぜなら）接線方向への反転以外では、それに関して、その求積法は唯一の簡素化の事例に過ぎないからです。

（拙試訳）

更に、著者の確認した限りでは、膨大なライプニッツの残した手紙や論文の中でもこの単語が使われているのはここだけであった。他の多くの単語でライプニッツを始祖とすることを明記している『外国語のドイツ語辞書』が見逃したこの単語を著者が発見出来たのは全くの僥倖と言えよう。何れにせよ、ドイツ語の指数exponentenの産みの親はヴォルフではなく、ライプニッツであることがはっきりした。

18. 初めての微分学の教科書での指数概念

史上初の微分学の教科書と言われるド・ロピタル de l'Hôpital が 1696 年（35 歳）に出版した“Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes（ 曲線を理解する為の無限小解析）”には exposans（イクスプゾン） と云う用語と共にデカルト同様のxx表記が明記されている。現在の眼から見ると不思議な気がするのだが、x^2ではなくxxの表記の方を好んだのは独りデカルトだけではなく、ホイヘンス、ウォーリス、ニュートン、オイラーと云った錚々たる重鎮達にも共通した性向であった。[51] このような状況に加えてこの教科書の絶大な影響力を考慮すれば、当時の殆どの数学者はこの書き方に倣ったことであろう。そうは言っても、時が満ちればこの不如意な表記法から解き放たれてx^2と云う合理的な表記法にシフトするのは理の当然なのだろうが、19 世紀になっても、未だガウスの主著“Disquisitiones Arithmeticae（算術研究）”（1801 年， 24 歳）やヤコビの“Fundamenta Nova(楕円関数の新しい基礎)”（1829 年,25 歳）においてさえ、この表記が散見されるのには驚いた。デカルトの「幾何学」出版から既に 200 年近くが経過しようとしているにもかかわらず、未だ改まっていなかったのである。人は慣れ親しんだツールをなかなか捨てされないものなのだ。ここから逆に、ヴィエトやデカルトの凄さが推し量られよう。一方、1821 年、32 歳のコーシーは“Cours d 'analyse de l'École royale polytechnique エコール・ポリテクニクでの解析学教程第一部：代数解析” [1]でxx表記を全廃し、全てx^2表記に統一していた。

51 「こうした書き方の動機は aa の方が a^2 より場所をとらないという事実である。」『グレイゼルの数学史 I 』[20]p127 とあるが本当だろうか？少なくとも上記のド・ロピタルの教科書を見る限り、この主張は根拠が薄弱な気がする。また、グレイゼルは、ライプニッツが「記号の統一を重視すべきであるとの考えから、記号 a^2 を使用した。」とも言っているが、確かに、『普遍数学 1695』（『ライプニッツ著作集 2 』[25]p43） を見ると、そのようにも思えるが同じ論文の他のページ（例えば p48） では aa 型の表現を多用している。著者の個人的な意見ではあるが、記号の進化の方向性は記数法についての＜ハンケルの仮定＞「理想的な記数法は、できるかぎりわずかな記号を用いて、もっとも縮められた、もっとも明瞭な形で、それぞれの数を表現しなければならない」に準じるものと考える。「指数記号の統一性」の観点からは aa よりも a^2の方が優れているが、縮約性からはほぼ同じであり、他の代数的操作、例えば aa+ ab=a(a+ b) a^2+ ab =a(a+ b)、などでは a^2 よりも aa の方が優れているため、その優劣性の差異が微妙であり、最終決着に時間が掛ったのかもしれない。

PROPOSITION IV.

Problême.

7. PRENDRE *la difference d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.*

Il eſt néceſſaire afin de donner une regle générale qui ſerve pour les puiſſances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui ſe rencontre entre leurs expoſans.

Si l'on propoſe une progreſſion geométrique dont le premier terme ſoit l'unité, & le ſecond une quantité quelconque x, & qu'on diſpoſe par ordre ſous chaque terme ſon expoſant, il eſt clair que ces expoſans formeront une progreſſion arithmetique.

Prog. geom. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.

Prog. arith. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Et ſi l'on continue la progreſſion geométrique au deſſous de l'unité, & l'arithmetique au deſſous de zero, les termes de celle-ci ſeront les expoſans de ceux auſquels ils répondent dans l'autre. Ainſi -1 eſt l'expoſant de $\frac{1}{x}$, -2 celui de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. geom. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c.

Prog. arith. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, &c.

Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes　de l'Hôpital
(曲線を理解する為の無限小解析　ド・ロピタル 1696 年版)

ところで、古書を読み慣れていない読者は、本書の“exposans”を“expofans”と読み違えたのではなかろうか？中村幸四郎氏は、このｆとも見違う長いＳこそが積分記号∫のルーツであり、「∫はＳを長くのばして記号としたものである」と云う多くの数学史の記述は，17 世紀のフランス語やラテン語を知らぬことに基づく誤りだと断じている。[52]つまり、わざわざ「Ｓをのばして」作った記号ではなく、普通に使われていたｓの一種だったのである。確かに、17 世紀の印刷物をみれば，この∫は文中いたるところに見ることが出来る。但し、ネットで検索機能を使う場合は、“expofans”の方がヒットする場合もあるので注意を要する。

52　中村幸四郎「数学史―その学び方と生かし方―」，教育科学，No. 144，明治図書，1972，PP. 12～13 [53]

命題Ⅳ.
問題

7．任意のすべてまたは一部の変化量の冪の微分を見つけること

すべての冪の微分を見つけるための一般的な規則を書き下す前に、我々は指数または冪指数の間に存在する類推を説明しなければならない。

初項が１で第２項が任意な量xである等比数列が与えられており、各項の上に番号付けられた指数を持っているとき、これらの指数は、等差数列を形成することは明らかである。

等比数列	1,	x,	xx,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	etc
等差数列	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7 ,	etc

そしてもし等比数列が１から連続的に減少し、等差数列が０から減少するならば、この最終項はそれぞれの項がそれぞれの項に対応するようなそれらの指数でなければならない；ちょうど－1が $\frac{1}{x}$ の指数であり、－2が $\frac{1}{xx}$ の指数である、等々。

等比数列	x,	1,	$\frac{1}{x}$,	$\frac{1}{xx}$,	$\frac{1}{x^3}$,	$\frac{1}{x^4}$,	etc
等差数列	1,	0,	-1,	-2,	-3,	-4 ,	etc

（拙試訳）

ヴィエトが指数法則を理解しているにもかかわらず一般的な指数表記に思い至らなかったエピソードから指数の難しさを紹介したが、志賀浩二氏が数学者としての視点からなぜ指数の認識が難しかったのかを鋭く探った文章が『数の大航海』にあるので転載しておこう。

・・・平方根や立方根をとったり、あるいはそれらを何乗かし、また逆数をとったりすることは、数の演算というこの手ごたえのある確かな経験に即してみれば、すべて１つ１つが独立した工夫を要求してくるものであり、それは演算のもつそれぞれの独立した個性をはっきりと示すものとなっている。この強い個性は、特徴ある１つ１つの記号によって明確に区別されなくてはならない。記号の選択は、当然数学者の意識にかかわっている。

そのことを考えると、指数という一般概念が生まれるためには、指数が個々の数の演算を指示するという働きをひとまず失うことが必要であったと思われる。指数は、数そのものから切り離され、まず'変数' x として、あるいは文字 x として登場してきたのである。（下線は著者が引いた）『数の大航海』（志賀浩二　著）[48]p190

著者もその視点の変更、意識の転換については理解出来る。しかしながら、一旦、指数概念の合理性を知ってしまえば、冪計算の特殊性は指数概念の一般性に吸収されてしまうのではないか、とも思えるのだが実際にはそうなっていないのはなぜだろう。具体的に言えば、$\sqrt{\ }$ は 1/2 乗で計算上は完全に代替出来るにも拘わらず、現在も使用され続けている。何百年か後の数学史家は $\sqrt[n]{x}$ と $x^{\frac{1}{n}}$ の併用を xx と x^2 の併用と同じくらい、不思議な現象として取り扱うかもしれない。実際、中学で $\sqrt{\ldots}$ の使用を止めて、すべて $(\ldots)^{\frac{1}{2}}$ に統一すればおそらく $\sqrt{\ }$ は歴史の遺物として消えていくであろう。特に、不便がないからだ。一方、指数表現は、たとえ中学の範囲では扱わないことにしたとしても、どこかの段階で必ず導入せざるを得ない表記方法であり、確実に残ると思われる。問題は、我々が、効用の面から言えば圧倒的に有利な $(\ldots)^{\frac{1}{2}}$ を持っているにもかかわらず、$\sqrt{\ldots}$ を捨てようとしないのか？かつて、高木貞治は Landau の記号に対し、次のような批判と改善案を提示した。「b⊃a　即ち　a⊂b　に於いて a が倍数、b が約数である。本書ではそれを整除の記号に流用する。それを有理整数にも適用して 2⊃10　又は 10⊂2　などとも書く。Landau の記号 2 | 10 は約数を必ず左、倍数を必ず右に書くことが窮屈である。」[53] 理屈はその通りであり、高木方式の方が Landau 方式よりも効能的であろう。しかし、Landau の記号は現在も健在であるし、おそらく高木方式よりも優勢である。このような現象がなぜ生じるかに答える為には、数式が言葉の一種であり、そこには理屈や合理性とは別の感情や想いが纏わりついていることに思いを致さなければなるまい。Landau の記号は「割る」と云う原初的感覚・感情に、最初に刷り込まれた分数記号とも相あまって、極めて上手く適合しているのに対し、高木方式は割る数が割られる数より大きいように見えるので理解にワンクッションが必要となる。更に、この記号には「割る」イメージ

53 『代数的整数論』[51]p20

がない。この微細な差異が実際には記号の普及・存続に大きく影響しているのかもしれない。

記号ではないが、類似した話が、単複の区別についての言葉の使い方に対してもある。酒井孝一氏は、数学で使用する言葉として、日本語がそもそも不適切であり、冠詞と複数を表わす“s”を導入すべき、と主張され[54]、岩堀長慶氏は実際の数学書に於いて、その主張の一部を実行された[55]。彼らの主張に依れば「2 の平方根を求めよ。」は数学としては曖昧な表現であり、「2 の the 平方根 s を求めよ。」か、少なくとも「2 の平方根達を求めよ。」にすべきことになる。これも理屈の上では極めて筋の通った意見だと思われるが、現況では採択されていない。日本語として著しく違和感を醸し出すからであろう。

指数と冪の織り成す風景も、この数式記号としての合理性と言葉としての思い入れが輻輳的に交錯することで、その在り様を微妙に変異させつつ現在に至っているのであろう。

---

54 『ディリクレ　デデキント　整数論講義』(酒井孝一訳・解説　1970 年) の「はしがき」を参照のこと。

55 例えば、『微分形式の理論』(H. フランダース著、岩堀長慶訳　1967 年) の p25 で「ここで函数 aH(x)達はU上で滑らかである.」なる表現を見つけることが出来る。

19. Exponent vs Index

16 世紀末から現在に至るまで冪指数を表す数学用語としては index 系と exponens 系が併用されてきた。しかし、付録のテーブルを見れば判るように、大凡イギリスを除けば exponens 派が主流で、index は限定された場合にのみ使用されて来た、と言っても過言ではあるまい。その理由として、第一には、既に触れたようにラムス主義がイギリスにおいて影響力があったことが考えられる。第二には、ウィリアム・オートレッドのような影響力のある数学書を書いた学者が index 派であったこともイギリスの 17 世紀前半の動向を決定付けたと言えよう。もしデカルトやステヴィンが指数として index を彼らの著者で使っていたならフランスやオランダもイギリスと同様の状況になっていたかもしれない。しかし、現実には、デカルトはラムスに大きな影響を受けているにもかかわらず[56]、彼自身が冪指数に特別な用語を与えることはなかったし、ステヴィンも冪指数に記号を与えておきながらそれに明確な名前を付けようとはしなかった。他の大物に目を向けると、フェルマーはウォーリスとの遣り取りで、ウォーリスが使う用語 index は知っていたが自分では使わなかったし、パスカルは exponens 派であった。

更に、第三の理由としては、この当時のイギリスの数学教育の低迷があると考えられる。[57]このことに起因して、シュティフェルによる exponens がイギリスの数学者達に十分には伝わっていなかった可能性は高い。

17 世紀も後半になるとイギリスにおいても index 派から exponens 派への奇妙な移行が見られるようになる。例えば、ジョン・ウォーリスは 1656 年の "Arithmetica Infinitorum" では index に統一されていたのに、1685 年の "Treatise of Algebra" では同じ概念に対し exponent を使用している。ラテン語と英語の違いはあるとしても、なぜわざわざ用語を変えたのだろうか。このような些細な事象は専門家にとっては興味がないことなのかもしれないが[58]、素人の著者には素朴に興味がある。この頃に exponens

[56] デカルト主義はラムス主義の乗り越えることで成立したとも言われている。詳しくは『歴史の中の数学』第 4 章 [30] を参照のこと。

[57] 1570 年エリザベス女王時代に、新法令が出て、それによってすべての数学は、大学の教程から削除された。

[58] Jacqueline A. Stedall は [11]で、ウォーリスの『代数論』を主軸にして 17 世紀イギリスの代数学の発展史を描いているのだが、彼女はウォーリスが『無限算術』で冪を示す数として "index" と云う用語を導入したと説明し、『代数論』でニュートンによる指数記号の拡張が紹介されていることにも言及しているが、exponent に用語が変更されていることには全く触れられていないし、その説明では原文が exponent であるにもかかわらず、indices を使っている。また、細

がイギリスでも知られ始めたのかもしれない。これを裏付ける現象として、バローが 1674 年に上梓した "Lectiones opticae et geometricae" では、指数の用語としては exponens でほぼ統一していることが挙げられる。OED2 が exponent の初出文献としていた "The New World of English Words, or, a General Dictionary　Edward Phillips 編纂(1658 年)、John Kersey 増補 (1706 年)" についても、1706 年版では exponent は言うまでもなく、index や degree も指数の意味で使われることを明記しているが、1658 年の初版では exponent や degree はなく、index に対しても索引の意味しか与えられていない。OED2 によると exponent は形容詞として使用される古い用法 (1581) を除けば、指数以外では説明者、解釈者、代表者と云う意味が付与されていただけで、何れも指数よりも初出が新しく 19 世紀であった。一方、index の意味はかなり昔から使用されていた「人差し指」から始まって、OED2 では 2 ページ半ものスペースが割かれている。[59]また、ライプニッツが独特の定義のもとで exponens を使ったのも大体この頃 (1666 年～1672 年) である。(⇒脚注 50) このような 1660 年代を境として exponent や index の意味が変化しているように見えるが、その主な原因はオールデンバーグ[60]をキーマンとして成された英国王立協会の創設 (1660 年) と『フィロソフィカル・トランザクションズ』の発刊 (1665 年) に象徴される、科学情報のネットワーク化の飛躍的な向上にあるのではないかと睨んでいる。実際、ライプニッツはオールデンバーグへの手紙 (1677 年 6 月 12 日) の中で、次のように書いている。ここでは exponentem に対し、通常の冪指数の意味を与えている。

Denique quid sentiat de resolutione aequationum,quales paulo ante posui, ut $x^y+y^x \cap xy$, et $x^y+y^x \cap x+y$, ubi scilicet incognita

かい話だが、著者は上記の「導入」と云う言葉には違和感を覚えた。ウォーリスよりも遥かに早くラザルス・シェーナーが index に指数の意味を与えていたし、イギリスでも、1631 年のオートレッドの "Arithmeticae in Numeris et speciebus institution" において既に "index" が指数として使われている。おそらくウォーリスは本書を読んでいると思われるので、introduce (導入する) ではなく follow (踏襲する) とする方が適切であろう。

[59] 「exponent と index の日常用語としての使われ方の違いが知りたい。」との小島順氏の質問に対する、著者の回答である。

[60] オールデンバーグはメルセンヌとクレルレを合わせたような人物で、17 世紀の科学革命を裏方から推進し、支えたキーパーソンである。しかし、ドイツ系エミグレ異邦人であったためか、彼の生涯は必ずしも順風満帆ではなく、スパイ容疑でロンドン塔に幽閉されることもあった。彼は世界最初の科学アカデミー王立協会の創設会員の一人で、同協会初代事務総長、現存する世界最初の学術雑誌『トランザクションズ』の発刊者で、同雑誌の編集者、そして多言語能力を駆使した知的仲介者と云ったマルチタレントの持ち主で、科学革命における情報ネットワークの構築の原流となった。ちなみに、有名なニュートンの分数冪指数記号を定めた手紙の宛名もオールデンバーグであったことを想い起そう。(⇒15)

ingreditur in exponentem.

最後に、私が少し前に示した、$x^y+y^x=xy$ かつ $x^y+y^x=x+y$　ここでは、つまり、未知量が指数に入る、と置いた方程式の解法について彼（ニュートン）はどのように考えているのか。

（拙試訳）

勿論、ウォーリスもこのネットワーク革新の渦から離れているはずはなく、現存するオールデンバーグの手紙では最頻の相方となっていたことが金子務氏の調査[41]で明らかになった。従って、ウォーリスをはじめとするイギリスの多くの数学者達がこの情報ネットワークから指数にはラテン語の exponens が既に大陸では市民権を得ていたことを知り、こちらの用語を採択したものと推察される。

しかしながら、すべてのイギリスの数学者がこのような行動を取った訳ではない。ニュートンは 1669 年の "Analysis Per Quantitatum Series, Fluxiones, Ac Differentias" では例外的に 1 カ所だけ exponens を使用しただけで、他はすべて index だったし、1686 年の主著 "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" でも、一見 exponens の使用が激増して 12 カ所も現れたように見えるが、冪指数の意味では index しか使用していない。著者の憶測ではあるが、ニュートンは性格的にウォーリスのような変更を潔し、としなかったのではなかろうか。

今、exponens 派と index 派を峻別するような書き方をしたが、使い分けようとする数学者もいた。著者が調べた中で、このタイプに属する最も古い数学者はド・モアブル De Moivre である。彼が 1695 年にフィロソフィカル・トランザクションで発表した論文[61]では、ニュートンの 2 項展開公式を冪級数に対して拡張することを目指しているのだが、index には負冪や分数冪を想定しているが、exponens では正整数の場合の冪だけに限定しようとしたように見える。後のコーシーやド・モルガンの使い分けの魁とも言えよう。

ここからに exponens 派と index 派の混戦が始まる。ジョン・ウォードやテイラーで index 派に大きく揺り戻されたかと思うと、マクローリンやストーンで再び exponens 派に傾き始める。ピーコックは index 派である

61 De Moivre, A. (1695). A Method of Raising an Infinite Multinomial to Any Given Power, or Extracting Any Given Root of the Same. Philosophical Transactions 19 619–625.

が、その弟子のド・モルガンは基本的には exponens 派だし、クリフォードに至っては、書く本によって変えてしまうので、どちらの派なのかも良くわからない。一言で言えば、イギリスでの冪指数の用語選定は 18 世紀、19 世紀を通じて極めて曖昧で、個人の嗜好に委ねられていた。

このようなイギリスの数学者達とは対照的に、ガウスの明確な用語の使い分けは特筆に値する。彼はその主著 "Disquisitiones Arithmeticae" において通常の冪指数と数論的な指数を峻別する必要性があり、そのような背景から exponens と index を上手く使い分けることに成功している。具体的に言うと、exponens は通常の冪指数を表すの対し、index は数論的な指数、例えば「$a^e \equiv b \mod(p)$ ならば、e を b の指数」のように使用している。このような工夫はガウスの主著出版のわずか 3 年前に上梓されたルジャンドルの "Essai sur la théorie des nombres" にも兆候すら見えない。彼の独創と言って良かろう。以後、この使い分けはディリクレ、デデキント及びヒルベルトを通じて数論の世界での標準となっていく。[62]また、ガウスの本に使われた exponens と index の数は群を抜いており、ルジャンドルの本に比べても 4 倍以上の出現頻度[63]で使用されている。本書では、他にも characterem（指標）と云う単語が頻出しており、このような指性表現用語の使用頻度の高さはガウスの数学とそれまでの数学との違いを示す一つの「指標」と考えられよう。

一方、フランスでは 17 世紀のロピタルの教科書、18 世紀のダランベールの百科全書、19 世紀のコーシーの学生向けの教科書に至るまで一貫して exposant が主流であり、indice はルジャンドルの数論のテキストやコーシーの教科書で限定的に使用されるに留まった。

欧州言語におけるこのような二つの流れは日本語だとどちらも指数なので区別出来ないが、現在でも別々のものとして扱われている。例えば、英語では、物価指数は index number of prices だし、不快指数は Discomfort index であって、exponent は使われない。また、数学内部であっても、「アティヤ=シンガーの指数定理」は英語では Atiyah–Singer index theorem であり、フランス語やドイツ語でも同様に、le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, Der Atiyah-Singer-Indexsatz と表現され、

62 比較的新しい Joseph H. Silverman 数論の入門書 "A friendly introduction to number theory" [14]でもこの区分は踏襲されていた。

63 出現頻度:=（指数の意味で使用された index 系単語＋exponens 系単語）/ 総頁数

exponent,exposant が使用されることはない。

指数概念が生まれ育った物語は、ユークレイデスやアルキメデスの指数法則の発見により始まり、シュティフェルによって exponens、シェーナーによって index と名付けられ、デカルトの現代的指数表記の案出、ニュートンによる一般的表記とその応用によって一先ず完結した。この後、指数は「指数函数」として違う次元から探求されて行くわけだが、その旅に同行することは本論の主旨からいささか外れることになる。我々はここから方向を変え、漢字名「指数」誕生の場を目指していきたい。それは必然的に西洋数学が中国や日本でどのように受け入れられて行ったかを知る旅でもあり、西洋とは違った意味での「指数」発見の物語となる。

ここからは日本と中国で「指数」がどのように受け入れられたについて調べていくことにする。すべてを整理して結果だけを簡潔にまとめることも可能だが、ここでは著者自身がどのような問題意識のもとでどのように調査していったかをルポタージュ風にまとめてみた。

20. 藤澤利喜太郎

虚心坦懐に考えてみれば「指数」とはまことに不思議な用語である。英語の exponent はラテン語の語源 exponens からの意味付けで一応の理解を得ることが出来るが、「指数」と云う漢字を眺めていてもそうそう納得の行く解釈は捻り出せそうにない。なぜ「指」を使うのか。何かを指し示しているからか。そう言えば指数の原語には index もある。こちらから訳されたのか・・・。このようにただ眺めているだけでは妄想が募るだけである。カッツやカジョリをはじめとする西洋人の書いた数学史のテキストにこの問題を問うてみてもはなから期待出来ない。これらを超えることを目指して書かれた佐々木力氏による『数学史』[44]にしても通史と云う性格上、このような特殊な疑問に対する解答を見つけることは出来なかった。そこで藤原松三郎の『明治前數學史』

藤澤利喜太郎
(1861－1933)

[57]をはじめ和算の解説書を何冊か読んでみたが、「対數表説」や「八線表（三角関数表）」は出てくるが「指数」は見当たらない。

それ故、明治以降に、「函数」のように中国の翻訳語が日本に輸入されて来たか、「坐標」のように翻訳語として我が国で案出された可能性が高い、と考えた。『日本国語大辞典』で初出文献を調査してみると『数学ニ用キル辞ノ英和対訳字書』[64]（1889）（藤澤利喜太郎）であった。しかし、藤澤自身が語っているようにこの字書には、自分で案出した訳語もあるが、それまでに既に使われていた訳語をそのまま引き写している場合もある。よって、もっと前の文献で「指数」が使われている可能性がある。そこで、国会図書館にあるこれ以前の数学関係の古書を片っ端から探って行くことにした。このようなやり方は大量の出版物で溢れかえっている現在では有効な方法ではないが、明治の初期ならなんとか実行可能であった。また、近年、国会図書館が提供を開始した「近代デジタルライブラリー」の存在も、著者のような在野にいる者にとっては本当に有難かった。以前のようにいちいち国会図書館に出向いて、マイクロフィルムを閲覧するのとでは圧倒的な文献検索能力に差がある。但し、書物内での単語検索機能は使えない点は多くの洋書の古書に比較して面倒であったので、読者の便益を考慮して、引用ページのコマ番号を明記しておくことにした。原書に触れたい読者は活用されたい。

このようなネット時代の現代でこそ可能な調査方法を駆使するなかでいろいろな予期せぬ面白い文献に出会うことが出来た。そこには翻訳と云う形で一つの数文化が形成される瞬間でもあった。ここでは、「指数」関連に制限して、このとき出会った興味深い文献の一部を紹介しておこう。

[64] 国会図書館の「近代デジタルライブラリー」で閲覧できる。11,13/25（本来は 11,13 コマと書くべきなのだろうがこの方式で統一しておく。）

21. 菊池大麓

菊池大麓
(1855-1917)

菊池大麓は、1888年(38歳)にウィリアム・クリフォード William Clifford の"The common sense of the exact sciences"(1885)を翻訳し、『数理釈義』[65]と云う表題で出版した。この翻訳書で、菊池は"power"の訳語として「冪数」を使った。本書には次のような「指数」の説明がある。

「相乗シタル相当因数ノ数ヲ冪数ノ指数ト稱ス之ヲ相乗シタル数ノ右肩ニ記スヲ常トス」

これの原文は以下の通りで、index の訳語として「指數」を選んだことが判る。実は、クリフォードは本書の中で exponent と云う単語は一度も使っていない。

The number of equal factors multiplied together is called the index, and it is written as a small figure above the line on the right-hand side of the number whose power is thus expressed.

これはなかなか興味深い。もしも本書が日本における「指數」の初出であり、菊池がこの用語を案出したのであったなら、index が内包する「指し示す」と云う語義が「指數」と云う用語を導いたとする極めて自然な推察が出来たであろう。しかし、残念なことにそれは明らかに歴史的事実ではない。

イギリス人のクリフォードが exponent を使わなかったことも、このような index 優勢の書物を菊池が選んだことも偶然であろう。なぜなら、同じクリフォードの著作でもわずか3年前に出版された Mathmatical papers では逆に index は一度も使わず、すべて exponent で統一されていたからである。

65 「近代デジタルライブラリー」23 24/264 で閲覧できる。

22. 野村龍太郎

菊池の『数理釈義』の出版より2年早い1886年、後に土木学会会長や満鉄の第三代総裁になる野村龍太郎(1859－1943)が工学系の用語翻訳書『工学字彙』を27歳で出版しているのだが、そこでは既に"exponent"は「指數」と訳されている。更に、その6年前の1880年、幕末から明治にかけて活躍した和算家福田理軒(1815－1889)、半(1837－1888)父子が、『筆算微積入門』を上梓している。これは西洋数学の本である。現代で言うところの超越関数を「超函數」ではなく、「越函數」と訳しているところが面白い。また、以下のように指数、対数の用語は現行通りに訳されているが、指数関数と対数関数については微妙に違っている。[66]

野村龍太郎
(1859－1943)

凡そ越函數に二種類あり変數の對數に係るものを對函數と云ひ指數の変數なるものを指函數と云ふ

23. 山田昌邦

山田昌邦
(1848-1926)

もっと遡って1878年には、子母沢寛の小説「逃げる旗本の記」[49]の主人公のモデルとされる山田昌邦[67](1848-1926)が『英和数学辞書』を30歳で出版している。これは数学用語のまとまった辞書としては日本で最初のものであり、Davies による「マテマチカール・ジクショナリー」等を参照して編纂されたもので、藤澤もこれを原本としたと考えられている。[68]この時代の数学書の著者は色んな若者がいてそれだけでも結構楽しめるが、お目当ての翻訳についてはindex の訳は「根指數」でちょっと変わっている[69]けれども、"exponent"の訳語は普通に「指數」であった。

66 これは彼らが李善蘭の『代微積拾級』(⇒72)の訳注書『代微積拾級譯解』を先に出版していたことの影響だと考えられる。この独特の用語は『代微積拾級』に既に認められるからだ。「近代デジタルライブラリー」36/147 で閲覧できる。

67 山田は若くして幕府の海軍に入り、明治維新の時には榎本武揚の五稜郭への脱出に従ったが、途中銚子沖で沈没の憂目に遭う。官軍に降り、幽囚の身となるが後に、赦免された。沼津兵学校のあと、海軍兵学校や札幌農学校でも教鞭をとった。明治5年から6年にかけて日本で初めてのユークリッド原論第1巻の翻訳を行ったが、明治10年に札幌農学校を退官し、この後実業界に転身した。明治20年には、渋沢栄一らとともに東京製綱会社の創立に貢献、同社の支配人となって会社経営の実務を行い、最終的には取締役会長に迄上り詰めた。小説の中では、山田清五郎となっている。

68 このあたりの話は『授業を楽しくする数学用語の由来』(片野善一郎 著)[39]の第1章、第2章が詳しい。

69 前述のド・モルガンのような exponent と index の使い分けの影響かもしれない。「近代デジタルライブラリー」39,48/101

24. 幻の数学用語「冪数」

余談であるが、先に紹介した『数学ニ用キル辞ノ英和対訳字書』は藤澤利喜太郎が28歳（1889年）のときに、東京数学物理学会（後の日本数学会）の意向を受けて作成したものなのだが、ここではexponentには「指数」と「冪数」の両方の訳語が載っており、indexの訳語には「指数」だけが付されていた。もしこの頃の数学者達がexponentの訳語として「指数」ではなく「冪数」の方を選んでいれば、現在のわれわれは、「冪」と云う和算の用語を残しつつ、indexを指数、exponentを冪数と訳し分けることが出来たであろう。更に言えば『学術用語集・数学編　文部省』（1954年）[60]ではindexに「指数」、exponentに「べき指数」と云う訳語を標準用語として採用しているのだから、これに従っていれば使い分けが出来るはずだった。しかし、歴史はそのようには動かなかった。著者が調べた限りでは「指数」と「べき指数」を峻別している数学書は『ガウス整数論』（高瀬正仁　訳）[23]くらいしか見当たらなかったし、これはガウスの使い分けを訳に反映させようとした訳者の特別な意向によるもの、つまり例外、と考えた方が良かろう。[70]結局、『学術用語集・数学編』編纂の主査委員をされた彌永昌吉氏の使い分けの工夫は生かされることはなかった[71]。残念なことである。既に定着しきった指数関数を今さら冪数函数に替えるのは不可能であるし、中学や高校の教科書にある「指数」を「べき指数」に換えることも難しいであろう。現在では、冪は難読漢字であったこともあずかって初等数学の本からはすっかり姿を消してしまい、僅かに「降べきの順」、「昇べきの順」や「べき級数」にその片鱗を残すのみである。

ただ、『学術用語集・数学編』で「べき指数」を提示したことは思わぬところに影響を残している。ネット環境のものも含めて語学系の辞書においては、今でも「べき指数」は頻繁に目にする用語である。恐らく、辞書の編纂者は実際の数学書や数学雑誌に使われているかどうかではなく、『学術用語集・数学編』のようなものを先ず選択の基準として考える傾向があるからだろう。

で閲覧できる。

70 少し変わった調査方法であるが、雑誌『数学セミナー』（1962. 6～2014. 2）の目次に使われている語彙で検索した結果は次の通りであった。

指数　35件　　べき指数、冪指数　0件　　冪　3件　　累乗　10件

71 「数学学術用語の統一運動の経緯」についての足立恒雄氏から質問に対しては以下のように回答しておきたい。著者自身の知る「数学学術用語の統一運動の経緯」は『数学用語の由来』[39]第1章、第2章と大きく変わるものではない。また、『学術用語集・数学編』がこの一連の統一運動の最後の大きなイベントであったとする見解は『高等学校における微積分教育の研究[VII]』（石川廣美）の「この時以来、高等学校における数学用語は『学術用語集・数学編』[60]によることを原則とすることによって、一応の統一がされてきているとみてよいであろう。」と、これ以降、数学では新版が出ていないと云う事実に基づく。他の分野では新版が出ているものがある。

25. 漢字文化圏で初めての指数

そろそろ、読者諸兄も飽きてきただろうから、この辺で「指数」の生みの親にご登場いただこう。

アヘン戦争に敗れ、開国を余儀なくされた清朝では、中国人数学者李善蘭(1810-1882)とイギリス人宣教師アレクサンダー・ワイリーAlexander Wylie(1815-1887)【中国名：偉烈亞力】が、1859年に、後の中国と日本に大きな影響を与える二冊の翻訳本を世に出した。エリアス・ルーミスElias Loomisの“Elements of analytical Geometry and Differential and Integral Calculus”の翻訳『代微積拾級[72]』(7月)とドモルガンDe Morganの“Elements of Algebra[73]”(1837)の翻訳『代數學[74]』(10月)である。両著ともにワイリーが口譯、李善蘭が筆受すると云う役割分担で行われた。

この両著にはexponentの翻訳語として「指數」が現れている。従って、漢字文化圏における「指數」誕生の瞬間を記録するものは李善蘭とワイリーによる『代微積拾級』であることがはっきりした。

同じ年に僅か3ヶ月差で世に出たこの二著は、奇しくも13年後の1872年に順番を逆にして共に日本で翻訳されることになる。このときも2, 3ヶ月の差しかなかった。『代數學[75]』は塚本明毅(1833-1885)が返り点を打って校正し、四月に静岡集学所から出版された。一方、『代微積拾級』は福田理軒、半によって『代微積拾級譯解』として原書巻一から巻四までの部分が翻訳され夏に発行[76]されている。

72 李善蘭は古成語「微を積みて著を成す」から微分と積分と云う数学用語を案出し、「この書はまず代数を説き、つぎに微分、つぎに積分を論じており、容易なところから難しいところに進むさまはさながら階段に上るようである。そこで翻訳を終了してから、その書を代微積拾級と命名した。」と述べている。「拾級」は、礼記・曲礼（きょくらい）にある「拾級聚足（しゅうきゅうしゅうそく）」から引用された言葉であろう。「級（きざはし）を拾（わた）るには足を聚（あつ）む」と読む。すなわち、階段を一足ずつ揃えて上るように一歩一歩学習を進めるの意である。本書の最初には英語を中国語に翻訳した有名な数学用語集が付されており、ワイリーの名前と日付（1859年7月）が見える。

73 正確には “Elements of Algebra preliminary to the differential calculus and fit for the higher classes of schools in which the principles of arithmetic are taught”

74 ワイリーの英語序文と日付（1859年10月）は本節末を参照のこと。

75 「近代デジタルライブラリー」2/57で閲覧できる。

76 「明治五年壬申夏鐫」とある。更に、奥付には「明治四辛未年十一月官許」とあるからタッチの差であったようだ。

『代微積拾級』及び『代數學』に関与した人々の肖像

De Morgan
(1806 · 1871)

Elias Loomis
(1811 · 1889)

Alexander Wylie
偉烈亞力
(1815-1887)

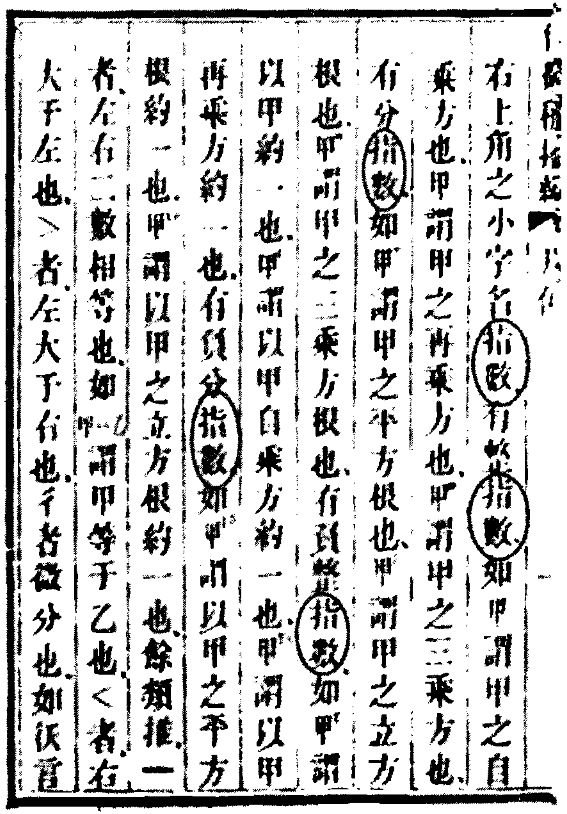
李善蘭
(1810-1882)

坂本明毅
(1833-1885)

福田理軒
(1815－1889)

本書の序文には神田孝平（洋書調所数学教授　東京数学会（日本数学会の前身）初代社長　菊池大麓の洋算の先生でもある）の訳稿を借受けて潤色を加えたことが明記されている。恐らく『代微積拾級』を読んだ最初の日本人であろう。
『近代日本における、函数の概念とそれに関連したことがらの受容と普及』（公田藏）[42]

それでは漢字文化圏で、「指數」がどのように現れたかを見ることにしよう。



代微積拾級

右上所之小字名指數有整指數如甲謂甲之自
乘方也。甲謂甲之再乘方也。甲謂甲之三乘方也。
有分指數如甲謂甲之平方根也。甲謂甲之立方
根也。甲謂甲之三乘方根也。有負整指數如甲謂
以甲約一也。甲謂以甲自乘方約一也。甲謂以甲
再乘方約一也。有負分指數如甲謂以甲之平方
根約一也。甲謂以甲之立方根約一也。餘類推。一
者左右二數相等也。如甲一乙謂甲等于乙也。＜者右
大于左也。＞者左大于右也。彳者微分也。如仸言

代微積拾級（1859 年）
李善蘭、偉烈亞力

代微積拾級（凡例）

右上角の小字を指数と名付ける。正整数の指数がある場合、甲の自乗（2乗）を甲^{二}のように書き、甲の再乗（3乗）を甲^{三}のように書き、甲の三乗（4乗）を甲^{四}のように書く。有理数の指数がある場合、甲の平方根を甲$^{\frac{一}{二}}$のように書き、甲の立方根を甲$^{\frac{一}{三}}$のように書き、甲の三乗方根（4乗根）を甲$^{\frac{一}{四}}$のように書く。負整数の指数がある。甲の逆数を甲^{T一}のように書き、甲の自乗の逆数を甲^{T二}のように書き、甲の再乗の逆数を甲^{T三}のように書く。負有理数の指数がある場合、甲の平方根の逆数を甲$^{T\frac{一}{二}}$のように書き、甲の立方根の逆数を甲$^{T\frac{一}{三}}$のように書く。・・・

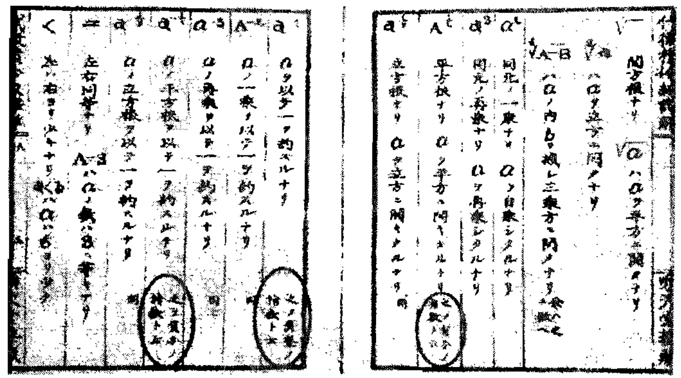
（拙試訳）

※三乗は乗法（掛算）が3つあると云う意味で考えれば辻褄が合う。
※分数の分母・分子が逆である。
※本書には歴史的に有名な英中数学用語集があり、その中の多くの用語が現在でも中国、日本の標準的なテクニカルタームとして存続している。
「代數學」と云う用語も既に本書の中に現れている。従って、この単語は同名の著書ではなく、こちらが初出なのである。

実は、上記の「指数」の説明を書いた部分は1851年版のルーミスの原書には見当たらなかった。西洋諸国なら、この程度の数学書の読者に今さら＋や－、＜、＞と云った記号の説明は不必要であろうが、西洋数学に慣れていない中国の読者には凡例として最初に一渉り基本的な記号の定義をする必要があると著者達は感じたので、わざわざ追記したものと考えられる。『代微積拾級譯解』でも事情は同じであるからこの部分はより丁寧に翻案されている。

両著の翻訳の方針の差異は明らかである。『代微積拾級』の方が、アルファベットやアラビア数字を使用せず、数学記号も出来るだけ自前のもので済まそうとしているのに対し、『代微積拾級譯解』では a,b,…が使われ、

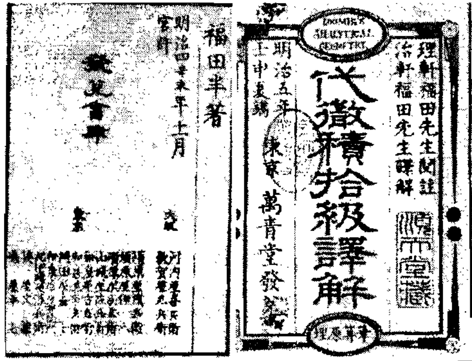
記号も西洋数学のものをそのまま使って借用されている。このちょっとした自国文化へこだわりの差が西洋数学の浸透に少なからず影響を与えた。この場合に関して言うなら若い福田半の判断の方が正しかった。



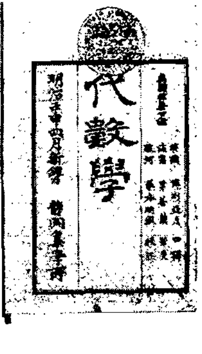
代微積拾級譯解（1872年夏）
福田理軒閲注、治軒譯解

叙上の調査・考察を補足するものとして、『中国の数学通史』[66]第4章第2節「I.伝来の背景と李善蘭の翻訳活動」を読まれることをお奨めする。勿論、本節のような細かな分析はないので裏付けにはならないが、この考察が的外れでないことくらいは保証されよう。そして『数学史』[44]「第八章　東アジアにおける近代西洋数学の受容」を通読されれば大きな歴史の流れの中でここに取り上げた個々の事象を俯瞰することが出来ることであろう。

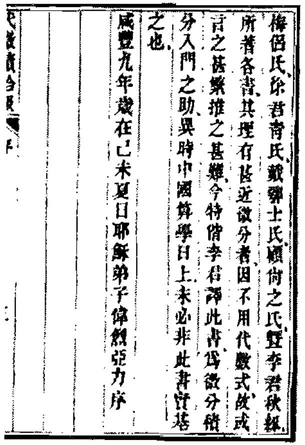
『代微積拾級』、『代數學』『代微積拾級譯解』の発刊情報



『代微積拾級譯解』（奥付）　（表紙）

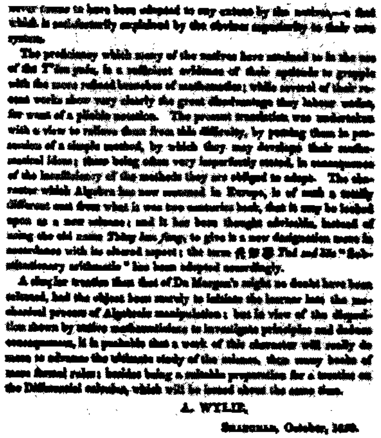


『代微學』（書下し文）



偉侶氏、李君宵氏、戴密士氏續術之氏、暨李君秋紉
所著各書、其理有甚近微分者、因不用代數式故或
言之甚繁、推之甚難、今特偕李君譯此書、爲微分積
分入門之助、異時中國算學日上、未必非此書實基
之也。
咸豐九年歳在己未夏日耶穌弟子偉烈亞力序

『代微積拾級』



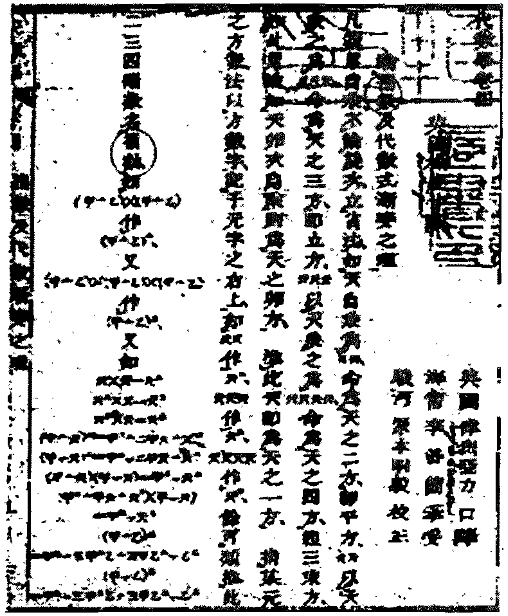
A. WYLIE,

『代微學』（原書）

26. 指数はなぜ指数と云うのか？

ようやく本論の表題ともなった問題に答えることが出来る。

既に述べたように「指数」と云う用語を案出したのはワイリーと李善蘭であった。下にあるこの二人の翻訳書『代數學』の引用を見ると、「指数」と云う用語が、「某元の方数を指す」に由来することが判る。しかも、ここで云う「方数」の「方」は「平方」や「立方」の「方」を「指している」ことまで詳らかになり、指数と云う用語の語源はこれで完全に明晰になったであろう。



代數學（1872年4月）

アレクサンダー・ワイリー　口譯
李善蘭　筆受
塚本明毅　校正

一応、参考として書き下し文風に現代語訳を付けて置く。

代数学第四巻
指数及代数式漸変の理(ことわり)を論ず

凡そ数を累ねて自乗するに、幾次を論ずべきではない。省法に立って、天の自乗を天天と為し、命じて天の二方、即ち平方と為す。天天に天を以て之を乗じ天天天と為し、命じて天の三方、即ち立方と為す。天天天に天を以て之を乗じ天天天天と為し、命じて天の四方と為す。即ち三乗方（四乗方と書きたくなるが、掛けている回数は三回であることに注意)、此の如く累推し、天の四の次の自乗の如く、則ち天の四乗方と為す。此れに準じて天即ち天の一方と為す。

某元の方数を指し、法は方数字を以て、元字の右上に記す。天天の如きに天^{二}を作し、天天天は天^{三}を作し、天天天天は天^{四}を作す。余は類推すべき此の二三四の諸数を指数と名づける。

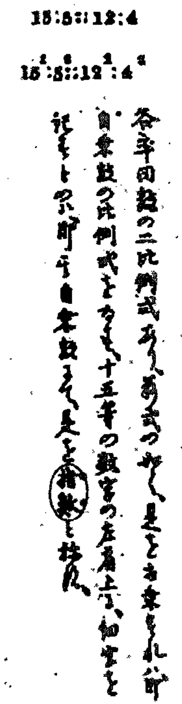
（拙試訳）

尚、翻訳書の「巻四　論指數及代数式漸変之理」の原文は次の通りであった。index の語義「指し示す」から指数と訳した訳ではないこともこれではっきりした。

Chapter IV.　ON EXPONENTS, AND ON THE CONTINUITY OF ALGEBRAIC EXPRESSIONS

結局、清国の数学者李善蘭がイギリス人宣教師アレクサンダー・ワイリーと協力して、ド・モルガンの数学書を翻訳するときに使っていた「指數」と云う翻訳語が日本に渡ってきて明治の初期に定着した。これが真相であろう。

27.　日本における「指数」の初出



それでは日本における「指数」の初出文献は塚本明毅によって校正された前述の『代數學』なのであろうか。当初、著者もそう考えて疑わなかったが、それは間違っていた。

塚本明毅は明治二年(1869 年)に『筆算訓蒙』を沼津学校から出版しており、左の引用を見て判るように指数が使われている。（巻３、十）[77]

また、執筆時で初出を考えるならば、更に遡ることが出来る。たまたま、『代數學』の現れる前の日本では指数をなんと呼んでいたのかが気がかりとなっていたので、日本最初の西洋数学書として人口に膾炙されることの多い『洋算用法』（柳河春三）や『西算速知』（福田理軒）を調べることにしたのだが、その折、前書の続編『洋算用法　二編』（鷲尾卓意（保））[78]を知ることになった。本書は文久二年（1862 年）に執筆され明治三年（1870 年）に発行されるのだが、下記の引用を見て判るように、既に「指数」のみならず「代数学」[79]まで現れていたことが見て取れるであろう。

大矢真一氏によると本書は「世間に稀な書物」であるらしいが、幸い今では近代ライブラリーで簡単に閲覧することが出来る。[80]

77 「近代デジタルライブラリー」12/54 で閲覧できる。
78 本書は『江戸科学古典叢書 20　西算速知、洋算用法』（大矢真一　編）[37]に付載されている。
79 本論とは直接関係のない話ではあるが、「學」「數」ではなく「学」や「数」が 1862 年当時に既に使用されていたことに注目されたい。
80 「近代デジタルライブラリー」10/65 で閲覧できる。


文久二年壬戌春之日

土佐　冨永保 識

本書は『洋算用法』のように「本邦初の日本人の手による西洋数学書」と云う訳でもなく、「塵劫記」のようにベストセラーとなって大きな影響を与えた訳でもないが、少なくとも「指数」、「代数」や「分母」のような用語が初めて使われた。この点に於いて確かに本書には歴史的な意義があるのだが、著者はもう少し別の視点で捉えている。それは、本書が清国に於いて初めて案出されたこれらの用語[81]をわずか3年にして既に自家薬籠としていたことを裏付ける資料だ、と云う点である。後で触れる対数の場合などでは、この 10 倍以上の時間をかけて伝播したことを考えると、驚くべき速さであることが判ろう。この驚異の速さの原因は 1853 年の黒船来航であった。幕府はこの対策として、外国の諸事情を知るため、オランダに膨大な量の書物を注文した。これらの書物は 1858 年に到着するのだが、その中には多くの数学書も含まれており、ここから近代日本の西洋数学の受容が始まる。注意すべきは前述の『洋算用法』、『西算速知』がこの前年である 1857 年に発刊されていることである。

81 ここに挙げた三つの例はすべて『代微積拾級』(1859) で案出された翻訳語である。

我々は、本書を単なる初出文献としての物珍しさだけではなく、歴史の大きなうねりのなかで我々の祖先が列強からの祖国を死守せんとする、激しい危機感と狂おしいまでの使命感の発露としてこれに先立つ二著とともに見るべきなのであろう。[82]

本節の最後に、李善蘭と塚本明毅を『中国の数学』[64]、『中国の数学通史』[66]と『幕末・明治初期数学者群像＜上幕末編＞』[43]を参考にして簡単に紹介しておこう。

李善蘭は清朝末期を代表する数学者で、多くの偉大な数学者によくある例に洩れず、若い頃から数学の才能を発揮した。9 歳で『九章算術』を読み、15 歳のときには『幾何学原論』を 6 巻まで読破する。しかし、これだけの才能がありながら 17 歳で杭州の科挙の郷試を受験するも不合格となった。膨大な古典の暗記は創造的頭脳には向かなかったようだ。求められている能力が違うのだろう。上海でアレクサンダー・ワイリーと会い、彼が、明代にマテオ・リッチが訳さなかった[83]、『幾何学原論』の 7 巻～15 巻を翻訳するのを手伝った。その後、本節で紹介した『代微積拾級』(1859：咸豊九年夏[84])や『代數學』(1859：咸豊九年冬)の翻訳も行った。この二冊の漢字文化圏への影響は大きく、以前は「借根法」と呼ばれていた方程式論が『代數學』出版以降は代数学と呼ばれるようになった。そして『代微積拾級』によって解析幾何学や微積分学が初めて中国語に移されたと言われている。彼はまた多くの数学の専門用語の訳語を案出したことでも知られている。『代微積拾級』には 330 個の英文の数学術語とその翻訳語との対照表がある。既に紹介した「指数」、「代数」以外にも「常数」「変数」「既知数」「函数」「三角函数」「冪級数展開式」「係数」「単項式」「多項式」「微分」「積分」「横軸」「縦軸」「曲線」「相似」と云ったお馴染みの用語が散見される。こうして見ると彼は後世のために西洋の進んだ知識を翻訳し、紹介した人物のように思われそうだが、中国数学史上初めて素数についての本格的な学術論文『考数根四法』を発表した研究者でもあ

82「当今、国家武威を震耀し、大艦を造り、巨砲を製し、防禦の術を専務とする時においては、数理に熟さざれば、その功を得べからず。」(『西算速知』凡例より)　「故に今の時務、その術を習い、その要を発するをもって、急のもっとも急なるものとなす。」(『洋算用法』自序より)

83 マテオ・リッチは徐光啓と一緒に訳していたが、マテオが後の 9 巻をきちんと学んでいなかったので「もう作りたくない。」と言ったらしい。

84 咸豊九年歳在己未孟夏八日海寧李善蘭自序 『代数学』の方には 咸豊九年歳次己未孟冬英国偉烈亜力自序 とある。

る。内容的にはフェルマーの小定理及びその逆定理が成立しないことの指摘であるから西洋数学では既知な結果であったのだが、彼はこれを独自に導き出したのである。

余談であるが、中国数学史の古典的名著と呼ばれる『中国数学史』（銭宝琮）[50]によると、「李善蘭は自らの階級的本質から、太平天国の革命運動にたいして敵対的な考えをいだき、また資本主義国家から派遣された宣教師と緊密に往来して、深く外来の文化侵略の影響をうけ、その結果として当時の洋務派官僚集団に身を投じた。」とある。今では考えられないような評価の仕方であり、1980 年代に出版された李迪の『中国の数学通史』[66]p307 ではこのような国家的イデオロギー色は薄まり、「彼は何時の日にかは『人びとが算を習って、器具を製造するのに詳しくなれば、威力を持って海外の各国を震え上がらせ朝貢を奉らせる』ことができると幻想した。このような愛国思想の推進が、彼に翻訳と数学研究の仕事をさせて、称賛に値する成果をあげさせた。」と、云う評価に変わった。ここから逆に出版当時の 1964 年と云う時代が見えてこよう。

塚本明毅は幕臣塚本法立の子として、天保四年(1833)江戸下谷に生まれた。嘉永三年昌平黌に入り六年同校学試に応じて甲科及第であった。当時、矢田堀景蔵、田辺太一と共に三才子と称せられた。彼は矢田堀と同様に和算の教育を受けていない。

明治元年には塚本は病と称して榎本勢に加わらずにいたが、五月徳川駿河に移封と決まると徳川家のために働くこととなる。そして間もなく沼津兵学校一等教授に就任した。兵学校頭取は西周であった。西周が新政府に招かれてから塚本は三年九月から沼津兵学校頭取となった。明治二年に塚本は名著『筆算訓蒙』三巻を著わした。この本は明治五年文部省より学制領布で「算術は洋法而己」と公布したとき教科書として塚本の書を公示したのである。文部省公示の教科書は他にも開成所出身の数学啓蒙家の算術書等があったが、塚本の本が多く利用されたのである。初めて算術を系統的に解いた名著であって「天下独歩の数学家」と称された。
『幕末・明治初期数学者群像＜上幕末編＞』[43]p63-65

塚本は東京数学会のメンバーとしても名を連ね、日本数学の草創期を支えた一人でもある。彼の業績で現在の我々の生活に直結するものとしては明治 6 年の太陽暦への改暦があろう。新暦で神武天皇即位日を算出し、現在の建国記念日（2 月 11 日）の直接的な根拠を与えた。

28. 翻訳語“指数”の案出が中国で遅れた原因

著者は当初、李善蘭が 1859 年（49 歳）に翻訳するまで指数にあたる用語が無かったことに大きな違和感を覚えた。対数の場合は、ブリッグスによる初めての常用対数表“Logarithmorum Chilias Prima”の出版（1617 年、34 歳）から 29 年後（1646 年）には、35 歳のポーランド人宣教師スモグレンスキーJ.Nicolas.Smogolenski 穆尼閣（1611－1656）により中国に伝えられ、47 年後（1664 年）には『暦学会通』が出版されている。[85]それならばロピタルの微分学の教科書（1696 年,35 歳）の結果なども 18 世紀中頃には中国に伝えられ、翻訳なり解説本なりが既に出ていたのではないかと素朴に考えたからだ。既に、見たようにロピタルの教科書には指数が明確に定義されている。この計算で行くと 116 年くらい遅れていることになる。その後、中国数学史の通史を読んで、この驚くべき遅滞の原因が 18 世紀中期から 19 世紀中頃（1723-1840）の中国の復古思潮の影響にあったことを理解出来た。要する、この期間、中国は鎖国政策を実施しており、西洋からの科学書の流入は止まってしまっていたのである。

29. なぜ“対数”に比べて“指数”の漢字の語源説明をしている文献が少ないのか？

また、上述の対数と指数の翻訳時期の大きなずれから、現在の日本において、対数に比べて指数の日本への伝来や初出文献についての書物や論文が少ない理由もなんとなく判った気がする。つまり対数が江戸時代の中期

[85] ニーダムによると、ヨーロッパ数学と中国との出会いは 1610 年で、融合の時点は 1640 年である。『ニーダム・コレクション』[15]p149-150
出会いは恐らく、マテオ・リッチによるユークリッド幾何学原論の部分翻訳『幾何学原本』（1607）あたりを意味しているのだろう。

には日本に伝来し、何人かの和算家がこれに興味をもち、結果として、今日の和算史の中で取り上げられることになったのに対し、指数が明治以後に日本に伝えられたため、所謂、和算史の対象からは外れてしまったのである。

対数の語源や伝来の経緯は本論の対象外なのでここでは扱わないが、その研究はかなり以前からそして現在に至るも、確実に継続されている。例えば日本の和算史の金字塔と云うべき『明治以前　日本数学史』の第5巻第13章第5節は「對數表」であり、「對數」が『数理精蘊』に由来することや「所謂對數表者モト西洋人ノ作ル所ニシテロガリチムト云、支那人之ヲ譯シテ對數表ト名ク」と云ったことにも触れられている。また、比較的新しい研究としても『日本の江戸時代における対数の歴史』(横塚啓之)や『江戸後期西洋数学受容の文献学的研究』(李文明)があるし、複数の一般向け和算解説書、例えば『新　和算入門』(佐藤健一著)、に対数の解説を見ることができる。これとは対照的に指数についての出自を解説する文献は片野氏のもの[39]くらいしか見当たらない。

明治以後の西洋数学の受容の歴史は重要で興味深いテーマだと思うのだが、西洋数学史に比べて比較的マイナーな和算史に比しても更にマイナーな扱いとなっているのが現状であろう。この近代日本数学史の貧困が「指数」のような中学生でも知っているメジャーな用語の出自・来歴さえもなかなか知りえないという淋しい現況を招致したことは否めない。『日本の数学100年史』[55]、『幕末・明治初期数学者群像』(小松醇郎)、『数学史』(佐々木力)[44]の第八章、『授業を楽しくする数学用語の由来』[39]『数学用語と記号ものがたり』(片野善一郎)[40]を超える近代日本数学史書が現れることを大いに期待したい。

30.　辞典情報の訂正・改善のまとめ

日本国語大辞典から OED や CNRTL、DWB と云った最高の権威ある辞典について、その過誤・不備・不満を指摘してきたのだから、指数が清国からの外来語であり、明治以降に日本で作られた漢語ではない、と判った以上は漢和辞典についても、これまで同様の検証をしておく必要があろ

う。そうすると調査対象は漢学の泰斗諸橋轍次が心血を注ぎ、完成までに75年の歳月を要した最高の漢和辞典との呼び名の高い『大漢和辞典』を置いて他はあるまい。本辞典に於ける「指數」の解説は以下の通りであった。

【指數】83 シスウ①ゆびさしかぞへる。[蘇轍、黄州快哉亭記]漁父樵父之舍、皆可_指數_。
②數學用語。或る數の冪又は乗根を示すために、其の右肩に附記する數字又は文字。
③物價・賃銀の變動の目印となる一定の數字。

この辞典の編集方針として「語彙には出典もしくは引用例を附載した。但し、現代の中國語と新造語とは、特別の場合の外は引例を省いた。」とある。それ故、②、③について①のような出典がないのは、それが「現代の中國語または新造語」と見なされたからと考えられよう。また、出版社のホームページでの説明では「『大漢和辞典』は、本来、漢籍(中国の古典)を読むために作られた辞典」であると云うことなので、『代微積拾級』がいわゆる「漢籍」とは見なされない、との判断なのかもしれない。しかし、清朝の時代(1859年)に造られた言葉を「新造語」と言って良いのだろうか。また、「指數」同様に同じ著書で創設され、同年にやはり李善蘭によって出版された著書『代數學』の表題となることで決定的に世に広まった翻訳語「代數學」については出典が転載されていることも一貫性に欠くと言えよう。②については以下のように出典を用意しておくことが望ましいと考える。

[李善蘭、偉烈亞力、代微積拾級]右上角之小字名指數、有整指數

更に、この珠玉の辞典に漢学の門外漢からの不作法な苦言をあと一つ言わせて貰えるなら、「代数」の出典としては孫詒譲の[周禮政要・通藝]ではなく、この用語を漢字世界に定着させた李善蘭の『代數學』か、初出である『代微積拾級』を使って欲しかった。

さて、これまで本論で取り上げて来た辞典類の修正案をまとめておく。

言語	辞典名	項目	現行	修正案
日本語	日本国語大辞典	「指数」の初出文献	『数学ニ用キル辞ノ英和対訳字書』(1889)（藤澤利喜太郎）	『洋算用法 二編』(1862)（鷲尾卓意(保)）
英語	The Oxford English Dictionary	"exponent"の初出文献	Edward Phillips による The New World of English Words: or, a General Dictionary の John Kersey による改訂版 (1706)	John Wallis "Treatise of Algebra" (1685)
英語	The Oxford English Dictionary	"index"の初出文献	Samuel Jeake "A compleat body of arithmetic, in four books" (1696)	John Wallis "Treatise of Algebra" (1685)
仏語	Grand Larousse De La Langue Française	"exposant"の初出文献	Pascal(1658)	Jacques Peletier "L 'Algèbre" (1554)
独語	Deutsches Fremdwörterbuch	"exponeten"の初出文献	Christian Wolff "Mathematisches Lexicon" (1716)	Leibnizens "Leibnizens an Tschirnhaus" (1694)

中国語	大漢和辞典（諸橋）	【指數】數學用語 出典・引用例	なし	[李善蘭、偉烈亞力、代微積拾級]右上角之小字名指數、有整指數
中国語	大漢和辞典（諸橋）	【代數】出典・引用例	孫詒讓の[周禮政要・通藝]	李善蘭、偉烈亞力の『代數學』または『代微積拾級』

実のところ、数学用語の初出文献については辞典類には過誤がかなり多く、参考にするにはよいが、安易に信用すべきではない。例えば日本国語大辞典では「代数」「対数」「関数」と云った基本的な用語の初出文献も違っていた。次の改訂時には、適切に改訂されることを期待する。[86]

ちなみに、『日本国語大辞典』によると「代数」の初出は「指数」と同じく、＊数学ニ用キル辞ノ英和対訳字書(1889)（藤澤利喜太郎）で、「対数」の初出は叙上の＊工学字彙(1886)（野村龍太郎）であった。著者は、前者については＊『洋算用法　二編』(1862)（鷲尾卓意（保））　が適切と考える。後者については、未だ確定した説はないようであるが＊数理精蘊(1723 出版,1761 頃日本へ伝来（異説あり）)(陳厚耀（ﾁﾝｺｳﾖｳ）)くらいに書いておけば少なくとも現在の出典よりは適切と言えるであろう。

また、著者は上記の修正案は現行のものよりは適切であろうが、最終的なものとは考えていない。特に、英語の index の初出がこんなに遅いとは思えない。1629 年の初版を確認していないので断言出来ないが、エドモンド・ウィンゲートの著書 "Arithmetick, Containing a Plain and

86 数学の用語についての歴史的な初出文献を探す目的にはこの辞典は適していない。このような大辞典であっても盲信すべきではない、との事例になると考え、随分、意地の悪い書き方をした。しかし、だからと言ってこの日本が誇る大辞典を弾劾するのは的外れである。この辞典の「出典・用例について」の説明をきちんと読めば「選択の基準は、概略次の通り。」とあり、編集者自身が注意喚起している。要するに、辞典側の問題ではなく、我々の使い方の問題なのだ。

余談であるが、読者の中に、このような初出文献の過誤から、辞典類そのものに対する畏敬の念を失うことがあるとすれば、声を大にして「否」と言いたい。OED 1 完成の陰で、精神病院で後半生を過ごさなければならなかった最大の功労者の一人であるマイナーの秘話、浩瀚なグリム独逸語辞典を、グリムが Frucht まで完成させて逝ってしまった後、冷戦下の東西ドイツが政治的立場を超えて協力し合い、見事に完成させたエピソード、戦災による版の消失、失明の苦難を乗り越えて大漢和辞典を完成させた諸橋轍次と鈴木一平の話、著者はこれらを心を熱くせずには語れない。

Familiar Method, for Attaining the Knowledge and Practice of Common Arithmetick(通常算術の知識と実践を達成するための平易で簡便な方法を含んだ算術)" くらいには少なくとも遡れるだろうし、ラムスの著書の英訳本（著者は未見）に載っているのではないか、と推察している。exponent についてもこれまでの考察（⇒19）を鑑みれば、1660 年代くらいに初出文献が現れている方が自然であろう。他についても、意外な文献が発見されて、初出記録が更新される可能性は勿論ある。しかし、個人的感想ではあるが、中国語、日本語、フランス語、ドイツ語についてはかなり最終版に近い位置に来ている、と考えている。

＊＊＊＊＊＊＊

このような初出文献の調査は地味であり、その意義は一般には理解されにくいことが多い。職業的研究者ならともかく、そうでない者が行っていると、奇人・変人・暇人と思われるようで、「それのどこが面白いのか？」と、言いたげな反応に会うことも少なからずあった。確かに、このような調査に創造性は無いし、苦労した割りにはその調査結果が感動を与えることも、通常は無い。「指数」が 1889 年に現れようと 1862 年に現れようとそれ自体はどうでも良い話に見えるのも良く判る。しかし、これらは歴史を考える際の最も基本となる部品であり、ここがいい加減だと、歴史自身がリアリティーの薄い曖昧なものとなってしまう。少なくとも「対数」の初出を 1886 年と認識している限りは、清国の鎖国政策の影響には思いは至らないであろう。そして、我々が思い描く歴史の流れも、膨大な数の細かな検証の積み上げの上にあることに思いを致すべきである。実は、このような言い訳めいたことを縷々書いたのは次の最終節がこのようなまっとうな歴史研究からいささか外れているからである。

31. 法華経におけるアルキメデスの影響？

アルキメデスは巨大数を表現するために指数概念を編み出し、この数体系を利用して宇宙全体を砂で満たしたときの砂の個数を計算によって数え上げたことについては既に触れた。ここでは、アルキメデスのこの傑出した論法がインドでも知られていた可能性（仮説）について述べておきたい。

次の『法華経（白蓮華のように最も勝れた正しい教え）』（妙法蓮華経化城喩品第七）（ﾐｮｳﾎｳﾚﾝｹﾞｷｮｳｹｼﾞｮｳﾕﾎﾝ）[36]の一節は、少なくとも、彼の論文の要旨くらいは聞きかじった人物によって書かれた可能性がある、と考えている。著者が特に注目したのは「ある数学者か、あるいは数学者の中で最も勝れた人」を引き合いに出しているところである。通常であれば「『三千大世界を粉々にして、その微塵の数をお前たち数えられるか。』『とても数えられません』『そうであろう。しかし、如来が入滅して以来、どのくらいの劫が経過したかはそのような微塵の数よりも遥かに大きい・・・』」と云った論理構築がされるのではなかろうか。わざわざ「最も優れた数学者なら世界の微塵の数を計算し尽くすことが出来る」ことに言及する必然性が見当たらない。それどころか、どこかで、「世界の微塵の数を数えることの出来る、とてつもない能力をもった数学者」の存在を知っていなければ考えつけないフレーズである、と著者には思えてならないのである。[87]ここでは問題の個所のサンスクリット原文と文法的に正確であるとの定評のある植木雅俊氏による新訳[36]と鳩摩羅什の漢訳を併記しておく。

男性出家者たちよ、その如来は、どれほど遥かな昔に出現されたのであろうか。男性出家者たちよ、あたかもこの世の三千大千世界にそれほど多量の大地の構成要素があって、そのすべてをまさに誰かある人が粉々にして粉末にするとしよう。そこで、その人は、その世界の中から一つの最も微小なる微塵（原子）を取って、東の方向における幾千もの世界を過ぎ去って、その最も微小な微塵を下に置くとしよう。そして、その時、その人が過ぎ去って、第二の最も微小なる微塵を下に置くとしよう。このように

87 「単に、如来の力の大きさを指し示すための比喩に過ぎないのではないか」との宮田義美氏の質問に対する、著者の回答である。

して、その人が東の方角においてすべての大地の構成要素を下に置いたとしよう。

男性出家者たちよ、あなたたちはそれをどう思うか。それらの世界の[構成要素がなくなってしまう]終端、あるいは終極に計算によって達することができるであろうか」

それら[の男性出家者たち]が申し上げた。

「世尊よ、それは実にできません。人格を完成された人（善逝）よ、それは実にできません」

世尊がおっしゃった。

「しかしながら、男性出家者（比丘）たちよ、だれかある数学者か、あるいは数学者の中で最も勝れた人は、計算によってそれらの最も微小なる微塵（原子）が置かれたところ、あるいは置かれなかったところのそれらの世界の終極に達することができるのである。

けれども、その世尊である“大いなる神通の智慧の勝れたもの”（大通智勝）という如来が完全なる滅度（涅槃）に入られて後の、それほど多くの劫、それらの幾百・千・コーティ・ナユタもの劫の終極に達することは、計算の適用によってもできないのである。それほど長いその時間は、このように考えることもできなければ、このように量ることもできないのである。

しかしながら、男性出家者たちよ、この如来の知見の力を発揮することによって、私は、その如来がそれほど遥かな昔に完全なる滅度（涅槃）に入られたのを、あたかも、今日か昨日に完全なる滅度に入られたかのように思い出すのだ」

諸の比丘よ、彼の仏の滅度より已来、甚だ大いに久遠なり。譬えば、三千大世界の所有の地種を、仮使人有りて、磨りて以て墨と為し、東方千の国土を過ぎて、乃ち一点を下さん。大いさ微塵の如し。又、千の国土を過ぎて、復一点を下さん。是くの如く展転して地種の墨を尽くさんが如き、汝等が意において云何。是の諸の国土を若しは算師、若しくは算師の弟子、能く辺際を得て、其の数を知らんや不や」。

「不なり、世尊よ」

「諸の比丘よ、是の人の経る所の国土の若しは点せると点せざるとを、尽く末して塵と為して、一塵を一劫とせん。彼の仏の滅度より已来、復、是の数に過ぎたること、無量無辺百千万億阿僧祇劫なり。我、如来の知見力を以ての故に、彼の久遠を観ることを猶今日の若し」

（大正蔵、巻九、二二頁　一部）

/ tad yathâpi nāma bhikṣavo yāvān iha trisāhasra-mahāsāhasre loka-dhātau pṛthivī-dhātus taṃ kaś-cid eva puruṣaḥ sarvaṃ cūrṇī-kuryān maṣiṃ-kuryāt / atha khalu sa puruṣas tasmāl loka-dhātor ekaṃ paramāṇu-rajo gṛhītvā pūrvasyāṃ diśi loka-dhātu-sahasram atikramya tad ekaṃ paramāṇu-raja upanikṣipet / atha sa puruṣo dvitīyaṃ ca paramāṇu-rajo gṛhītvā tataḥ pareṇa parataraṃ loka-dhātu-sahasram atikramya dvitīyaṃ paramâṇu-raja upanikṣipet / anena paryāyeṇa sa puruṣaḥ sarvāvantaṃ pṛthivī-dhātum upanikṣipet pūrvasyāṃ diśi / tat kiṃ manyadhve bhikṣavaḥ śakyaṃ teṣāṃ loka-dhātūnām anto vā paryanto vā gaṇanayā 'dhigantum / ta āhuḥ / no hīdaṃ bhagavan no hīdaṃ sugata /

bhagavān āha / śakyaṃ punar bhikṣavas teṣāṃ loka-dhātūnāṃ kena-cid gaṇakena vā gaṇaka-mahā-mātreṇa vā gaṇanayā paryanto 'dhigantuṃ yeṣu vôpanikṣiptāni tāni paramāṇu-rajāṃsi yeṣu vā nôpanikṣiptāni / na tv eva teṣāṃ kalpa-koṭī-nayuta-śata-sahasrāṇāṃ śakyaṃ gaṇanā-yogena paryanto 'dhigantum / yāvantaḥ kalpās tasya bhagavato Mahābhijñājñānâbhibhuvas tathāgatasya parinirvṛtasyâtivṛttāḥ sa kālo 'bhūd evam acintya evam apramāṇaḥ / taṃ câhaṃ bhikṣavas tathāgataṃ tāvac-ciraṃ parinirvṛtam anena tathāgata-jñāna-darśana-balâdhānena yathâ 'dya śvo vā parinirvṛtam anusmarāmi //

ganaka 数学者　gananā　計算　paramânu- 最も微細な rajas　塵

『梵漢和対照・現代語訳　法華経（上）』（植木雅俊）[36] p428-431

中村元の研究[88]によると、法華経は紀元 40 年～220 年の間に成立したとされる。また、法華経の各品の成立順序としては三類に分類する方式がもっとも支持されており、叙上の「化城喩品」は最も早く成立した第一類に属すると考えられている。「砂の計算者」の発表時期が紀元前三世紀頃であることを考えれば、成立順序に矛盾はない。

88　『大乗仏教の成立史的研究』（宮本正尊編）[56]p487-488　正確には「法華経の嘱累品第二十二までの部分」

次に、「砂の計算者」が西紀後一世紀頃にはインドに伝播していた可能性を裏付けることは出来るであろうか。これについては厳密には難しいが、紀元前後には貿易風[89]の発見により、地中海地方とインドとの交易が活発になったことは立証されており、更に、インド天文学へのギリシャ天文学の影響についても、定説化している。つまり、状況的な可能性については主張できるであろう。

紀元後最初の数世紀間、クシャン朝、グプタ朝の時代に、ギリシャの天文学的知識がインドに、おそらくはローマとの交易ルートに沿って移転したという強力な証拠がある。奇妙なことに、プトレマイオスの天文学と数学は移入されず、代わりに、その先駆者の何人かの著作、とくにヒッパルコスの著作が移入された。ギリシャ天文学の要請が三角法の発展を導いたこととちょうど同じように、インド天文学の要請も、この分野のインドにおける展開を導いたのである。『カッツ数学史』[22]p242

しかしながら、インド数学へのギリシャ数学、特にアルキメデスの数学、の影響についてのはっきりした定説はなく、叙上の説もあくまでも著者の仮説であることを注意しておく。[90]

ギリシャでは紀元前三世紀のアルキメデスによって球の体積を含む多くの求積公式が正しく得られていたから、少なくとも球と四面体に関してその影響がなかったことだけはいえる。ただ、円周率（22/7）や円の面積公式のような初歩的なものを除けば、アルキメデスの数学は、直接ギリシャ文化の影響を受けたヘレニズム世界でさえ、それほど普及していたわけでもなさそうだから、アルキメデスないしギリシャの数学の影響を完全に否定できるほどの説得力はその議論にない。同時にまた、ギリシャの数学

89　発見者の名前によって「ヒッパロスの風」とも呼ばれる。発見の年代については、諸説あるが、紀元後45年頃が定説となっている。少なくともローマの博物学者プリニウス（A.D.75年没）はこの風のことは知っていた。また、プリニウスと同時代のある無名な商人はこの風にのってインドへやってきて、『エリュトゥラー海案内記』を書いている。「ヘレニズム科学のインド化」（矢野道夫）『比較科学史の地平』[61]p88

90 ギリシャ自然哲学がインド自然哲学に与えた影響で、状況証拠はあるものの確証にまでは至っていない例としては、アリストテレスの元素説とヴァイシェーシカ哲学の元素説の酷似性『須弥山と極楽　-仏教の宇宙観』（定方晟）[47]p94-98などがある。

　尚、著者は『インドとギリシャの思想交流』（中村元）[54]で、法華経に何らかのギリシャからの影響がないかどうかを調べてみたが聖書の寓話（ルカによる福音書15・11－32）と法華経の譬喩（信解品第四「長者窮子」）の類似性程度以上のものを見つけることは出来なかった。

がインドの数学に影響を及ぼしたことを積極的に指示する証拠もない。『インドの数学』[56]p166

また、西暦紀前100頃に書かれたジャイナ教の文献アヌオーガッダラ・スートラ Anuyogadwara-Sutra、初めて分数冪を導入した文献として紹介済であるが、には「可算」の「最高」の手前の数に対して以下のような「化城喩品」の巨大数表現に類似した記述が見られる。

かいば桶の直径がジャンブー大陸と同じ10万ヨージャナ（100万キロメートル）で周囲が31万6227ヨージャナだとする。その中に白辛子の種を1個ずつ数えながら、容器がいっぱいになるまで詰めていく。他の大陸や海と同じ大きさのかいば桶にも同様に種を詰める。しかしこれでもまだ可算の最高には至らない。[91]
『非ヨーロッパ起源の数学』（ジョージ・G・ジョーゼフ著）[26]p336

それなら、「化城喩品」はジャイナ教の影響を受けた、と云う仮説も当然成り立つが、アヌオーガッダラ・スートラの記述には「数学者」は出てこない上に、こちらは「数えきれない」ことに力点が置かれているのに対し、「化城喩品」では、そのような一見数えられそうもない巨大な数を「最も優れた数学者」ならば「計算」によって数え上げてしまう、としている点を強調していることを考慮すればより「砂の計算者」との類似性を著者は感じる。

---

91 既に触れたように、この文献は指数の分数冪を初めて世に問うた書物でもある。また、他の箇所ではこの巨大数表現からより高位の巨大数への、集合論の順序数（ω）への類似性が語れるような、構成が見られる。

・直接引用文献

1. Ευκλείδης "Στοιχεία"
2. Ἀρχιμήδης "Ψαμμίτης"
3. Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς "ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ"
4. Muḥammad ibn al Ḥusayn al-Karajī "Extrait du Fakhrī"
5. Ibn Yaḥyā al-Maghribī al-Samaw'al "al-Bāhir fī al-jabr"
6. al-Bāhir fī al-jabr "Algorismus proportionum"
7. Nicolas Chuquet "Triparty" Aristide Marre
8. Michael Stifel "Arithmetica Integra"
9. Jacques. Peletier "L'Algèbre"
10. Christoff Rudolff、Michael Stifel "Die Coss Christoffs Rudolffs: mit schönen Exempeln der Coss"(1571)
11. Simon.Stevin "L' arithmetiqve de Simon Stevin de Brvges"
12. Petri Rami arithmetices libri duo, et algebrae totidem Lazarus Schoner
13. Albert Girard "Invention nouvelle En L'Algebre"
14. René Descartes "La Geometrie"
15. John Wallis "Arithmetica Infinitorum"
16. John Wallis "Treatise of Algebra"
17. Isaac Newton "Newton's letter to Oldenburg"
18. Christian Wolff "Mathematisches Lexicon"
19. Leibnizens "Leibnizens an Tschirnhaus"(1694)
20. Samuel Jeake "A compleat body of arithmetic, in four books"(1696)
21. de l'Hôpital "Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes"
22. William Clifford "The common sense of the exact sciences"
23. Elias Loomis "Elements of analytical Geometry and Differential and Integral Calculus"
24. De Morgan "Elements of Algebra"
25. "Mathematisches Lexicon"
26. 李善蘭 Alexander Wylie【偉烈亞力】『代微積拾級』
27. 李善蘭 Alexander Wylie【偉烈亞力】塚本明毅 『代數學』

28. 福田理軒、半 『代微積拾級譯解』
29. 塚本明毅『筆算訓蒙』
30. 鷲尾卓意（保）『洋算用法 二編』
31. 藤澤利喜太郎 『数学ニ用キル辞ノ英和対訳字書』
32. 菊池大麓 『数理釈義』
33. 野村龍太郎『工学字彙』
34. 山田昌邦『英和数学辞書』

・参考辞書・辞典

『日本国語大辞典 第二版』
『大漢和辞典』
『英語語源辞典』
"The Oxford English Dictionary second edition"
"Grand Larousse De La Langue Française"
"Das Deutsche Wörterbuch von Jacob und Wilhelm Grimm"
"Etymologisches Wörterbuchder deutschen Sprache"
"Deutsches Fremdwörterbuch"
"Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales"
"Le Grand Robert de la langue française"
"Trésor de la langue française"
"Grand Larousse De La Langue Française 1986"

・引用文献

1 A.L.Cauchy COURS D'ANALYSE （解析学教程 1821）［書籍］/ 訳 西村重人、髙瀬正仁（監訳）．みみずく舎, 1821 （2011/04).

2 B.S.Jain Ancient Jaina Mathematicians［書籍］/ 編 SinghKrNagendra. · NEW DELHI : Anmol Publications, 2001. · 第 1 巻 : 30 : ページ: 89-106.

3 Carl.B.Boyer ボイヤー数学史 2［書籍］/ 訳 加賀美鐵雄、浦野由有．朝倉出版, 1984.

4 Carl.B.Boyer ボイヤー数学史 3［書籍］/ 訳 加賀美鐵雄、浦野由有．朝倉出版, 1984/6.

5 E.Grant A Source Book in Medieval Science［書籍］/ 編 GrantEdward. Harvard University Press, 1974.

6 F.Cajori A HISTORY OF MATHEMATICAL NOTATIONS VOLUME 1［書籍］. The University of Chicago Press Chicago. Illinois. U.S.A., 1928.

7 F.Cajori 初等数学史（復刻版）［書籍］/ 訳 小倉金之助. 共立出版, 1997/06. · 復刻第 1 版.

8 Graham Flegg, C. Hay, B. Moss Nicolas Chuquet, Renaissance mathematician: a study with extensive translations of Chuquet's mathematical manuscript completed in 1484［書籍］.

9 Hans Schulz, Otto Basler, Gerhard Strauss Deutsches Fremdwörterbuch［書籍］. Walter de Gruyter, 2004.

10 J.L.Berggren Episodes in the Mathematics of Medieval Islam［書籍］. Springer-Verlag, 2003/01.

11 Jacqueline A.Stedall A Discourse Concerning Algebra English Algebra to 1685［書籍］. Oxford University Press, 2003.

12 Jacqueline A.Stedall Mathematics Emerging: A Sourcebook 1540 – 1900［書籍］. Oxford University Press, 2008.

13 Jeffrey A. Oaks ALGEBRAIC SYMBOLISM IN MEDIEVAL ARABIC ALGEBRA［論文/レポート］/ University of Indianapolis. · Canada : Philosophica 87, 2012. · ページ: 27-83.

14 Joseph H. Silverman A friendly introduction to number theory［書籍］. Pearson Education, 2012.

15 Joseph Needham ニーダム・コレクション［書籍］/ 訳 牛山 輝代 山田 慶兒， 竹内 廸也， 内藤 陽哉 .筑摩書房, 2009/2.

16 Lorenzo J. Curtis Concept of the exponential law prior to 1900［論文/レポート］. Am. J. Phys. 46(9), Sept.1978. · ページ: pp896-906,.

17 Gingerich Did Copernicus Owe a Debt to Aristarchus［定期刊行物］/ Journal for the History of Astronomy. · 1985 年 FEB 月. · NO.1 : 第 Vol.16 巻. · ページ: p.37-42.

18 Thomas Harriot The Greate Invention of Algebra : Thomas Harriot's Treatise on Equations［書籍］. Oxford University Press, 2003

19 Wilhelm Schmidt/ウィルヘルム シュミット Geschichte der deutschen Sprache/ドイツ語の歴史［書籍］/ 編 Wilhelm SchmidtLangner, Norbert Richard WolfHelmut / 訳 西本美彦 他 7. ·（千代田）: S.Hirzel Verlag Stuttgart/朝日出版, 2000/2004.

20 Г.И.グレイゼル グレイゼルの数学史Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ［書籍］/ 訳 保坂秀正、山崎昇. 大竹出版, 1997/8.

21 アリストテレス、アルキメデス、アリスタルコス、エウクレイデス、ヒポクラテス ギリシヤの科学（世界の名著 9）［書籍］/ 編 田村松平 / 訳 藤沢令夫、大橋博司、池田美恵、三田博雄、種山恭子.中央公論社, 1973/02.

22 ヴィクター J.カッツ/ VICTOR J.KATZ A HISTORY OF MATHEMATICS / カッツ数学の歴史［書籍］.共立出版, 1998 / 2005/06.

23 カール・フリードリッフ・ガウス ガウス整数論［書籍］/ 訳 高瀬正仁.朝倉出版, 1996/6.

24 ゴットフリード・ウィルヘルム・ライプニッツ ライプニッツ著作集 1 論理学［書籍］/ 訳 澤口昭聿.工作舎, 1992/5.

25 ゴットフリード・ウィルヘルム・ライプニッツ ライプニッツ著作集 2 数学論・数学［書籍］/ 訳 原亨吉、佐々木力、三浦伸夫、馬場郁、斎藤憲、安藤正人、倉田隆. 工作舎, 1997/04.

26 ジョージ・G・ジョーゼフ 非ヨーロッパ起源の数学［書籍］/ 訳 垣田高夫、大町比佐栄. 講談社, 1996/05.

27 ジョルジュ イフラー 数字の歴史―人類は数をどのようにかぞえてきたか［書籍］/ 訳 弥永 みち代隆，丸山 正義後平. 平凡社, 1988/06.

28 ダニングトン ガウスの生涯［書籍］/ 訳 銀林浩、小島穀男、田中勇. 東京図書, 1986. · 新装第 2 版.

29 ブルバキ ブルバキ数学史［書籍］. 東京図書, 1969.

30 マイケル・S・マホーニィ 歴史の中の数学［書籍］/ 編 佐々木力 / 訳 佐々木力. 筑摩書房, 2007/05. · 1.

31 ユークリッド ユークリッド 原論［書籍］/ 訳 中村幸四郎、寺坂英孝、池田美恵、伊東俊太郎. 共立出版, 1971.

32 ロシュディー・ラーシェッド アラビア数学の展開［書籍］/ 訳 三村太郎. 東京大学出版会, 2004/08.

33 足立恒雄 フェルマーを読む［書籍］. 日本評論社, 1986.

34 伊東俊太郎 十二世紀ルネサンス［書籍］. 講談社, 2006/9.

35 伊東俊太郎 中世の数学［書籍］. 共立出版, 1987/9.

36 植木雅俊 梵漢和対照・現代語訳 法華経（上）［書籍］. 岩波書店, 2008/3.

37 大矢真一 江戸科学古典叢書 20 西算速知、洋算用法［書籍］. 恒和出版, 1979/9.

38 大矢真一・片野善一郎 数字と数学記号の歴史［書籍］. 裳華房, 1978/8.

39 片野善一郎 授業を楽しくする数学用語の由来［書籍］．明治図書，1988.
40 片野善一郎 数学用語と記号ものがたり［書籍］．裳華房，2003.
41 金子務 オルデンバーグ［書籍］．中央公論新社，2005/03.
42 公田藏 近代日本における、函数の概念とそれに関連したことがらの受容と普及［論文/レポート］．数理解析研究所講究録 第1787巻，2012.・ページ：265-279.
43 小松醇郎 幕末・明治初期数学者群像＜上幕末編＞［書籍］．吉岡書店，1990/09.
44 佐々木力 数学史［書籍］．岩波書店，2010/02.
45 佐々木力 デカルトの数学思想［書籍］．東大出版会，2003/02.
46 定方晟 インド宇宙論大全［書籍］．春秋社，2011/01.
47 定方晟 須弥山と極楽 -仏教の宇宙観［書籍］．講談社，1973/9.
48 志賀浩二 数の大航海［書籍］．日本評論社，1999/7.
49 子母沢寛 幕末奇談［書籍］．文藝春秋，1989/12.
50 銭宝琮 中国数学史［書籍］/ 訳 川原秀城．みすず書房，1990/2.
51 高木貞治 代数的整数論［書籍］．岩波書店，1997/09.
52 寺澤芳雄 英語語源辞典［書籍］．研究社，1999/12.
53 中村幸四郎 数学史ーその学び方と生かし方ー［論文/レポート］．教育科学，No.144，明治図書，1972.・ページ：PP. 12～13.
54 中村元 中村元選集16 「インドとギリシャの思想交流」［書籍］．春秋社，1968/5.
55 「日本の数学100年史」編集委員会 日本の数学100年史 （上下）［書籍］．岩波書店，1983/10.
56 林隆夫 インドの数学［書籍］．中央公論，1993/10.
57 藤原松三郎 明治前數學史 全5巻［書籍］/ 編 日本学士院日本科学史刊行会．財団法人野間科学医学研究資料館，1979/10.・新訂版.
58 宮本正尊 大乗仏教の成立史的研究［書籍］．三省堂，1954.
59 室井和男 バビロニアの数学［書籍］．東京大学出版会，2000/03.
60 文部省 学術用語集・数学編 ［書籍］．大日本図書株式会社，1954（初版）、1982（第30刷）．
61 矢野道雄 ヘレニズム科学のインド化 ＜比較科学史の地平＞［書籍］/ 編 伊東俊太郎、村上陽一郎．培風館，1989/10.
62 矢野道雄 科学の名著1、インド天文学・数学集［書籍］．朝日出版社，1980.
63 藪内清 科学の名著2、中国天文学・数学集［書籍］．朝日出版社，1980.
64 藪内清 中国の数学［書籍］．岩波書店，1974/09.
65 山本義隆 一六世紀文化革命1,2［書籍］．みすず書房，2007/04.
66 李迪 中国の数学通史［書籍］/ 訳 大竹茂雄・陸人瑞．森北出版，2002/06.

付録

指数の二つの語源 exponens 系 と index 系 の使用頻度比較表

表を見る上での注意事項

(1) I、E の意味

I・・・index 系

index,indices,indicum,indicibus,indice,indicesque,indicem の使用数

E・・・exponens 系

exponens, exponentis,exponentem,exponentes,exponentium,

exponente,exposant, exposans,exponent, exponenten, esponente の使用数

(2) 括弧内の数字と括弧なしの数字の違い

① I,E 欄で括弧内の数字と併記された場合、括弧内の数字が「指数」の意味で使われた回数を表す。

② 出版・執筆年については括弧内の年号が参照した書籍の出版年を表し、括弧なしの年号は初版年を表す。

(3) I,E の使用数にはネット上の検索機能を利用したので、その数値は必ずしも正確ではない。また、検索機能が利用出来ない資料については目検で数えた。

著者	出版執筆	国名	書名（言語：総ページ数）コメント	I	E
ミカエル・シュティフェル	1544	ドイツ	Arithmetica Integra （ラテン語：p319） exponens《ラテン語初出》(⇒9) exponens 12 exponentem 4 もあり	0	16
ジャック・ペルチエ	1554	フランス	L'Algèbre （フランス語：p258） exposant《フランス語初出》(⇒10) exposant 13 exposans 7	0	20

ロバート・レコード	1557	イギリス	The Whetstone of Witte （英語：p332）「才知の砥石」と訳される。ルネサンスにおいて英語で書かれた初めての数学書として有名である。冪についてはルドルフ記号（⇒10）が使われている。また、冪の定義では cossike number と云う用語が使われている。シュティフェルの著書にあるコス代数からの記号に由来するものと思われる。また、本書で等号記号「＝」が導入された。	0	0
ラファエル・ボンベリ	1579	イタリア	L'Algebra （イタリア語：p726）本書で、初めて、複素数の演算規則が提示された。	1 (0)	0
シモン・ステヴィン	1585	オランダ	L' arithmetiqve de Simon Stevin de Brvges （フランス語：p885）現在では使われていない指数記号が現れる。著者は小数をヨーロッパに広めた人物で、その小数記号と同じである。ステヴィンの中での指数は 10進位取りのための 10の冪の延長線にあったのかもしれない。(⇒11)	0	0
ラザルス・シェーナー	1586	ドイツ	Petri Rami arithmetices libri duo, et algebrae totidem （ラテン語：p410）**index《ラテン語初出》**(⇒13)	57	0
フランソワ・ビエト	1595	フランス	Ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus （ラテン語：p34）数学をユークリッド的総合様式から代数解析的様式へと決定的に変えた革新的著書	0	0
ヨハネス・ケプラー	1619	ドイツ	Harmonices mundi libri V （ラテン語）本書で有名なケプラーの第 3 法則が発表された。index 1, indices 1, indice 3	5 (0)	0

アルベール・ジラール	1629	フランス	Invention nouvelle En L'Algebre （フランス語：p68）ステヴィンの指数記号を踏襲している。代数学の基本定理「すべての代数方程式は、その式に現われる最高次の項の次数と同じ個数の解を有する・・・」の、証明抜きではあるが、初出文献として有名である。(⇒12)	0	0
エドモンド・ウィンゲート	1629 (1689)	イギリス	Arithmetick, Containing a Plain and Familiar Method, for Attaining the Knowledge and Practice of Common Arithmetick （英語：p546）1689 年版には exponent が index と並べて冪指数とは異なる意味で使用している箇所 p453 がある。P437 には冪指数の意味の index が現れている。もし 1629 年版の内容が同じであるなら、英語 index の初出文献と云うことになる。	27 (6)	3 (0)
トーマス・ハリオット	1631	イギリス	Artis Analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas （ラテン語：p189）1610 年頃書かれたものらしい。（スミス）デカルトの指数記号の魁、あるいはデカルトが剽窃した、とも言われている。ただ、本文中には aaaa+2bbbbb-5ccc のような式が充満しているが、ここから右上に項の個数を書き添えると云う改良がどの程度のギャップがあるかを評価することは現在の我々には意外に困難であろう。	0	0
ウィリアム・オートレッド	1631	イギリス	Arithmeticae in Numeris et speciebus institutio （ラテン語：p110）1694 年版の英訳では index と exponent が併用されている。彼は多くの数学記号を導入したが、指数の記号は導入していない。 index 2 indices 2	4	0

ウィリアム・ オートレッド	1631 (1637)	イギリス	Clavis Mathematicae denuo limita, sive potius fabricata （ラテン語：p151）本書『数学の鍵』は 17 世紀イギリスで最も影響力のあった算術書と言われている。×が初めて使用された。	22 (0)	0
ボナヴェントゥーラ・カヴァリエーリ	1635 (1653)	イタリア	Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota （ラテン語：p568） 本書で有名な不可分者の理論が展開された。	0	0
ピエール・ エリゴンヌ	1634	フランス	Cursus mathematicus, nova, brevi et clara methodo demonstratus(実践的な数学者の新しい、素早くて明解な表示方法) （ラテン語とフランス語の対訳式） デカルトによる指数記号に肉薄した。(⇒14)	1 (0)	50
ジェイムズ・ ヒューム	1636	フランス	L'algèbre de Viète (ヴィエトの代数) （フランス語）デカルトによる指数記号に肉薄した。(⇒14)	0	0
ルネ・ デカルト	1637	フランス	La Geometrie （フランス語）現代の指数記号は本書から生まれた。(⇒14) ADAM と TANNERY による全集についても調査しておいた。但し、最終巻は ADAM による解説なので調査対象外とした。	0	0
	1897		Oeuvres 1 p710	0	0
	1898		Oeuvres 2 p694	0	0
	1899		Oeuvres 3 p744	0	0
	1901		Oeuvres 4 p728	0	0
	1903		Oeuvres 5 p682	0	0
	1902		Oeuvres 6 p754	0	0
	1904		Oeuvres 7 p646	0	0
	1905		Oeuvres 8 p782	0	0

	1904		Oeuvres 9 p684	0	0
	1908		Oeuvres 10 p712	0	2
	1909		Oeuvres 11 p800	0	0
	1910		VIE & OEUVRES 12 p810	※	※
ピエール・ ド・ フェルマー	1891 1894 1896 1912	フランス	Œuvres de Fermat, publiées sous les auspices du Ministère de l'instruction publique tome1,2,3,4 by Paul Tannery （フランス語：p498,p538,p666,p304）3 巻で、指数としての indice が Wallis の手紙の中に現れており、フェルマーが書いたものではない。4 巻の exposant,exposans もフェルマーが書いたものではなく、ラテン語の exponens だけがフェルマーの手紙で見つけられたが、これも指数の意味ではない。	0 1 (0) 20 (10) 0	0 0 0 9 (0)
ブレーズ・ パスカル		フランス	Grand Larousse De La Langue Française 1986 によると 1658 年の著書で数学用語として exposant が使用されているとあるが、有名なパスカルの三角形が現れる 1655 年の “Traité du triangle arithmétique” に既に使用されている。 以下、主な著作集で調査した結果、冪指数としては exposant を使用しており、index 系は使用されていない。 （フランス語： p444,p334,p501,p557,p451,p523,p443,p441）		
	1864		Oeuvres complètes 1	0	0
	1864		Oeuvres complètes 2	0	1
	1865		Oeuvres complètes 3	3	76
	1819		Oeuvres de Blaise Pascal 4	0	4
	1819		Oeuvres de Blaise Pascal 5	0	61
	1870		Les Pensées de Pascal	0	2
	1886		Les Provinciales 1	5	2
	1891		Les Provinciales 2	2	0

ジョン・ウォーリス	1656	イギリス	Arithmetica Infinitorum （ラテン語：p291）本格的な無限算術を展開し、無限記号∞が導入されたことでも有名な本。本書では指数はすべて index となっている。（⇒16） index,indices,indicum,indicibus,indice,indicem	84 (82)	0
ニコラス・メルカトール	1667	ドイツ	Logarithmo-technia sive Methodus construendi logarithmos nova, accurata, & facilis; ... huic etiam （ラテン語：p38）双曲線の求積（対数）を無限級数（メルカトール級数）で表している。本書から「無限の代数学」が現れたと評する史家もいる。	0	6
ゴットフリード・ライプニッツ		ドイツ	Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C.i. Gerhardt Band I, II index,indices,indicem,exposant	8 (5)	10
			Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C.i. Gerhardt BandIII Index、indicem	4	6
			Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C.i. Gerhardt BandIV **exponenten《ドイツ語初出》**（⇒17） ドイツ語の exponenten が使われている！1694 年 exponenten ,exposant	5 (0)	22
			Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C.i. Gerhardt BandV exposant	0	77
			Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C.i. Gerhardt BandVI Indices、indicem	3	6
			Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C.i. Gerhardt BandVII	10	31

			Index,indices,indice,indicem		
アイザック・ニュートン	1669	イギリス	Analysis Per Quantitatum Series, Fluxiones, Ac Differentias （ラテン語：p101）唯一の exponens の使用例は「表すもの」であって、「冪指数」ではない。	14	1 (0)
アイザック・バロー	1674	イギリス	Lectiones opticae et geometricae （ラテン語：p157）ライプニッツの論文に影響を受けたベルヌイ兄弟が本書を研究することで自ら微積分を開拓した。原亨吉氏は本書を無限小幾何学の白鳥の歌と評した。 1カ所だけ使われていた indices は exponens と併記されて同等の扱いであった。	0	6
エドワード・コッカー	1678 (1702)	イギリス	Cockers Arithmetick, perused by J. Hawkins （英語：p237）著者は商業学派に属する代表的算術家	1 (0)	0
ジョン・ウォーリス	1685	イギリス	Treatise of Algebra （英語：p654）少なくとも、本書で index, exponent の両方が指数として使用されている。但し、exponent が主に使用されている。 **index, exponent《英語初出》**（⇒16）	10 (7)	113
アイザック・ニュートン	1686	イギリス	Philosophiae Naturalis Principia Mathematica （ラテン語：p325）数学、物理学のみならず近代文明の方向性を決定的に与えた歴史的大著。	24 (14)	12 (0)
ギヨーム・ド・ロピタル	1696	フランス	Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes （フランス語）初めての微分学の教科書。本書のアイデアの源泉はベルヌイにある。（⇒18） exposant ,exposans	0	31
サミュエル・ジーク	1696	イギ	A compleat body of arithmetic, in four books （英語：p694）OED2 による index の初出文献（⇒	453	1

		リス	16) Index,indices が非常に沢山あるが殆どは通常の冪指数ではない。唯一つの exponent も同様。		
ジョン・ハリス	1702	イギリス	A New Short Treatise of Algebra （英語：p136）index と exponent がかなり同等に扱われている。 Index,indices,exponent,exponens	30	17
ヤコブ・ベルヌイ	1713	スイス	A rs conjedctandi （ラテン語：p341）ヤコブの死後に出版された。 index,indices,indice,indicem, exponens, exponentis, exponentem, exponentium	15	63
ブルック・テイラー	1715	イギリス	Methodus incrementorum directa （ラテン語：p131） index,indices, indicibus, indice, indicem	17	0
クリスティアン・ヴォルフ	1716	ドイツ	Mathematisches Lexicon （ドイツ語：p1665）「ドイツ語の外国語辞書」による exponenten の初出文献。著者のヴォルフは晩年のライプニッツとも親交があり、ドイツ語に多くの学術用語を導入した哲学者でもある。（⇒17）	0	4
クリスティアン・ヴォルフ	1724 (1713)	ドイツ	Auszug aus den Anfangsgründen aller Mathematischen Wissenschaften （ドイツ語：p725）Index を冪根に使ったり、対数に使用したり興味深い注釈がある。	4	6
ジョン・ウォード	1695 (1723)	イギリス	Compendium of Algebra （英語：p220）オートレッドやウォーリス、ハリーの名前も見える。 index, indices	67	0
アイザック・ニュートン	1729	イギリス	The Mathematical Principles of Natural Philosophy （英語：p327,p83）翻訳 exponent は 1 つを除いてすべて「表すもの」であり、唯一の例外で冪指数の	22 (15)	7 (1)

			意味で使用された exponent も原文は index であった。		
ジョン・キール	1725	イギリス	Introductiones ad veram physicam et veram astronomiam （ラテン語：p636）ニュートンの代理としてライプニッツと論争をした人物として有名である。このような本を書いていたことについては高橋秀裕氏から教えて頂いた。本書はオランダ語にも翻訳され、志筑忠雄は本書を通じて、初めて日本にニュートン力学を紹介した。 index, indices, indicibus, indice, indicem, exponent	64	2 (0)
エドマンド・ストーン	1730	イギリス	The Method of Fluxions both Direct and Inverse （英語：p513）ロピタルの教科書をニュートン流の流率法で書き換えた本。この本についても高橋秀裕氏から教えて頂いた。[44]p547-548 に本書に纏わる佐々木力氏の個人的な興味深いエピソードがある。 indices が 3 カ所使用されているが、内 2 カ所は exponents と併記されており、残り 1 カ所も冪指数の意味で使われていた。一方、exponents 11 カ所、exponent 33 カ所であるから、本書は圧倒的に exponens 系と言って良かろう。「本書は数学的概念や記号法にいたるまで、ほぼ全面的に書き改められていた。」との指摘もあるが、指数については、この当時 exponent が index と同等に用いられていたこともあり、ニュートン自身が index 派であるにもかかわらず、元のロピタルの用語に引きずられたものと推察される。それでも 3 カ所とは言え、ロピタルが一度も使わなかった index 系用語が使われていることは留意しておきたい。	3	44
コリン・マクローリン	1742	イギ	A treatise of fluxions （英語：p415）バークリーの批判を受けて、本書で	6 (4)	46

		リス	は、アルキメデスの厳密性を反映したニュートン流の微分積分が展開されている。 index については index of variation や power of X whose index　と云った使われ方をしている。 index,exponent,exponents		
ヨハン・ベルヌイ	1742	スイス	Opera omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita. Tomus primus （ラテン語：p613）Principia Calculi Exponentialium なる論文がある。ロピタルとオイラーの先生でもある。	4	18
トーマス・シンプソン	1745	イギリス	A Treatise of Algebra （英語：p407）index と exponent がかなり同等に扱われている。 index,indices,exponent,exponents	19	24
レオンハルト・オイラー	1748	スイス	Introductio in analysin infinitorum （ラテン語：p365）18 世紀最高の数学書との呼び声も高いオイラーの代表的著書。 indices, exponens, exponentis, exponentem	8 (0)	40
ガブリエル・クラメール	1750	スイス	Introduction à l'analyse des lignes courbes algébrique （フランス語：p680）本書の付録 1 には有名なクラメールの公式が収録されている。 exposant	7 (0)	127
レオンハルト・オイラー	1771	スイス	Vollständige Anleitung zur Algebra （ドイツ語：p389）Introductio in analysin infinitorum のドイツ語版 exponens , exponent, exponenten	0	46
エティエンヌ・ベズー	1779	フランス	Théorie générale des équations algébriques （フランス語：p471）本書で、ベズーは有名なベズーの定理の証明を与えた。但し、現代から見れば、それは正しくはなかった。 indices, indice, exposant, exposans	2	84

ウイリアム・エマーソン	1780 (1765)	イギリス	A Treatise of Algebra （英語：p531）exponent は最初に index と共に同義として定義されるが、その後は一度も使われず、すべて index で統一されている。 index, indices, exponent	134	1
ヨハン・フリードリッヒ・パフ	1788	ドイツ	Versuch einer neuen summationsmethode nebst andern damit zusammenhängenden analytischen bemerkungen （ドイツ語：p120）index が exponenten と同じであると、本文中 p25 で述べている。 著者はガウスの先生でもある。 index, indices, exponent, exponenten	11	34
ダランベール、ランデ、コンドルセ他	1789	フランス	Encyclopédie méthodique （フランス語：p240） Index, indice, exposant, exposans	3 (0)	15
シルベスター・フランソワ・ラクロア	1797	フランス	Traité du calcul différentiel et du calcul integral Tome 1 （フランス語：p537）後に示すコーシーの著書と共にボイヤーが提唱した「解析革命」（フランス革命を契機に起こったユークリッド的総合幾何から非直感的数学へのパラダイムシフト）を象徴する教科書 indice, exposant, exposans	4 (2)	80
	1798	フランス	Traité du calcul différentiel et du calcul integral Tome 2 （フランス語：p745） indice,exposant,exposans	4 (3)	53
エイドリアン・ルジャンドル	1798	フランス	Essai sur la théorie des nombres （フランス語：p533） ルジャンドルは、高木貞治がガウスの天才の引き立て役として引用したことから、日本では二流の数学	3 (2)	42

			者のような扱いを受けることが多かったが、最近になって彼の業績は見直されてきている。ちなみに、「数論」と云う言葉もガウスの Disquisitiones Arithmeticae ではなく、本書に由来する。 indices, indice, exposant, exposans		
ピエール・シモン・ラプラス	1799	フランス	Traité de mécanique celeste　Tome 1 Traité de mécanique celeste　Tome 2 （フランス語：p412, p398）ガリレオ・ニュートンからの古典的な「力学的世界観」の到達点を示す記念碑的著作。意外なことに「ラプラスの悪魔」は本書ではなく「確率の哲学的試論」の方に現れている。	0 0	0 1
カール・フリードリッヒ・ガウス	1801	ドイツ	Disquisitiones Arithmeticae　[23] （ラテン語：p668）余りにも有名なガウスの主著。ガウスは exponens と index の使用に明確な使い分けを行っており、exponens は冪指数、index は数論的な指数、例えば「$a^e \equiv b \mod(p)$ならば、e を b の指数」、に対して使用している。 (⇒19)	105	122
ジョセフ・ルイ・ド・ラグランジュ	1806	フランス	Leçons sur le calcul des fonctions （フランス語：p505） indice, exposant, exposans	1 (0)	26
ピエール・シモン・ラプラス	1814	フランス	Théorie analytique des probabilités （フランス語：p612）古典的確率論が本書で一応完成した。 確実に exposant と併記している場合もあるが、index 系の単語は主に添字として使われているようだ。但し、添字に指数と関連性を持たせている場合も多い。 indices, indice, exposant, exposans	51 (3)	55
オーギュスタン・ルイ・	1821	フラ	Cours d 'analyse de l'École royale polytechnique [1]	20 (0)	30

コーシー		ンス	（フランス語：p579）本書から 19 世紀の厳密化（ε δ 論法を含む）が始まった。 indice,indices は添字と冪根の次数に使用されている。（⇒19） exposant, exposans		
ジョゼフ・フーリエ	1822	フランス	Théorie analytique de la chaleur （フランス語：p639） indices, indice は添字や、微分の階数などに使用されている。 indices, indice, exposant, exposans	29 (0)	30
アンドレアス・フォン・エティングスハウゼン	1827	ドイツ	Über die analysis （ドイツ語：p447）この著者は 1827 年に組合せ記号を導入した人物でもある。 exponent, exponenten	0	66
カール・グスタフ・ヤコビ	1829	ドイツ	Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum （ラテン語：p207）楕円関数の記念碑的作品だが、それよりもこの時期に未だラテン語であることに注目したい。さすがに、「フランス語や英語に比べてドイツ語が学術用語として未成熟。」と云う時代でもないであろう。ガウスへの秘かな対抗心の表れではなかろうか？	0	0
ジョージ・ピーコック	1830	イギリス	Treatise of Algebra （英語：p685） exponent は index と併記されて 1 カ所だけあり、exponents も 1 カ所あった。	168	2
オーガスタス・ド・モルガン	1837	イギリス	Elements of Algebra （英語：p255） index と indices は冪根の次数に使用されている。李善蘭が 1859 年に『代数學』として翻訳。初出ではないが本書で数学用語「代数学」は普及した（⇒26）	6 (4)	43
シメオン・ドニ・ポアソン	1837	フラン	Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile （フランス語：p415） indice と indices は添字の意	11 (0)	4 (2)

		ス	味で使われ、exposant は冪指数で使われていたが、exposants は表現の意味で使用。		
サミュエル・アルソウプ	1847	イギリス	An elementary treatise on algebra （英語：p288）exponent は index と同義であることは述べているがほとんどは index を使っている。	46	9
エリアス・ルーミス	1851	アメリカ	Elements of analytical Geometry and Differential and Integral Calculus （英語：p310）オイラーの"Introductio in analysin infinitorum"を手本にしているとされている。李善蘭が 1859 年に『代微積拾級』として翻訳。数学用語「指数」誕生の書。(⇒25)	0	57
ベルンハルト・リーマン		ドイツ	gesammelte mathematische Werke （ドイツ語：p911）index は冪指数の意味では使われていない。	28	49
アイザック・トドハンター	1863	イギリス	Algebra for beginners （英語：p328）著者は数学者というよりも数学教育者であるが、イギリスのみならず日本（彼は留学先での菊池大麓の先生でもあった）にも大きな影響を与えた。	34	16
ディリクレ、デデキント	1863	ドイツ	Vorlesungen über zahlentheorie （ドイツ語：p414）ディリクレが生涯をかけて『ガウスの整数論』読み込み、改良した講義内容をデデキントが編纂したもので、現代整数論の源流とも目される著書。従って、exponens 系と index 系の使い分けも基本的にはガウス流を踏襲している。本書の翻訳では exponens 系には指数、index 系には標数と云う訳語が与えられていた。 index,indices, exponent, exponenten	38	74
ウィリアム・スミス	1864	アメリ	Elementary Algebra （英語：p312）index は冪根の次数に使用されている。	5	81

		カ			
ウィリアム・クリフォード	1882	イギリス	Mathmatical papers （英語：p658） 3 年後の著書と見比べて、index と exponent の使用に統一性が見受けられない。	19 (0)	19
ウィリアム・クリフォード	1885	イギリス	The common sense of the exact sciences （英語：p315）菊池大麓が『数理釈義』として 1888 年に翻訳　(⇒21)	6 (3)	0
リヒャルト・デデキント	1868	ドイツ	Was sind und was sollen die Zahlen? （ドイツ語：58p）有名な「数とは何か　そして何であるべきか？」である。Exponent が p49 に一箇所だけ使われていた。	0	1
アンリ・ポアンカレ	1892 1893 1899	フランス	Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste Tome 1 Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste Tome 2 Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste Tome 3 (フランス語：p408,p504,p429)3 巻では、指数ではなく、添字として使用されている。	0 0 12 (0)	0 0 0

あとがき(反省)と謝辞

やっと、脱稿できたことへの安堵感と共に時間不足・力量不足からいくつもの不満を残してしまったことも否めない。以下、本論に興味を持っていただいた読者に向けて、反省を込めたメッセージを記しておきたい。

先ず、本論は出来るだけ原典に遡及して考察すると言っておきながら、Anuyogadwara-sutra の原文を引用せず、英語の二次文献の翻訳でお茶を濁さざるを得なかったのは残念であった。同様のことはアラビア語文献についても言える。

これとは逆の話であるが、原典にこだわり過ぎたために必要以上に本論は長くなりすぎた。

初出文献の調査では、英語については、OED2 を塗り替えはしたが、詰めがかなり甘い。少なくとも index はラムスの著書の英訳くらいから現れている可能性が高いし、exponent も 1660 年代には出現しているのではないかと思われることは本文中での述べたとおりである。

付録の「使用頻度比較表」はホイヘンス、ケリー、シルベスターの著書・論文集のような本来確認すべき文献が未だかなり抜けている。しかも翻訳と逐一付き合わせて確認した“Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”と“Disquisitiones Arithmeticae”を除けば、他の文献は機械検索に頼りすぎていて、明らかに拾い洩れがあり、精度に不安が残った。

ウォーリスが Index から Exponent に用語を替えたのに、ニュートンは替えなかった理由をニュートンの保守的な性格だけで説明付けしようとしたのは強引であった。もっと他の理由も検討されるべきであろう。

ステヴィンの指数概念が小数概念と密接に関連していることやニュートンの分数冪記号の導入が二項定理に必要であったことなど、内的理論史的立場からの分析も一応行ってはいるものの、総じて本論は外的要因史的アプローチが強すぎた。ガウスの指数の使い分けなどをもっと掘り下げて内的必然性からより詳しく分析した方が、いわゆる「数学好き」の読者には喜んでもらえたかもしれない。

法華経におけるアルキメデスの影響については、「生煮え」であることを「はしがき」で断ってはおいたが、現状では「中学生の夏休みの自由研究」と大差がない。新資料が用意出来ないのであれば、せめて大蔵経での「算師」の使われ方の一覧表くらいは用意した上で、法華経での引用例の特殊性が考察出来ていればもう少し説得力が出せたであろう。

インドとアラビアに於ける指数の取り扱いは少しだけ触れることが出来たが、和算に於ける指数、李善蘭以前の中国数学や朝鮮数学に於ける指

数の取り扱いについて触れないのは片手落ちであった。また、マヤやアステカ、インカについてはきちんと調査さえしなかったのは遺憾であった。

「拙試訳」の中には、十分こなれた日本語になっておらず、参考にならないものもある。

このように本論は不満な点を数多く残した未熟な論文であるが、完全を期していては永遠に発表出来そうにない。ここで、一つの区切りとしたい。

最後になりましたが、講演時にいろいろな質問・示唆を下さった諸先生方や、忙しいなか読みにくい大部な原稿に目を通していただいて幾つもの有益なコメントをくださった赤荻進一氏、このような論文を発表する場を与えて頂いた津田塾大学数学・計算機科学研究所の三宅克也氏と長岡一昭氏に深く感謝致します。