ライプニッツの接線法をめぐって

高瀬正仁（九州大学）

第24回数学史シンポジウム
於：津田塾大学　数学・計算機科学研究所
平成25年（2013年）10月13日(日)

はじめに

今日の解析学の根幹に位置するのは関数の概念である．関数は微分と積分の対象であり，極限の概念を根底に据えて「関数の微分法」と「関数の積分法」が展開され，そのうえで「微分積分学の基本定理」により微分計算と積分計算の相互関連が明示されるというのが，今日の微積分の枠組みである．だが，デカルトの『幾何学』を出発点として，フェルマ，ライプニッツ，ベルヌーイ兄弟（兄のヤコブと弟のヨハン）と微積分の形成史をたどっていくと，関数概念はなかなか登場しない．後に「関数」という概念の表現として用いられるようになった *functio* という言葉はライプニッツにも見られるが，ライプニッツのいう *functio* は曲線に関連する種々の量の呼称であり，今日の関数概念とは関係がない．ヨハン・ベルヌーイは，定量と変化量を組み合わせて作られる式を関数と呼ぼうとしたが，これは呼称の提案にすぎず，今日の関数とオイラーはやはり無縁である．現在の数学おける関数を新たな数学的概念として明確に打ち出したのはオイラーであり，オイラーは眼前の数学的状況の諸相に応じて，都合三種類の関数概念を提示した．1745念から1748年にかけて生起したと想定される出来事である．1745年はオイラーの著作『無限解析序説』が執筆された年であり，1748年は『微分計算教程』が執筆されるとともに（刊行は1755年），ベルリンの科学アカデミーでオイラーの講演「弦の振動について」が行われた年である．

今日の微分積分は無限解析という名のもとに創造されたが（註：本稿ではニュートンの流率法は語らない），関数概念のはじまりのころおの諸事情を探索すると，草創期の無限解析の対象は関数ではなかったことがはっきりと認識される．無限解析の対象は関数ではなく曲線であり，無限解析の創造に携わった数学者たちの念頭にあったのは，曲線の諸性質を知りたいという熱情であった．

初期の無限解析の本性は「(関数ではなく）曲線の理論」である．本稿ではデカルトの『幾何学』とライプニッツの二論文

> 「分数量にも無理量にも適用される，極大と極小および接線に対する新しい方法．ならびにそれらのための特殊な計算法」(学術論叢1684年10月．以下,「ライプニッツ1684」と略取する．)

「深い場所に秘められた幾何学および不可分量と無限の解析について」(学術論叢 1686 年 7 月. 以下,「ライプニッツ 1686」と略称する.)

の叙述に沿って，曲線に寄せる関心の諸相を観察したいと思う.

1. ライプニッツの二論文に寄せる基本的な疑問

「ライプニッツ 1684」と「ライプニッツ 1686」において，それぞれ微分計算と積分計算の根幹を作る基本思想が提示された. 前者の「ライプニッツ 1684」で表明されたのは「万能の接線法」であり，デカルトの『幾何学』以来の「曲線に接線を引く問題」はこれで解決されたのである. ライプニッツの接線法の基礎は微分計算だが，そのためには何よりも先に「微分」の概念が提示されなければならない. ライプニッツはこれを実行しているが，ライプニッツのいう「微分」は無限小量ではなく,「任意の長さをもつ有限線分」として語られている. このあたりはいかにも謎めいていて，理解しようとする心の前にいつも立ちはだかるのである.　後者の「ライプニッツ 1686」では逆接線法が語られている. この計算法を基礎にすれば完全に一般的な求積法が手に入るが，ライプニッツの積分計算は微分計算の逆演算である. だが，観念的に考えると「接線を引くこと」と「面積を求めること」は関係がない. それにもかかわらず，両者の間に逆関係が認められるのはなぜなのであろうか. これもまたライプニッツの無限解析の謎のひとつである. ライプニッツの二論文を見たベルヌーイ兄弟は，これは「エニグマ」であると感じたというエピソードが伝えられているが，この感性にはだれしも心から共鳴するのではあるましか.

ライプニッツの無限解析はいかにも謎めいていたが，同時に見る者の心を惹きつけてやまない魅力が湛えられていたようで，ベルヌーイ兄弟関心をかきたてて理論形成への道をたどることになった. ライプニッツの二論文で表明された無限解析の設計図に沿ってベルヌーイ兄弟が構造物の建設作業にあたったが，その際，ライプニッツ自身もまた建設に参加した. この成果はヨハン・ベルヌーイがマルキ・ド・ロピタルのために行なった講義の記録の形で具体的に現れたが，微分計算についてはマルキ・ド・ロピタルの著作『曲線の理解のための無限小解析』(1696 年) を通じて広く知られることになった. この書物のタイトルに「曲線の理界のための」という形容句が見られるが，初期の無限解析の本質はこの一語に集約されている.

「ライプニッツ 1684」から接線を語る言葉を拾うと，

> 接線を見出すということは本来，曲線上の無限に小さい距離を持つ 2 点を結ぶ直線を引くこと，つまり私たちにとっては曲線と同値である無限個の角を持つ多角形の一辺を引くことである.

という言葉が目に留まる. 曲線とは「無限個の角を持つ多角形」であるとライプニッツは言うが，その際，その多角形の一辺の長さはもとより無限小である (ライプニッツは無限小の長さとは何かを語らないが，オイラーなら，それは「００」にほかならないと

簡明に応じるであろう）．曲線とは「無限小の長さの辺をもつ無限多角形」である．この認識はヨハン・ベルヌーイもロピタルも共有した．次に引くのはロピタルの言葉である．

> 曲線というものは，各々が無限に小さい線分の無限に多くの集まり，あるいは(同じことになるが)，各々が無限に小さい辺を無限に多くもつ多角形と見てよいと要請する．(ロピタル『曲線の理解のための無限小解析』，第1章，第3条，「要請もしくは仮定」)

今日の目にはいかにも不思議な認識だが，曲線を見る目が定まっているのは間違いなく，ライプニッツの接線法はまさしくこの認識の中から生れたのである．では，この認識はどこから生れたのであろうか．無限解析の創造ということを考えるとき，この問いもまた基本的である．微積分の起源は謎に満ちている．

2. 「ライプニッツ 1684」に見る微分法

「ライプニッツ 1684」を読み進めていくと一行ごとに困難に遭遇し，容易に読み終えることができない．真っ先に出会うのは dx という記号で表記される「微分」の概念で，ライプニッツはこれを「任意の線分」として導入するのである．無限小の線分ではないため，「微分」という訳語をあてるのに抵抗感が生れるというので，『ライプニッツ著作集(2)　数学論・数学』（工作舎）ではあえて「差分」と訳出されているほどである．それでも無限小の線分が忌避されているわけではなく，「無限小の微分」もまたごく自然に語られるのである．

この間の消息は謎めいているが，ライプニッツは別段，無限小観念をベールに包もうとしたわけではなく，「有限の微分」から説き起こしたのはいわば「微分計算の公理系」を書き下すためだったのではないかと思う．その公理系は，

$$\begin{cases} d(x+y) = dx + dy & \text{（和の微分）} \\ d(xy) = ydx + xdy & \text{（積の微分）} \end{cases}$$

という二つの等式で表示される．ライプニッツは曲線に接線が引かれた状況を想定し，その状勢観察の中から，この二つの等式を導いたのである．

この二つの等式は思考実験を通じて「発見された」のであるから証明の対象ではなく，さながら公理のように見てそのまま受け入れて，ここから先は単純な計算規則に沿って微分計算がなめらかに進行する．ライプニッツの苦心のすべては「発見」の一事に凝縮されている．

微分概念のほかにも，「ライプニッツ 1684」には困惑させられる事柄が多い．「変化するもの」の姿が見あたらないないこともそのひとつであり，この点は後年のオイラーとの大きな相違である．「ライプニッツ 1684」では，微分計算を応用してフェルマの原理からスネルの法則を導く過程が示されているが，それは「曲線の理論」すなわち曲線の形状を知るための理論の適用例である．曲線を動点の軌跡と見ることはもとより可能だが，

ライプニッツにおける曲線のイメージはどこまでも静的である．
次に挙げるのも「ライプニッツ 1684」からの引用である．

> われわれの方法は，このようなすべての場合ばかりか，それより遥かに複雑な場合にも，世の想像を遥かに越え，ほとんど無類の簡潔さを持っている．
>
> しかも，これらのことは，それらより遥かに崇高な或る幾何学の出発点にすぎず，この幾何学は各混合数学（註．応用数学のこと）の最も困難で最も美しいすべての問題にも及ぶもので，私達の微分算ないしそれに類するものなしには，誰も上述のような容易さをもってこの種の問題を無謀に扱うことはできないであろう．

ここに言われている「遥かに崇高な或る幾何学」というのは積分法のことだが，積分法というよりも「逆接線法」という呼称のほうが相応しいであろう.「ライプニッツ 1686」のテーマであり，本稿では立ち入らないが,「ライプニッツ 1684」の時点ですでに逆接線法のひとつの事例が報告されている．それは「軸に向って接線 WC を引くとき，XC はつねに定量 a の線分に等しいという性質をもつ曲線 WW を見い出すこと」という問題で，答は対数曲線である．

3. デカルトの『幾何学』より

1. デカルト『幾何学』より

デカルトの『幾何学』は『方法序説』，すなわち『自分の理性を正しく導き，いろいろな学問において真理を求めるための方法について述べる話．加えてその方法の試みである〈屈折光学〉〈気象学〉ならびに〈幾何学〉』(1637 年）において試みられた三つの試論のひとつである.『幾何学』を構成する全 3 巻のタイトルは次の通り．

第一巻　円と直線だけを用いて作図しうる問題について
第二巻　曲線の性質について
第三巻　立体的またはそれ以上の問題について

接線法はデカルトにとっても切実な問題で,『幾何学』の中心に位置を占めている．第二巻の小見出しのひとつは

> 曲線のすべての性質を見いだすためには，そのすべての点が直線の点にたいしてもつ関係を知り，また，その曲線上のすべての点でこれを直角に切る他の線をひく方法を知れば十分であるということ

というものであり，本文を見ていくと，

> 曲線上に任意に選んだ点で [これに] 直角にあたる直線をひく方法を一般的に示したならば，曲線に関する基礎知識として要求されるすべてのことを述べ

たことになるであろう．

> これこそ，あえて言うが，単に私が幾何学に関して知っているというだけでなく，かつて知りたいと思った最も有益で最も一般的な問題なのである．

という鮮明な言葉に直面する．曲線の諸性質は「接線を直角に切る線」，すなわち法線を引く方法を知れば判明するというのである．続いて，

> 与えられた曲線，またはその接線を直角に切る直線を見いだす一般的方法

という小見出しが現れて，接線法が具体的に述べられていく．接線を引くには曲線と接線を諒解する様式が自覚され，明示されなければならないが，本文を読むとデカルトにはデカルトの認識があったことがよく伝わってくる．デカルトが考察の対象として設定したのは代数曲線であり，代数曲線というのは代数方程式 $f(x,y)=0$ そのものを指す言葉である．代数曲線 $\Gamma : f(x,y)=0$ 上の点 P における接線というのは同じ点における法線と直交する直線のことであり，法線上の点 Q を中心として半径が PQ に等しい円を描くと，それは P の近くにおいて曲線 Γ と P 以外のいかなる点とも交叉しない．ユークリッドの『原論』を見ると円の接線がそのように諒解されているが，デカルトは接線と法線をその様式を継承したのである．ただし，デカルトの接線法の適用域は代数曲線の世界に限定され，サイクロイドのような超越曲線には無効である．方法の限界というよりも，デカルトは超越曲線に関心がなかったのである．

思索の対象を代数曲線の世界に限定したところに着目すると，デカルトの『幾何学』は「代数的な幾何学」の泉のように見える．万能の接線法の探究という視点に立つとデカルトの接線法ではなお不十分で，超越曲線にも適用可能な接線法の探索が続くであろう．これに応えたのが「ライプニッツ 1684」である．

デカルトの接線法よりも強力な方法ということであれば，曲線と接線の諒解様式そのものを改めていかなければならないが，ライプニッツは「ライプニッツ 1684」においてこれを遂行した．その様子はすでに見た通りである．

接線法の観点から見るとデカルトの『幾何学』はなお不十分だが，フェルマ，ライプニッツ，ベルヌーイ兄弟へと続く道の端緒であり，微積分の泉のようである．

4. クザーヌスと接線法

接線法を語るのであれば，デカルトの『方法序説』とほとんど同時期に書かれたフェルマの論文「極大と極小の研究のための方法」の検討も不可欠だが，ここではひとまず措き，曲線を「無限小の長さの辺をもつ無限多角形」と見るライプニッツの見方の根源を考えてみたいと思う．もっとも目を引くのはクザーヌスの言葉の数々である．

クザーヌスについて語るのも相当の準備を要するが，『学識ある無知について』からいくつかの言葉を拾ってみたいと思う．

〈敬虔この上ないアンセルムスは，最大の真理を無限の「直」になぞらえている.〉
〈他の優れた人たちも，祝福された聖三位一体を三つの等しい直角を持つ三角形に比している.〉

第 14 章の表題　無限な線は三角形であること
第 15 章の表題　この三角形は円であり，球であること
第 16 章の表題　最大な線とその他の線との関係は，最大者と万物との関係にどのように転釈されるか 第 17 章の表題　前章の原理より導かれるきわめて深遠な教説
第 18 章の表題　われわれは，どのようにしてかの原理に導かれ，存在性の分有を認識するに至るか
〈大小を許容する曲がったもの（曲線）は，最大であることも，最小であることもできない.〉
〈曲がったものは真っ直ぐなものより派生したものであるから，それ自身としては何か或るものではない.〉　〈したがって，最大限にか最小限に湾曲しているものは真っ直ぐなものにほかならないわけだから，湾曲したものに内在する「有」（esse）は「直」の分有によって与えられる.〉
〈大きな円の周のように，湾曲の度が少ないほど，それだけ多く「直」を分有しているのである.〉
〈無限の直は部分に分かちえないために，湾曲したものは無限の直の部分を持っていないが，有限な直線は大きければ大きいほど，それだけ多く最大で無限な線の無限性を分有しているように見える.〉
〈曲線は「直」をなかだちにして無限の線を分有するのであるから，単純・直接にではなく，媒介的・間接的に分有するのである.〉

クザーヌスは神秘思想の脈絡において語られる 15 世紀ドイツの宗教者である．無限直線は三角形であり，その三角形は円であり，球でもあるとクザーヌスは言う.「最大限にか最小限に湾曲しているものは真っ直ぐなものにほかならない」という言葉も見える．曲がっているものは真っ直ぐであり,「「直」をなかだちにして無限の線を分有する」とも言われているが，曲線を見るライプニッツの視線には，このようなクザーヌスの思想が反映しているのではあるまいか．いずれ精密な考証を試みたいと思う.

5. 接線を引きたいと思う心

無限解析は「接線を引きたい」という，デカルトやフェルマ，ライプニッツ，ベルヌーイ兄弟たちの強い熱情から生れたが，接線を引きたいと望んだのは「曲線を知りたい」と欲したためであった．曲線を知るための鍵となるのは「接線を引く」という一事であるとデカルトは明言したが，それならデカルトたちが知りたいと望んだ曲線の諸性質は

「接線を引くこと」から派生するのである．では，どうして「曲線を知りたい」と思い，「接線を引きたい」と思ったのであろうか．曲線の理論の鍵はこの問いにひそんでいるが，ここから先は論理的もしくは実証的な思索はもう及ばない．無限解析の本性を真に認識するためには，何かしら別の視点を設定し，デカルトと同じ光景が見える場を見いだす努力を重ねなければならないであろう．

【参考文献】

● デカルトの『幾何学』については，原亨吉（訳）『幾何学』（白水社の増補版『デカルト著作集』巻1，平成13年，所収）を参照した．巻1は『方法序説』．三つの試論のうち,「幾何学」のみ抽出して，ちくま学芸文庫M&S『幾何学』（平成25年）として刊行された．

● ライプニッツの二論文「ライプニッツ 1684」「ライプニッツ 1686」については,『ライプニッツ著作集 (2) 数学論・数学』（工作舎，平成9年）所収の訳文を参照した．

● クザーヌス『学識ある無知について』（訳：山田桂三，平凡社ライブラリー，平成6年）を参照した．