Minkowski　数の幾何学

今野秀二

ミンコウスキー (Hermann Minkowski) は 1864 年ロシアに生まれたが，1872 年 8 歳のとき両親とともにドイツのケーニスベルグに移り住み、そこのギムナジュウムに入学します．そして 1880 年，わずか 16 歳でケーニスベルグ大学に入学しています．この大学でミンコウスキーはヒルベルトに出会い 1884 年にはこの大学のスタッフとしてやってきたフルヴィッツに出会います．ヒルベルトはミンコウスキーより 2 歳上だが学年は半年下でフルヴィッツはヒルベルトより 3 歳上です．ヒルベルト，フルヴィッツ，ミンコウスキーの出会いはこんなふうにして始まり，その固い友情は生涯続くことになります．

1881 年パリ科学アカデミーは「自然数を 5 つの平方和に分解せよ」という懸賞問題を出します．ところが，これについては 1867 年にヘンリー　スミスが既に解いていて，それとは知らずに懸賞問題にしてしまったのです．当時 18 歳であったミンコウスキーもそれとは知らず，これを一般の 2 次形式理論の問題として解答しパリアカデミーに提出します．結局 1883 年ミンコウスキーはスミスと受賞の栄誉を分かち合うことになるのだが，この研究は後の彼の学位論文の基にもなっています．

ミンコウスキーはケーニスベルグ大学で 5 学期を，ベルリン大学で 3 学期をそれぞれ学びますが，ベルリン大学では クンマー, クロネッカー，ワイヤストラス, ヘルムホルツ, キルヒホッフ の講義を聞いています．その後彼はケーニスベルグ大学で学位を取り 1887 年にボン大学の講師に就き，1889 年にはケーニスベルグ大学に移り，続いて 1891 年にはチューリッヒ工科大学に移っています．チューリッヒではフルヴィッツと再び一緒になり，またアインシュタインが彼の講義に出席していたと伝えられています．後 1905 年にアインシュタインが特殊相対性理論を発表すると，1907 年にミンコウスキーはローレンツおよびアインシュタインの理論について，彼自身の立場から，その数学的定式化の論文を書いている（Minkowski 全集 II p.353 参照）．こんなこともあってかミンコウスキーはアインシュタインの理論を一番最初に認めた人と言われている．ミンコウスキーは 1902 年ヒルベルトとともにクラインによりゲッチンゲン大学に招かれたが 1909 年わずか 44 歳で世を去っている．1903 年ころからミンコウスキー，フルヴィッツ，ヒルベルトは毎週水曜日の午後 3 時丁度にゲッチンゲンのある場所で落ち合い，散歩をしながら数学の研究成果について

話をしてきたが，ミンコウスキーは死の一週間前にも物理の研究を活き活きと語っていたと，これはヒルベルトの証言である．ミンコウスキーは彼の研究スタイルについてヂリクレが手本であったとも語っている．

ミンコウスキーの業績を全集で見ると，２次形式，数の幾何学，幾何学および物理学といったテーマで分類されていて，数の幾何学に関するページ数が圧倒的に多い．ヒルベルト はミンコウスキーの（すばらしい）業績紹介のなかで，数の幾何学が彼の最も創造的な領域であったと述べているが，それらは彼の２次形式の研究とエルミートの研究が出発点になっている．格子，凸体といった幾何的な対象についての研究から，その成果を応用してヂオファンタス近似，連分数の研究へと発展して行くのだが，後者は今回は取り上げていないことをお断りしておく．この報告では数の幾何に関する最初の論文 [M1] と最後の論文 [M2] および著書「数の幾何学」[M3] の一部を紹介する．[M1], [M2] では２次形式の整数論と数の幾何との深い結びつきがテーマであるが， [M3] ではそれらを公理的にとらえて，一般化しいろいろな問題にアプローチしている．最後に，この紹介は彼の全集に基づくものだが，ヒルベルトによるすばらしい序文は大きな助けとなった．

文献　[M1] Uber die positiven quadratischen Formen und uber kettenbruchahnliche Algorithmen. (1891). [M2] Diskontinuitatsbereich fur arithmetische Aquivarenz. (1905). [M3] Geometrie der Zahlen. (1896).

[M1]-1　実数を係数にもつ正定値２次形式を

$$f(x)=\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j={}^txAx,\quad A=(a_{ij}),\ a_{ij}=a_{ji},\quad x={}^t(x_1,\cdots,x_n)\quad (1)$$

と書く．A は対称行列ゆえ，ある $B\in GL_n(\mathbf{R})$ に対し $A={}^tBB$ と書ける．そこで $\xi={}^t(\xi_1,\cdots,\xi_n)=B\cdot x$ とおくと

$$f(x)=\sum_i \xi_i^2$$

である．

$\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルを $\{e_j\}$ としよう（ $e_j\in\mathbf{R}^n$ は第 j 行のみ 1 で他は 0 の列ベクトル）．変換 $\varphi: x\to\xi=B\cdot x$ による e_j の像を $p_j=\varphi(e_j)$ とする．これは B の第 j 列ベクトルで，$\xi={}^t(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\sum_j^n p_jx_j$ $(x={}^t(x_1,\cdots,x_n))$ となっている．

以下 $\mathbf{R}^n=\{x={}^t(x_1,\cdots,x_n)\mid x_j\in\mathbf{R}\}$, $\mathfrak{R}^n=\{\xi={}^t(\xi_1,\cdots,\xi_n)\mid \xi_j\in\mathbf{R}\}$ と書き，$\varphi:\mathbf{R}\to\mathfrak{R}$ と考える．こうすると格子 $L=\mathbf{Z}^n=\sum_i e_i\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}^n$ は $\mathfrak{R}^n$ の格子 $\Lambda=\sum_i p_i\mathbf{Z}$ に移る．

これについて以下のことが言える．

(a)　$\xi = \varphi(x)$ のとき $\sqrt{f(x)}$ は $\mathfrak{R}^n$ で原点から点 ξ までのユークリッド距離になる．

(b)　$\mathbf{R}^n$ の単位立方体は φ で $\mathfrak{R}^n$ の $\{p_i\}$ で張られる n 次元平行体に移り，その体積は $(\det A)^{1/2}$ となる．これはまた $\mathfrak{R}^n/\Lambda$ の（基本領域の）体積になっている．

(c)　$\mathfrak{R}^n$ で点 p_i から $\{p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{i+1}, \cdots, p_n\}$ で張られる超平面に下ろした垂線の長さは $h_i = \sqrt{(\det A)/(\det A_{ii})}$ となる．ここで A_{ii} は A から i 行 i 列を取り去った行列である．

[**M1**]-2　(1) の f に対して

$$M = M(f) = \min_{0 \neq x \in L} f(x) \tag{2}$$

と定義する．このとき $\sqrt{M}$ は $\Lambda \subset \mathfrak{R}^n$ の２格子点間の最短距離（ユークリッド的）になっている．

$\mathfrak{R}^n$ の中で，一辺の長さが $\sqrt{M}/\sqrt{n}$ の n 次元立方体を考えると，その中心から頂点までの距離は $\sqrt{M}/2$ である．

そこで各 $l \in \Lambda$ に，点 l に中心をもち，すべて同じ向きになるよう上記の n 次元立方体を配置する．

このとき M の定義から各立方体は高々境界点でしか交わらず，どの立方体にも含まれない点があるから，その体積は $(\det A)^{1/2}$ より小さい．これから次の不等式が得られる．

$$\frac{M}{n} < \cdot \sqrt[n]{\det A} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{M}{\sqrt[n]{\det A}} < n. \tag{3}$$

次に各 $l \in \Lambda$ に点 l を中心とする半径 $\sqrt{M}/2$ の n 次元球体を並べると，やはり同じことが言えるので，立方体の体積はこの球体の体積で置き換えることができる．n 次元単位球体の体積は $\Gamma(1/2)^n/\Gamma(1+n/2)$ であったから

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\left(\frac{1}{2}\sqrt{M}\right)^n < \sqrt{\det A} \tag{4}$$

を得る．これはスターリングの公式を使うと

$$\frac{M}{\sqrt[n]{\det A}} < \frac{2n}{\pi e}\sqrt[n]{n\pi e^{1/3n}} \tag{5}$$

となり，これは (3) の精密化になっている．

2次形式 $f(x)=\sum_{ij}a_{ij}x_ix_j$, $g(x)=\sum_{ij}b_{ij}x_ix_j\in P$ がある j について

$$a_{11}=b_{11},\cdots,a_{j-1j-1}=b_{j-1j-1},\ a_{jj}>b_{jj}\ (j\le n)$$

であるとき f は g より**高い**（g は f より**低い**）と言い，$j=1,\cdots,n$ に関する辞書式順序で P に順序を入れておく．

$f,g\in P$ がある $S\in GL_n(\mathbf{Z})$ について $g(x)=f(S\cdot x)$ であるとき f と g は**同値**と定義する．この同値関係で P は同値類に分けられるが，各同値類の代表として類のなかで一番低いものを選ぶという考えである．

まず $S=(s_{ij})\in GL_n(\mathbf{Z})$ について $g(x)=\sum b_{ij}x_ix_j=f(S\cdot x)$ とすれば

$$b_{hh}=f(s_{1h},s_{2h},\cdots,s_{nh})\qquad(h=1,\cdots,n)$$

である．

以上の準備のもとで，2次形式 $f=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j$ が下の条件 (I), (II) を満たすとき reduced と言う．ただし $f(x)\ge 0$ で正定値とは限らない．

(I)　$l\in\{1,\cdots,n\}$ に対し $s^{(l)}=(s_1^{(l)},\cdots,s_n^{(l)})\in\mathbf{Z}^n$ は $\{s_l^{(l)},s_{l+1}^{(l)},\cdots,s_n^{(l)}\}$ の公約数が1であるベクトルを動く．このとき a_{ll} は

$$f(s^{(l)})\ge a_{ll}\qquad\text{for all}\quad s^{(l)},\quad l=1,2,\cdots,n$$

である．

これは f の同値類から一番低いものを取ることを意味している．

(II) $a_{12}\ge 0,\ a_{23}\ge 0,\cdots,\ a_{n-1n}\ge 0$.

reduced form の全体を B と書く．ここで $f\in B$ は正定値とは限らないが，B は P の閉包 $\bar{P}$ に含まれている．

[M2]-3　ここで彼は reduced form の性質を調べている．

(a)　(I) は無限個の条件からなるが，実は有限個に帰着できる．$n=2$ の場合 $f(x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$ に対し，$s^{(1)}=(0,1)$, $s^{(2)}=(\pm1,1)$ をとって

$$a_{11}\ge\pm2a_{12},\qquad a_{22}\ge a_{11}\ge 0\tag{9}$$

が得られる．これと $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\ge(3/4)a_{11}a_{22}$ から $n=2$ に対する条件 (I) はすべて導かれる．一般の n については帰納法を使って (I) がいつも有限条件に帰することを証明している．

(b)　$f\in B$ のとき，x_h,x_k $(h\le k)$ 以外の変数を 0 として2変数2次形式とみると (9) から

$$\pm2a_{hk}\le a_{hh}\ \ (h<k),\qquad 0\le a_{11}\le a_{22}\le\cdots\le a_{nn}\tag{10}$$

ところで f を動かしたときの最大値 .

$$\gamma_n = \max_f \left(\frac{M}{\sqrt[n]{\det A}} \right) \tag{6}$$

はよく知られているエルミート定数に他ならない．これについて $\gamma_2 = 2/\sqrt{3} = 1.1547$，$\gamma_3 = \sqrt[3]{2} = 1.259921$ などは知られている．これと (5) の右辺（それを c_n とする）を比較すると $c_2 = 1.276135 > \gamma_2$，$c_3 = 1.540095 > \gamma_3$ となっている．

ミンコウスキーはこの応用として，クロネッカーが証明なしに述べていた「n 次代数的数体の判別式は $n > 1$ のとき 1 より大」を証明しているが，あとで取り上げることにする．

ミンコウスキーは [M1] のあと著作 [M3] を，一番最後に論文 [M2] を書いているが，ここでは [M2] を先にしよう．

ガウスは２変数の２次形式について研究しその類数を調べた．クロネッカーはやはり２変数２次形式の同値関係を定義し，同値類の不変量を研究した．しかし n 変数の場合に同値類を取り上げたのは恐らくミンコウスキーが一番先ではないだろうか．彼は同値類の中の無数にある２次形式から代表を選ぶという reduction theorey を展開し，それを数の幾何に応用して見せたあとでこのアイデアを一般化している．

[M2]-1　$f(x) = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j = {}^txAx$ は (1) の通りとする．このとき対角行列 $Q = \mathrm{diag}(q_1, \cdots, q_n)$ と対角成分が 1 の上半３角行列 $C = (c_{ij})$ をとり $A = {}^tCQC$ と表せる．いま $C = (c_{ij})$ $(c_{ij} = 0\ (i > j),\ c_{ii} = 1)$ とすれば

$$f(x) = q_1\zeta_1^2 + \cdots + q_n\zeta_n^2, \quad \zeta_i = x_i + c_{ii+1} + \cdots + c_{in}x_n \quad (1 \le i \le n) \tag{7}$$

となる．この両辺に現れる $x_1^2, \cdots, x_n^2$ の係数を比較して $a_{11} = q_1$，$a_{ii} \ge q_i$ $(i = 2, 3, \cdots)$ が分かり，これから次の不等式が得られる．

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \ge \det f. \tag{8}$$

[M2]-2　つぎにミンコウスキーに従って２次形式の reduction を再現しよう．

n 変数実正定値２次形式 $f(x) = {}^txAx$ の全体を P とする．P は実正定値行列 A の全体だが，(a_{ij}) $(1 \le i \le j \le n)$ を点 $A = (a_{ij}) \in P$ の座標と見て P は $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$ の領域と見なす．その境界は退化する半正定値２次形式からなっている．

が分かる．例えば $a_{11}=0$ なら $a_{12}=\cdots=a_{1n}=0$ となり，これは B の境界（超平面）になっている．

(c)　$f\in B$ の定義から $M(f)=a_{11}$ も分かる．

(d)　任意の $f(x)=\sum a_{ij}x_ix_j\in B$ に対し n にのみ依存する定数 λ_n があり

$$\det f\geq \lambda_n a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},\qquad \lambda_2=\frac{3}{4}\tag{11}$$

が成り立つ．

ところで，エルミート定数に現れる $M(f)/\sqrt[n]{\det A}$ は f をスカラー倍しても，f を同値な２次形式で置き換えても変わらないから $f\in B\cap P$ としてよい．(11) から任意の $f\in B\cap P$ について

$$\frac{M(f)}{\sqrt[n]{\det A}}\leq\frac{1}{\sqrt[n]{\lambda_n}}$$

である．論文には λ_n の興味深い関係式をいろいろ導いているがその具体的な表示はない．

ミンコウスキーは領域 B が群 $GL_n(\mathbf{Z})$ の P における”基本領域”という考えを持っていた．しかし，正確な定義や言葉は見あたらず，以下のことを証明している．

(e)　$f\in B$ を $g\in B$ に移す $S\in GL_n(\mathbf{Z})$ は有限個しかない．とくに $f,g\in B\cap P$ なら $S=\pm 1_n$ である．

(f)　領域 $B\subset\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$ は $f=0$（原点）を頂点にもつ convex な錐体で，$f=0$ を通る有限個の超平面で囲まれている．すなわち

$$f\in B,\lambda>0\Rightarrow\lambda f\in B$$

$$f,g\in B,\ 0<t<1\Rightarrow(1-t)f+tg\in B.$$

(g)　$\varphi\in B$ が独立な２つの reduced form の和で表せないとき φ を Kantenform 呼ぶ．B は f を通る超平面で囲まれていたが，φ が Kantenform とは超平面の交わり，つまり稜線上にあることを意味している．(勿論スカラー倍を除いて決まるのだが)．さらに

任意の $f\in B$ が正数係数の Kantenform の一次結合で表せる．

[M2]-4　任意の $c>0$ に対し超曲面 $S(c)=\{f\in P\mid\det A=c\}$ を考えよう．$S(c)$ は c を変えると相似な超曲面が得られるから $S(1)$ を考えればよい．

相異なる $f(x) = {}^t xAx, g(x) = {}^t xBx \in S(1)$ を取ると，$0 < t < 1$ なる任意の t について常に $\det((1-t)A + tB) > 1$ となる．従って $S(1)$ は原点側から見て convex な超曲面になっている．

実際，f, g を同時対角化して $f = \sum_i \alpha_i x_i^2$，$g = \sum_i \beta_i x_i^2$ とする．このとき $\Delta(t) = \prod_i(\alpha_i + t(\beta_i - \alpha_i))$ は $\Delta(0) = \Delta(1) = 1$，かつ $(d/dt)^2(\log \Delta(t)) < 0$ となるので正しい．

[M2]-5　P 上の関数 $f \to M(f)/\sqrt[n]{\det A}$ が $f = f_0$ で極大のとき，f_0 を **extrem** という．この関数は f の同値類にのみ依存するから $f \in B \cap P$ としてよい．

定理　$f_0 \in B \cap P$ が extrem form なら f_0 は Kantenform である．

関数 $M(f)/\sqrt[n]{\det f}$ の極大は領域 B の境界しかも稜線上でしか取らないという．

面白い証明なので紹介しておく．f_0 は extrem だが Kantenform でないとする．$a_{11} = M(f_0)$，$c = \det f_0$ として $S(c)$ 上の点 f_0 における接平面を L とする．L は原点からみて曲面 $S(c)$ の外側にある（**M2**-4）．仮定から f_0 は2つの独立な reduced form ϕ, ψ の和になっているから，原点と ϕ, ψ を結ぶ直線の延長と L との交点をそれぞれ ϕ^*, ψ^* とする．点 $f \in B$ が ϕ^*, ψ^* を結ぶ線分上を動くとき，$a_{11} = M(f_0)$ は一定だが，$\det f$ は f_0 の近くで増加（**M2**-4），従って極大ではない．よって f_0 は Kantenform でなければならない．

[M2]-6　次に $f = {}^t xAx$, $A = (a_{ij})$ が extrem form であるための必要条件を挙げている．$f \in B \cap P$ が Kantenform かつ extrem とすれば，他の Kantenform $g \in B \cap P$ に対して

$$\frac{1}{n \det A} \sum_{i,j} \frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} b_{ij} > \frac{b_{11}}{a_{11}} \qquad (g(x) = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j) \tag{12}$$

でなければならない．そして以下の例をあげている．

例　$n = 2, 3, 4$ の場合，以下の対称行列に対応する f は extrem form である．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

これらは何れも $M(f) = 2$ で $\det A$ はそれぞれ $3, 4, 5, 4$ であるから $M(f)/\sqrt[n]{\det A}$ はそれぞれ $2/\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, 2/\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{2}$ となる．

[M2]-7　定数 $D > 0$ および十分小さな $\varepsilon > 0$ $(D > \varepsilon)$ に対して

$$B(D) = \{f \in B \mid \det A \leq D\}, \qquad B(D, \varepsilon) = \{f \in B \mid \det A \leq D, a_{11} > \varepsilon\}$$

とおく（$a_{11} > \varepsilon$ なら (10), (11) より $\det f > \lambda_n \varepsilon^n$ に注意）．このとき，$B(D)$ の体積積分は広義積分だが $B(D,\varepsilon)$ $\varepsilon \to 0$ から有限なことを示している．この体積は変数変換で $v_n D^{(n+1)/2}$ という形で書けることは明らかである．

次に $\sigma < 1/2$, $\varepsilon \leq 1$, $\varepsilon < G$ と任意の $f \in B \cap P$ に対して

$$\Phi(f) = \sigma \cdot (\det A)^{\frac{1}{n}(\frac{n}{2}+\sigma)} \sum_{x_j} f(x_1, \cdots, x_n)^{-(\frac{n}{2}+\sigma)}. \tag{13}$$

ただし，和は $\varepsilon \leq f(x_1, \cdots, x_n) < G$, $(x_1, \cdots, x_n) = 1$ なる組 $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{Z}^n$ を動く．

いま上の $\varepsilon > 0, \sigma > 0, G > 0$ は

$$\sigma = o(\varepsilon^{n/2}) \ (\varepsilon \to 0), \quad (\log G)^{-1} = o(\sigma) \ (\sigma \to 0) \tag{14}$$

を満たしているものとし，この条件下での極限 $\varepsilon, \sigma \to 0, G \to \infty$ を単に lim と書くことにする．

このとき以下の結果を導いている．証明が技術的だが難しくはない．

$$\lim \Phi(f) = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\zeta(n)} \cdot \frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(1+n/2)} \tag{15}$$

$$\lim \int_{B(D,\varepsilon)} \Phi(f) da_{11} \cdots da_{nn} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\zeta(n)} \cdot \frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(1+n/2)} D^{(n+1)/2} \tag{16}$$

ここで $\zeta(s)$ はリーマンのゼータ関数である．これから n に関する帰納法を使い領域 $B(1)$ の体積 v_n を求めている．

$$v_n = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\Gamma(2/2)\Gamma(3/2)\cdots\Gamma(n/2)}{\Gamma(1/2)^{2+\cdots+n}} \cdot \zeta(2)\zeta(3)\cdots\zeta(n) \tag{17}$$

さらに応用として，n 変数整係数，正定値 2 次形式で $\det A = D$ である f の類数を $H(D)$ とするとき

$$\lim_{D \to \infty} \frac{H(1) + \cdots + H(D)}{D^{(n+1)/2}} = v_n \tag{18}$$

を証明している．

[M3]-1　ミンコウスキーは 1896 年に「数の幾何学」[M3] を書いている．非常に多くのことが書かれているけれども，ここでは今日ミンコウスキーの定理で引用される結果とその周辺のみを紹介する．記号などはテキストの方に近づけたので，今までの記法とは少し違っている．

L は $\mathbf{R}^n$ の格子としよう．$L = \mathbf{Z}^n$ とは限らない．$F(x) = F(x_1, \cdots, x_n)$ は $\mathbf{R}^n$ 上連続で条件

(a) $F(x) \geq 0, \qquad F(x) = 0 \iff x = 0$
(b) $F(tx) = tF(x) \quad \text{for} \quad t > 0$
(c) $F(x+y) \leq F(x) + F(y).$
を満たしている.

正定値２次形式 f に対して $F(x) = \sqrt{f(x)}$ とすれば，F は条件を満たしている.

このとき $K = \{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) < 1\}$ は原点 O に関し対称，かつ convex な領域になる．このとき，次の定理が成り立つ.

定理 K の体積を J とし $2m = \min_{0 \neq x \in L} F(x)$ とすれば

$$m^n \cdot J \leq 1. \tag{19}$$

これはよく知られているミンコウスキーの定理である．証明は K が原点対称かつ convex であることとヂリクレの定理が使われている.

[M3]-2 $l \in L$ および $r > 0$ に対し，$K_l(r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid F(\overrightarrow{lx}) < r\}$ と置くと，$K_l(r)$ は点 l に関し対称かつ convex な領域になる．とくに $l = O$ のときは $K = K_O(1)$ である.

定理 $l \neq l'$ とする．このとき，もし $r \leq m$ なら $K_l(r)$, $K_{l'}(r)$ は内点を共有することはない．$r = m$ の場合 $K_l(r)$, $K_{l'}(r)$ の共有点はもしあればそれは境界点である.

これはミンコウスキーの第２の主定理である.

[M3]-3 ミンコウスキーは (19) を２次形式の reduction のアイデアで精密化し，以下のように定式化した.

定理 $2m = \min_{0 \neq x \in L} F(x)$ に対して，ある $m = m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n$ があって，次の不等式が成り立つ.

$$m_1 m_2 \cdots m_n \cdot J \leq 1. \tag{20}$$

実際 m_j の取り方は次の通り．$2m_1 = 2m$ とし，$2m_1 = F(a_1)$ なる $a_1 \in L$ を取る．こうして m_{k-1} と $a_{k-1} \in L$ まで求まったなら

$$2m_k = \min_{x_k} F(x_k) \quad (x_k \in L,\ x_k \notin \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Z} a_i), \qquad 2m_k = F(a_k)$$

として m_k を求める.

M3-4 ミンコウスキーは正値２次形式を距離とみて公理化し，より広範な場合に適用した．その代表的な場合を列挙しておく.

$\nu \geq n$ とする．実変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する ν 個の実１次形式を

$$\xi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \qquad x = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \qquad (1 \leq \imath \leq \nu) \tag{21}$$

とする．ただし $\mathrm{rank}(\alpha_{ij}) = n$ とする．このとき $F(x) = \max_i |\xi_i(x)|$ は [**M3**]-1 の条件を満たしている．そこで領域

$$D = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |\xi_i(x)| \leq 1, \quad i = 1, 2, \cdots, \nu\}$$

の体積を J とすれば次の定理が得られる．

定理　$0 \neq l \in \mathbf{Z}^n$ で次の不等式を満たすものがある．

$$0 < |\xi_j(l)| \leq \frac{2}{\sqrt[n]{J}} \qquad (1 \leq j \leq \nu). \tag{22}$$

とくに $\nu = n$ のときは $J = \int_D dx_1 \cdots dx_n = 2^n / |\det(\alpha_{ij})|$ であるから

$$|\xi_i(l_1, \cdots, l_n)| \leq \sqrt[n]{|\det(\alpha_{ij})|} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{23}$$

を満たす $0 \neq (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbf{Z}^n$ がある．

この定理は $\nu = n$ の場合，複素係数の１次式についても " ある条件 " のもとで実係数の場合と同様のことが言える．すなわち

定理　$n = r + 2s$ $(0 \leq r \leq n, 0 \leq 2s \leq n)$ とする．実変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する１次形式 ξ_j $(1 \leq j \leq n)$ が $\xi_1, \cdots, \xi_r$ は実係数１次形式，他は複素係数１次形式で $\xi_{r+s+j} = \bar{\xi}_{r+j}$　$(1 \leq j \leq s)$ (複素共役)　を満たし，かつ $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ が独立であるとき (23) をみたす $0 \neq (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbf{Z}^n$ がある．

クロネッカーの定理「 n 次代数的数体の判別式は $n > 1$ のとき 1 より大」([**M1**]-2) の証明はこの定理から導かれる．

[**M3**]-5　最後にもう１つ挙げて置く．[**M3**]-4 で $\nu = n$ として，ξ_j $(1 \leq i \leq n)$ は実変数 $x_1, \cdots, x_n$ の実または複素係数の１次式でこれらは独立とする．任意の $p \geq 1$ に対して

$$F(x) = \left(\frac{|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p}{n} \right)^{1/p}$$

と置くと，F はやはり [**M3**]-1 の条件 (a), (b), (c) を満たしている．従ってこのときも (22) の類似が成り立つ．