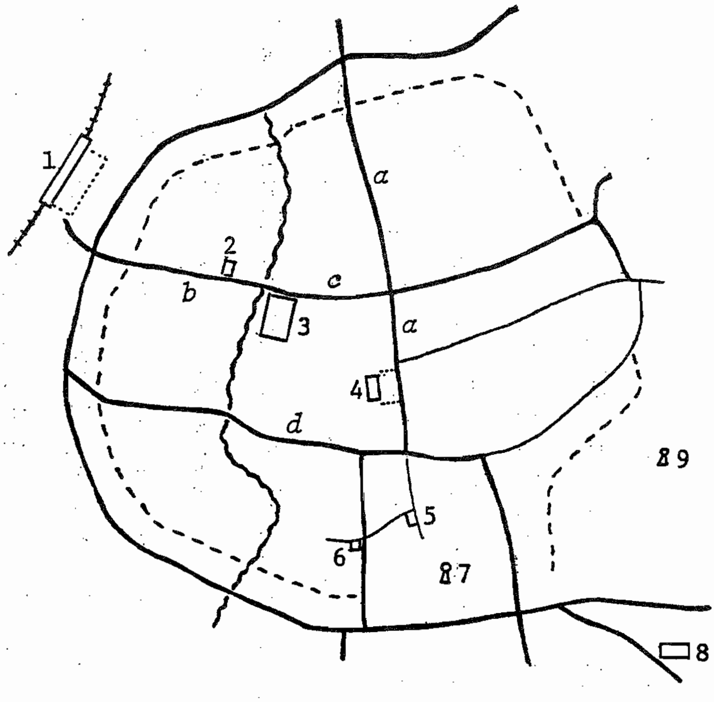
晩年のガウス

杉本敏夫

第1節　ゲッチンゲンの天文台

ガウスが 1807 年にゲッチンゲンの旧天文台に就職したとき、それは街中にあり、「塔通り」と呼ばれ、旧天文台の石積みの廃墟が残る。ゲッチンゲンの旧市内は、○の中に片仮名のキを書き込んだ形と見られる。その後、1816 年に郊外に新天文台が建設された［1］。後述の「研究室」はここにあり、官舎も併設された。後掲の有名な「テラスに立つガウス」も描かれた。



1　ゲッチンゲン駅
2　ゲーテ住家
3　図書館
4　旧市庁舎と広場
5　ガウス旧住家
6　旧天文台跡
7　ガウス・ヴェーバー記念碑
8　新天文台

9　ガウスの墓
a　ヴェエンダー大通り
b　ゲーテ並木通り
c　プリンツェン通り
d　グローナー通り
-----　城壁跡
〰〰　小川

1834年頃の「電信機の発明」の際には、新天文台Aと大学の物理実験室Bの間に鉄線を張った。電信機で最初に送られた言葉は、“ Michelman kommt. ”或る訳書に「ミッヒェルマンが来るよ」とあるが、これは誤り！ A地点に居るGがB地点に居るWにそう言ったならば、ドイツ語では、B地点のWの立場に立って考えるから、「ミッヒェルマンが行くよ」と訳すべきである。

晩年のガウスは、旧市内の図書館に行き、新聞（恐らく株式欄）を読んだ。彼は蓄財の才能もあり、晩年、株の売買によって儲けた。また、晩年には、「ゲッチンゲン大学の教授未亡人のための年金の設計」という研究もあり、生命保険の歴史の中に残る。大学者と言われる評価からは、想像もつかないであろう。これらは、他日に譲る。

第2節　晩年の講義

今回の報告は、ガウス晩年の学生デデキントによって描かれた、「最小二乗法の講義を行なうガウス」[2], [3] の紹介である。1777年生まれ、1855年没のガウスが、この講義を行なった1850年当時、73歳だった。

デデキントは言う、

「ガウスの講義を受講するのに相応しい予備知識を身につけたので、彼の研究室（新天文台）に行き、聴講簿を提出した。ガウスは『聴講生が少なければ、講義は成立しない。君の下宿の床屋に行ったとき、講義を始めるか、どうかを知らせて置こう。』と言った。2, 3日後に、床屋の主人が使者に立って、『他にも何人か聴講の届け出がありましたので、Herr Geh. Hofrat Professor Gauss (宮中顧問官ガウス教授閣下)は、講義をされることになりました。』と告げた。」名誉市民ガウスは、称号を付けて呼ばれた。この辺の経緯は、時代がかっており、しかも生き生きとしていて、面白いが、詳細な引用は省略する。

「ともかく、(後にドイツの各大学の教授になった) 錚々たる友人九名が参加した。大先生ガウスの講義を直接聴講できるのだから、誰も欠席しない。講義室は研究室の隣で、かなり狭い。机も狭く、最後に来た二人は、ノートを膝の上に置いたほどである。ガウスは黒い小帽子を冠り、褐色のフロックコート、灰色のズボンの姿（肖像画を見よ)。手を組んで少し俯き加減で、くつろいだ姿勢で座った。話し方は、自由で、明晰、単純、平易であった。新しい見地を力説するときは、頭を挙げ、美しい、射るような碧眼で見詰める。ときどき、指を折って数えるとき、故郷ブラウンシュヴァイク（デデキントも同郷）の訛りが出た。ガウスはデータを記した小紙片を持ち、狭い黒板の場所を倹約して、数値の実例を書き並べた。 ...」[2, 3]

幸いにもデデキントによって残された、当時のままの記録「ガウスによる最

小二乗法の講義」[2] の内容は、次節以下に掲げる。

第3節　講義の概略

弥永の翻訳 [3] で省かれた「ガウスによる最小二乗法の講義」の内容を、デデキントの記述 [2] によって、簡略化して紹介する。ただし、飽くまでデデキントの記述によるのだから、ガウス自身の論文、または講義録そのものではない。デデキントの記述は、甚だ詳細であり、恐らくは自分の古い筆記ノートを参照したと思われる。(誰しも、大先生の講義ノートは手放さないだろう。)

天文台のテラスに立つガウス (1850 年頃の肖像画)

ゲッチンゲン近郊の「五つの地点の高度」の測定値が提出された。Q (ヴェエンダーの製紙工場)、P (ゲッチンゲン天文台の地表)、R (陸地測量の原点のある、近郊の山ホーエンハーゲンの郵便局の屋根)、S (三角網にも出て来るヒルスの東の坂)、T (北方の山、ブロッケンにある塔) である。Pを規準に取った相対的な高度 (メートル単位) が示される。(紙面の節約のため、改行を一部省略する。原文は立体だが、慣例に従い斜体に直した。)

$Q=P+64{,}334$ ……①,　　$R=P+349{,}366$ …②,

$R=Q+283{,}596$ ……③,　　$S=Q+206{,}580$ …④,

$S=R-76{,}108$ ……⑤,　　$T=P+648{,}427$ …⑥,

$S=P+719{,}612$ ……⑦.

デデキントは言う。「これらの等式には、実際は、四つの未知数、即ち、ゲッチ

ンゲンからの相対的な高さ、 $Q-P$, $R-P$, $S-P$, $T-P$ しか登場しない。何故なら、絶対的な高さは調達できないから。」

第４節　一覧表への変換

そこで、次には、これらの値に未知の端数 q, r, s, t を補って、

$Q=P+64{,}334 + q$ ……⑧,

$R=P+348{,}648 + r$ ……⑨,

$S=P+271{,}727 + s$ ……⑩,

$T=P+994{,}207 + t$ ……⑪,

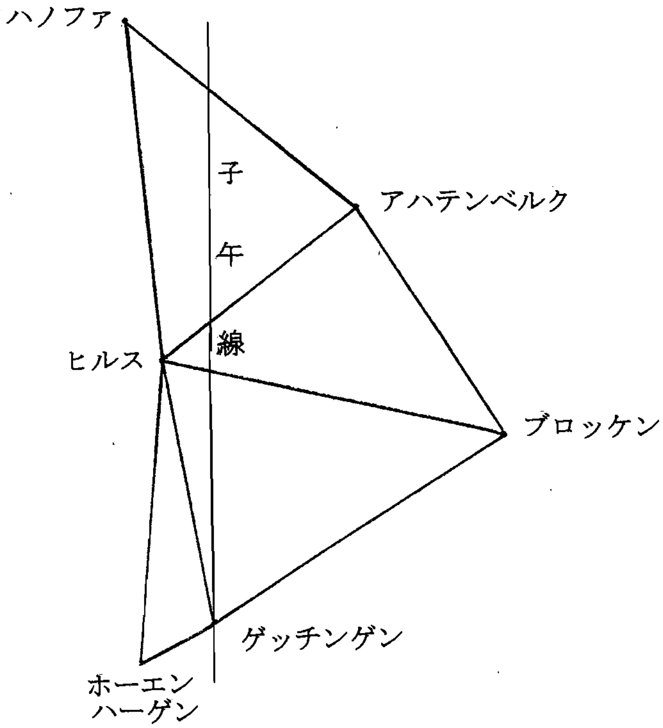
に変換する。⑧は①の再記である。その他の数値は、前節の①, ②, …⑦ 等と ⑧, ⑩ を組み合わせて導くことができる、と推測した。それは、

⑨＝［①＋②＋③］÷2,

⑩＝［①＋②＋④×2］÷2,

⑪＝［②＋⑦＋⑧＋⑩］÷2.

であった。私は、デデキントの記述の忠実な再現に努めている。しかし「明らかに誤りと思われる記述」は、論理を尊重する立場から、無断で訂正した。



ガウス全集　第９巻　434 頁の地図（一部を模写）

三角網の図

以上の結果から、四つの標準方程式が得られる。表現はデデキントに倣う。

$$
\begin{array}{l}
0=-1531\ +3q\ -\ r-\ s\quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑫,\\
0=+3681\ -\ q\ +\ 4r-\ s-\ t\quad \cdots⑬,\\
0=-2868\ -\ q\ -\ r+\ 3s-\ t\quad \cdots⑭,\\
0=\qquad\qquad -\ r\ -\ s\ +\ 2t\quad \cdots⑮,
\end{array}
$$

デデキントは、この連立方程式を数表の形で表したが、さほど理解を助けるとも思われない。原文紹介に反するが、連立方程式のままとする。 更に定数 $-1531,\ +3681,\ -2868,\ 0$ を一般化して、 $a,\ b,\ c,\ d$ と置く。

$$
\mathrm{I}\qquad
\begin{array}{l}
0=\ a+\ 3q\ -\ r-\ s\quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑫',\\
0=\ b-\ q\ +\ 4r-\ s-\ t\quad \cdots⑬',\\
0=\ c-\ q\ -\ r+\ 3s-\ t\quad \cdots⑭',\\
0=\ d\qquad -\ r\ -\ s\ +\ 2t\quad \cdots⑮',
\end{array}
$$

第５節　ガウスの消去法の実行

デデキントが紹介するガウスの消去法とは、変数 $q,\ r,\ s,\ t$ を次々に置換して行く方法である。(現代的な「ガウスの消去法」は後述する。) 即ち

II. $r=-920+r'$, III. $s=648+s'$, IV. $q=420+q'$,

V. $r'=267+r''$, II. $s'=229+s''$.

と置換する。その結果、定数 $a,\ b,\ c,\ d$ は次のように変化する。

	I	II	III	IV	V	VI
a	−1531	−611	−1260	0	−267	−496
b	−3681	+1	−648	−1068	0	−229
c	−2868	−1948	−1	−421	−688	−1
d	0	+920	+271	+221	+4	−225

私は試みに、現代の方法で、各段階の方程式を解いてみた。その結果は、

	I	II	III
q	19135/21	19135/21	19135/21
r	−4057/21	◇15263/21	15263/21
s	29311/21	29311/21	◇15682/21
t	12627/21	12627/21	12627/21

	IV	V	VI
q	◇10315/21	10315/21	10315/21
r	15263/21	◇9656/21	9656/21
s	15682/21	15682/21	◇ 10878/21
t	12627/21	12627/21	12627/21

II ～ VI の各置換に対応した変数は◇印のような値をとる。その際、例えば I から II への移項により、根 r は $-4057/21+920 = 15263/21 = r'$ と置き換わる。他も同様。そこで、原方程式（I）を解く代わりに最後の方程式（VI）を解いて、VI の欄の如き値を求めて、逆向きに辿って、◇印の箇所で根の値を変更して行けば、原方程式（I）の根が得られる、という考え方である。

果たして、そのような目論見はうまく行くだろうか？　特に、原方程式（I）に比べて、最後の方程式（VI）の解法が簡易化されただろうか？　私には、簡易化されたとは思えない。原方程式を解くのとほぼ同じ手間が掛かる。さらに、最後に得られた根から、逆向きに、根を置換して行くために、ほぼ同じ手間が掛かる。ガウスが、またはデデキントが、実際にここに再現したような《方法》を用いたと想像することは困難である。

第５節　翻訳者の弁明

私は、上の四つの方程式 ⑫, ⑬, ⑭, ⑮ に集約して、試みに現代的な方法によって解いてみた。例えば、

⑬×2 と ⑮ の和から $0 = +7362 - 2q + 7r - 3s$ …⑯ を得、

⑭×2 と ⑮ の和から $0 = -5736 - 2q - 3r + 5s$ …⑰ を得る。

これで、変数 t が消去された。次は

⑯ と⑫×3 の差から $0 = +11955 - 11q + 10r$ …⑱ を得、

⑰ と⑫×5 の差から $0 = -13391 + 13q - 8r$ …⑲ を得る。

最後に、⑱×4 と ⑲×5 の和から、目標の $q = 19135/21$ …⑳ を得る。

等々、…。こうした計算を積み重ねて、一つの式に含まれる変数の個数を減らして行って、最後に、

$$q = 19135/21,\quad r = -4057/21,\quad s = 29311/21,\quad t = 12627/21$$

を得る。これらの諸根は、勿論、上記の連立方程式 ⑫ ～ ⑮ を満たすことが確かめられた。

現代的な方法とは、要約すれば、

「消したい変数の係数を揃えるため、適切な数値を相互に掛けて引く手続きを重ねること」である。

私は、困難な状況にある。前節に紹介した「ガウスの消去法」なるものが、充分に腑に落ちない。その理由は、デデキントの記述が、さほど丁寧とは言えないからである。勿論、デデキントがガウスの講義を聴いたときは、「それは非常に丁寧な説明だった。」 学生デデキントも同輩も、ガウスから直接話しを聴き、ガウスの側も恐らく学生の顔を見ながら、納得の具合を確かめたであろう。

しかし、デデキントがどれほど丁寧にノートを取ったとしても、半世紀後に講義を祖述する際には、「紙数も少ないし、これ位で読者に伝わるだろう」と考える程度の記述に止めざるを得なかった。しかも、前半が非常に丁寧に解説されているのに比べて、後半の記述はいささか簡略である。後半は、デデキントの論文を通してガウスの講義内容を詳しく理解し、できる限り講義に近づきたいと願う私にとっては、充分納得が行くほど丁寧とは言いがたい。私はただ、できる限りデデキントの原文に沿って紹介しようと努めた。

第７節　講義の続き

元に戻って、デデキントの伝える「ガウスの講義」の続きを紹介する。

ガウスは、これらの直接解法についての二三の注意を与えた後、或る間接的な解決方法を教えた。(それは難しい消去の作業を軽減させるのだが、) 引き続く置換により、定数項をいつも、より小さな絶対値の中に押し込めることだ、と言う。第二の方程式 ⑬ の場合、それは最大の定数項(3681) を含み、さらに最大の係数 4 を持つ所の $4r$ なる項のほかに、未知数 q, s, t を含んでいる。それ故、r に対しては、値 -920 を与えねばならない。人は、-920 を未だ近似値と考えるから、いま一つの訂正値 r' を導いて、$r=-920+r'$ としなければならない。(r の代わりに r' を新たな未知数を導入したことになる。) その結果は、前節に述べた通り。

デデキントは、ここまでしか述べていない。彼のノートの記述は、恐らく繁簡の差が激しいだろう。(現代の私の、僅かに保存された学生時代のノートを見ても、その通りである。) 学生デデキントは、まさか５０年後に「ガウスの講義」を紹介する羽目になるとは全く予想していない。大先生ガウスの講義だから、必死になってノートの書き取りに励んだに相違あるまい。

[日本の中学校の現行の消去法とは、ガウスの消去法を指すものらしい。しかし、ガウスの消去法と言っても、デデキントが紹介した内容とは全く違う。即ち、前段は所謂順行消去であり、一根を得ると、後段は所謂逆行代入である。しかも中学校の先生は、原則通りには消去を進めず、全体を見回して、消去し易い変数から順々に消去して行く。またそれが、実用的な進め方と言うものだろう。現行の消去法と言うのは、これまで紹介してきた数学史の立場から見ると、ガウスのではなく、後の時代に整理された方法と言うことになる。]

第８節　消去法の急所

ガウスは、約 20 回の操作を繰り返したのち、五つの未知数の確定値を与えた、という。デデキントは言う、『この例題の紹介によって、ガウスが絶え間なく努力したこと、実際計算の際、含蓄のある技巧を駆使したことを、諸君に伝えられたとすれば、満足だ。』と。

さらに、ガウスが述べた《精密性》の概念を紹介する。これまで、各測定は等しい信頼性が持てるもの、と仮定して来た。しかし、その前提が保たれないような場合には、測定の精度に応じた《重み》を掛けなければならない。

ガウスの講義の当時は、まだ行列式の理論が熟知されていないという事情もあって、$x, y, z, \cdots$ に関係する標準方程式 $X=0, Y=0, Z=0$, 等々の中から、x に独立な方程式に移行し、次いで y に独立な方程式に移行し、等々、と進め、最後に唯一の変数 z にのみ関係する $H(z-C)=0$ という方程式にまで変形する道を取った、と言われる。

ガウスは、記号の小変更を繰り返して伴うような定理の証明においては、[簡素化のため] 三つの未知数 x, y, z の場合に限定し、x と y の消去から二つの係数 α, β を得た。それは、次の式と同一の働きを持つ、とした。

$$\alpha X + \beta Y + Z = H(z-C)$$

こうして、標準方程式 $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ が得られた。

（ここは、デデキントの記述をそのまま写した。前半の詳細な記述に比べて、どうも後半は簡略のように思われる。それは、彼のノートの精粗に由来するのであろう。デデキントを通してガウスの講義を聞く私の感想としては、「ガウスはいつも一般論 n の場合でなく、常に 3 変数のような把握し易い場合を、例題として考えていたのだなぁ。」 ）

もう一つの観測 $z=D$ が加わるならば、標準方程式は

$$H(z-C)+(z-D)=0$$

となり、初めに得られた結果と比べて、$p=H$ という結果が得られる。等々。

上記のような正しい消去と密接に結び付ける中で、線型関数 $A, B, C \cdots$ の平方の列における、誤差の平方和 Ω の、引き続く恒等変換と、・・・・・ならば、x は A の中だけ、y は A と B の中だけ、z は A と B と C の中だけ、這入って来る。最後に残った恒等的な構成要素は、Ω の最小値で表され、そして、未知の $x, y, z, \cdots$ の尤も有り得る値は、方程式 $A=0$, $B=0$, $C=0$ から、逆の順序で生じることになる。[この最後の数行は、言葉足らずで、少し理解し難いが、直訳しておいた。]

デデキントは後半の叙述を端折っている。彼のノートの記述が、そのように端折ってあったのか、それともこの論文を書く段階で、ガウスの講義を紹介す

る際、簡略化したのか、分からない。しかし、これだけでも記録を残してくれたお蔭で、永い年月を経た後にも、ガウスの謦咳に接することができる。誠に貴重である。現代の私たちが利用できる「数学史の資料」とは、常にこのような断片の集成である。後は想像を廻らして再現に努めるより仕方ない。

第９節　終講の挨拶

以下、デデキントの原文を、終わりまで直訳しよう。

「この叙述によって、ガウスは 1851 年 1 月 24 日に、講義の第一部を終えた。こうして彼は我々に、最小自乗法の本質に完全に精通せしめた。到る所明晰な、独自な実例による、基礎概念と確立計算の主定理の解説であった。それは、方法への第二、第三の基礎づけの役割を果たすものであり、最早立ち入る余裕がない。次の一言に止めよう。精選された講義の中で、益々興味を誘う、定積分の理論が扱われる筈だった。以前には講義嫌いと言われたガウスが、教える喜びを見出したかも知れない。

1851 年 1 月 24 日に最終日を迎えた。ガウスは立ち上がり、親しみのこもった別れの言葉で、講義を閉じた。『あと二三の言葉で終わろうと思う。諸君は全く無味乾燥な講義に追随する、と考えたかも知れない。だがその講義に、非常に規則正しく参加された。』

それから半世紀の時が流れた。しかし《無味乾燥》と言われたこの講義ほど美しいものは無く、忘れ難く残っている。」

〔補記〕

私は３～４頁で、与えられた原データ①～⑦から、変換後のデータ⑧～⑪へと導く計算を、

⑨＝［①＋②＋③］÷2,
⑩＝［①＋②＋④×2］÷2,
⑪＝［②＋⑦＋⑧＋⑩］÷2.

と推測した。しかし、この報告書を作成する段階になって検算してみると、どうも推測のような数値にはならない。と言って、その他の計算は思い付かない。やむを得ず、このような推測の欠陥を、そのまま残して置いた。

むしろ、デデキントが紹介した「ガウスの講義」の狙いは、４頁の連立方程式 ⑫, ⑬, ⑭, ⑮ を解いて、同所に与えたような q, r, s, t の値を得る過程であった。しかし、デデキントの原文はもっと複雑な計算〔とは言っても、それは明示されていない〕を実行するかのように書かれている。即ち今一つの「変数 p を含む五つの式から成る連立方程式が与えられた」と言い、さらに「この

変数 p を消去した後、四つの式から成る連立方程式を解いた、云々」と述べながらも、その処理過程は殆ど説明していない。

デデキントの狙いは、連立方程式をガウスがどのように解いたか、その過程を紹介するところにあった、と私は考える。私は簡明を旨とし、本文 4 頁以下のような記述によって、「推測されたガウスの解法の復元」を目指した。私の復元が唯一のものである、とまでは主張しない。

文献の入手について便宜を図って頂いた高瀬正仁氏に感謝する。

文献

[1] 杉本敏夫：ガウスの跡を尋ねて、明治学院大学、一般教育部付属研究所「紀要」第 9 号(1985 年 3 月)、99-105 頁。

[2] R. Dedekindt : Gauss in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate. Dedekindt'sche Werke, XXXII,1901. p. 293-306.
Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjärigen Bestehens der Königlichen Gesellschft der Wissenschaften zu Göttingens. S.45-59 (1901). [R. デデキント：最小自乗法の講義におけるガウス、デデキント全集 32 巻、1901 年、293-306 頁。ゲッチンゲン王立自然科学協会、設立百五十周年記念号、45-59 頁。]

[3] 弥永昌吉：数学者の世界、岩波書店、1982. 「講義について」(149-159 頁) の内、デデキント「ガウスの講義」の部分は 155-159 頁。