群のスピン表現（射影表現）の歴史概観（付年表）

平井 武 (Kyoto)

凡例. 群のスピン表現の歴史を概観するのに，ここでは，年表に解説を書き込んでいく形にした．まず年代を書き，そこでの主要事項を太字で示し，主要な引用文献を挙げてそれを中心として解説した．全体の文献は，読者の便宜のため，あらためて文末にまとめて掲げた．（なお，数学・理論物理学からの解説も込めたより詳しい歴史概観には文献 [HHoH] を見られたい．）

1　「前　史」

1840 （四元数の実質的発見と空間回転の Rodrigues 表示）

[Rod] (Benjamin) Olinde Rodrigues, Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire, J. de Math. Pures et Appliquées, **5**(1840), 380-440.

（1）3 次元ユークリッド空間 E^3 における運動を，公理系から出発して，組織的に研究した長編（61 頁）の論文である．その白眉は原点を固定する空間の 2 つの回転の合成法則を「球面上の三角形」を使うことにより三角関数を使って具体的に計算式で表したことである．この計算式は「四元数」の演算を実質的に与えている．

（2）もう一つの重要な貢献は，回転の **Rodrigues 表示**である．これは，近時，回転の Euler 角による表示に代わって，実用面で有用とされている．その理由は，パラメーターに切れ目（ジャンプ）が無く，微分方程式が書けること，2π (360 度) 以上の多重回転も問題なく書け，計算量も少ない，などである．そのほかに，ここには，（以下で説明するように）回転群 $SO(3)$ の二重被覆，および，そのスピン表現（2 価表現）が実質上，現れている．

説明の簡明のため，四元数と現代数学用語を用いて説明する．四元数の標準的な単位を $1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする（下の (1.4) 式参照）．四元数全体を $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{k}$, 純四元数全体を $\boldsymbol{H}_- = \boldsymbol{R}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{k}$, と書く．$\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$ の長さを $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ とし，四元数のうち，長さ 1 のもの全体を $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{B}_-$ と書く．$\boldsymbol{H}_-$ の元は $\phi\boldsymbol{w}$ ($\phi \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{B}_-$) と書ける．

回転の Rodrigues 表示.

対応 $\boldsymbol{H}_- \ni \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k} \leftrightarrow x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in E^3$（縦ベクトルで表す）により，$\boldsymbol{H}_-$ と E^3 とを同一視する．原点 **0** を止める回転 R には必ず回転軸があることが別途示されるので，R はその回転軸 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{B}_-$ と軸の回りの右ねじ回転の角度 ϕ によって，記述される．ベクトル $\phi\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_-$ を R に対する parameter として採用し，$R = R(\phi\boldsymbol{w})$ と書く．これが **Rodrigues 表示**である．実際に回転 $R(\phi\boldsymbol{w})$ を $\phi\boldsymbol{w}$ を用いて実現するには次のようにする．

(a) まず，$\boldsymbol{H}$ の単位球 $\boldsymbol{B}$ は積に関して群をなすが，これが回転群 $SO(3)$ の不変被覆群を与える．実際，$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B}$ に対して，写像

$$\Psi(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{H}_- \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{u}\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^{-1} \in \boldsymbol{H}_- \tag{1.1}$$

を考えると，対応する $\Psi'(\boldsymbol{u}) : E^3 \ni x \mapsto x' := gx \in E^3$ は，長さを不変にするので，g は $E^3 \cong \boldsymbol{H}_-$ の等長変換群 $O(3)$ に入る．さらに g は恒等写像 I に連続的につながるので，I を含む連結成分 $SO(3)$ の元，すなわち，E^3 の回転，を与える．準同型 $\Psi' : \boldsymbol{B} \to SO(3)$ の核は $\Psi'^{-1}(\{I\}) = \{\pm 1\}$ であり，$\boldsymbol{B}/\{\pm 1\} \cong SO(3)$. 3 次元球面は単連結だから，$\boldsymbol{B}$ は単連結である． □

(b) 次に，$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_-$ に対し，$\exp(\boldsymbol{v}) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \infty} \frac{1}{k!}\boldsymbol{v}^k$ とおくと，$\exp(\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{B}$，すなわち，$\|\exp(\boldsymbol{v})\| = 1$ である．実際，$\exp(\theta\boldsymbol{i}) = \cos\theta + \sin\theta\,\boldsymbol{i}$.

(c) そこで，回転角を $\phi \to \frac{1}{2}\phi$ と半分にしてから，合成写像で写すと，

$$\boldsymbol{H}_- \ni \phi\boldsymbol{w} \mapsto \Psi'\big(\exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\big) \in SO(3). \tag{1.2}$$

これが求める回転 $R(\phi\boldsymbol{w})$ である．これを証明するには，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{i}$ のときに示せば十分である（何故か？）．$\Psi\big(\exp(\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{i})\big)$ を ρ とおけば，$\rho(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}$. 従って ρ の回転軸は $\boldsymbol{i}$ である．三角関数の倍角の公式を使って計算すると，

$$\big(\rho(\boldsymbol{j}), \rho(\boldsymbol{k})\big) = (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

となるので，ρ は $(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$-平面の角 ϕ の回転を表すことが分かる． □

ここで，重要な留意点として，角 $\theta = \frac{1}{2}\phi$ が $2\theta = \phi$ として，2 倍で現れることである．これが $\Psi' : B \ni \boldsymbol{u} \mapsto g = \Psi'(\boldsymbol{u}) \in SO(3)$ が 2:1 の写像であり，$\boldsymbol{B}$ が二重被覆であることの帰結である．

また，見方を逆転させて，（局所的には 1 価だが，実際は 2 価の）対応 $SO(3) \ni g \mapsto \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{H}$ を考えると，$\dim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H} = 4$ なので，$\boldsymbol{R}$ 上 4 次元の $SO(3)$ の射影表現が現れている．実は，これは $\boldsymbol{C}$ 上 2 次元の射影表現である（[平井 13]，例 3.2, 例 4.2 参照）．

計算規則. 2 つの回転の積 $R(\boldsymbol{v})R(\boldsymbol{v}')$ $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{H}_-)$ を $R(\boldsymbol{v}'')$ とおいたとき，$\boldsymbol{v}''$ を $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')$ から計算する規則が，四元数の計算法則を与えることは以

上の議論から見て当然である（すでに上の議論に四元数を使ってしまっているので，話が前後してしまっているのは誠に申し訳ない）．

1843 （四元数の発見）

[Ham] W.R. Hamilton, On a new species of imaginary quantities connected with the theory of quaternions, Proc. Roy. Irish Acad., **2**(1843), 424-434.

Hamilton は，長きに渉って，複素数体 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}1 + \boldsymbol{R}i$, $i = \sqrt{-1}$, を拡張してそこで割り算が出来るようにしたい（ベクトルによる割り算と言っているようだが）という目標で，実数体 $\boldsymbol{R}$ に虚数単位を 2 個添加したした場合でも苦心惨憺していたようであるが，遂に 1843 年 10 月 16 日に，3 個の虚数単位を添加して，次の計算法則（Hamilton の fundamental formula と呼ばれている）を与えればよいことを，発見した：

$$(1.4) \qquad \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1, \quad \boldsymbol{ijk} = -1 \quad \text{(fundamental formula)}.$$

その後，彼は「四元数は世紀の大発見である」と信じてその有用性を示し，普及を図ったようであるが，3 次元回転を四元数を用いて表示することには遂に成功しなかった．その齟齬の大本(おおもと)は，彼が発見者特有の自負と頑固さで 1:1 の表示を求め続けたからである．

[実際に，複素数のときには，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}1 + \boldsymbol{R}i \ni x + yi \leftrightarrow (x, y) \in E^2$, と同一視すれば，$\boldsymbol{B}_2 := \{w \in \boldsymbol{C}\,;\, |w| = 1\} = \{e^{i\theta}\,;\, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ の元 $e^{i\theta}$ を単に掛ければ，$z = x + yi \mapsto z' = e^{i\theta}z = x' + y'i$ により，角 θ の 2 次元回転が 1:1 に記述できていたのだった．]

上記の Rodrigues, Hamilton をめぐる歴史的状況の解説としては，以下を挙げる．私自身もここから多くの知見を得た．

[Alt] S.L. Altmann, “ Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal”, *What went wrong with one of the major mathematical discoveries of the nineteenth century*”, Mathematics Magazine, **62**(1989), 291-308.

また，「歴史の皮肉」という言葉で片付けてしまうにはあまりに重い現実として，Rodrigues の（Hamilton に先行する）四元数の発見や，その他の重要な結果が，その後全く顧みられなかったという事実がある．ユダヤ系仏人として，当時（王政復古後）ユダヤ嫌いに乗じた「ユダヤ人を公的機関から排除する」という教会権力の被害をもろに受けた彼は，しかし，上記の論文 [Rod] を立派なジャーナル（J. de Mathématiques Pures et Appliquées）に掲載して貰うことが出来た．Élie Cartan もスピノールに関する彼の著作 [Car2] で，論文 [Rod] を引用しているが，Olinde 氏と Rodrigues 氏の 2 人の共著であると誤解していた．何故か最近まで全く無視されてきたが，ようやく Rodrigues の業績の発掘が行われ，その復権が図られている（[AlOr] 参照）．私もいろいろと調べて，2011 年の数学史シンポジュウムで報告した [平井 10]．

2　「本　史」

2.1　群の表現論の創始

1896 （それは指標の理論と群行列式の理論から始まった）

[Fro1] F. Frobenius, Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

[Fro2] F. Frobenius, Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, ibid., 1343–1382(1896).

Dedekind は 1880 年から可換群の指標について研究していて，それに関して，Frobenius (1849/10/26–1917/08/03) に質問したが，それを契機として，F. Frobenius は非可換群についても指標の理論の研究を始めた．その最初の結果が発表されたのが上の [Fro1, 1896], [Fro2, 1896] である．これらが，（有限群の）線形表現論の始まり，である．

しかしながら，[Fro1] は非可換群 G の「指標」を方程式で定義して研究しており，[Fro2] は「群行列式」を代数的に研究しているので，線形表現はまだ現れていない．しかし，翌年には [Fro3] で線形表現が表に現れて，[Fro1] - [Fro2] もその立場から見直されている．すなわち，Frobenius の「指標」は既約な G の線形表現の trace character に他ならず，「群行列式」は $\ell^2(G)$ 上の正則表現から出てきて，その既約表現への分解を，代数的見地から支配する．

その後，1906 年までの 11 年間で書かれた約 14 編の「群の指標と表現論」関係の論文（1906 年の 2 編は J. Schur との共著）で有限群の表現論のめぼしい結果を総なめにした．彼の 46 歳くらいからのおおよそ 12 年間くらいのことである（彼は 1893 年にベルリン大学教授に就任し，プロシャ科学学士院会員に選ばれている）．それらの論文のめぼしいものを詳細に読み込んで，4 年間にわたって数学史として報告したものが，[平井 3] - [平井 6] である．

Frobenius の理論構成は，非常に代数的で厳密ではあるが，とても読みにくい．その後 Burnside は別のアプローチの方法を [Bur1, 1898] - [Bur2, 1898] で提出した．また，弟子である Schur も線形表現と指標の理論を [Sch02, 1905] において再構成した．これらはいずれも Frobenius の後追いである．

1897 （Frobenius の理論と一部重なった論文）

[Mol2] T. Molien, Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionensgruppe, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft, **11**(1897), 259-274.

Theodor Molien (1861/09/10 - 1941/12/25, ロシヤ名 Fedor Eduardovich Molin) は当時のドイツ学問の辺境であった Dorpat 帝国大学で学位を得た．学位論文の仕事は，論文 [Mol1, 1892] になったが，特筆すべきは，次の Wedderburn の定理の $K = C$ の場合を証明したことである: 「可換体 K 上の単

位元を持つ単純多元環は，ある K 上の斜体 D の上の全行列環 $M(n, D)$ に同型である.」

彼は，後にその大学に職を得たが，現地の（Academie になろうとしていた？）Dorpat 自然科学者協会の年次報告（Sitzungsberichte）に Frobenius の上記の論文と重なる結果を発表した [Mol2, 1897]．これには，上記の多元環に関する自分の研究が本質的に使われている．（Frobenius の場合も自分自身の「多元環に関する研究」をもろに使っている.）Frobenius は [Fro3, 1897] の §4 において，Molien の多元環に関する論文 [Mol1, 1892] およびその理論を「群の線形表現」に応用した [Mol2] に言及して，ある重要な定理が Molien によってそこで独立に発見されていたと述べている．その後，Frobenius は Molien の論文 [Mol3, 1898] をプロシャ科学アカデミーの紀要に紹介しているが，さらに，優秀な若者と認めて就職の世話をしようとしたようであるが，それは成功しなかった.

その後，ソ連邦になったときに，Molien は（職のためにやむを得ず？）ソ連邦に残り，研究環境が劣悪なシベリヤに赴任させられたが，多くの教科書を書いたり教育を主として後半生を送った．彼の業績等を調べて報告したのが [平井 9] である.

2.2 射影表現（スピン表現）の創始

いよいよ，射影表現の登場であるが，それは「群の表現論」が 1896 年に始まってから，わずか 8 年後の 1904 年のことである.

1904 （有限群の一次元射影変換による表現: 実質はスピン表現）

[Sch1] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50.

師匠である Frobenius が群の「線形変換による表現」を創始したのに倣って，Schur は群の「1 次分数変換による表現」を創始した．前者は，群 G から $GL(n, K)$, $K = \boldsymbol{C}, \boldsymbol{R}$, への準同型，であり，後者は G から $PGL(n, K)$ への準同型である．もっとも，Schur は序文初頭において,

> Das Problem der Bestimmung aller endlichen Gruppen lineare Substitutionen bei gegebener Variabelnzahl n ($n > 1$) gehört zu den schwierigsten Problemen der Algebra und hat bis jetzt nur für die binären und ternären Substitutionsgruppen seine vollständige Lösung gefunden. Für den allgemeinen Fall ist nur bekannt, daß die Anzahl der in Betracht kommenden Typen von Gruppen eine

endliche ist; dagegen fehlt noch jede Übersicht über die charakteristischen Eigenschaften dieser Gruppen.

Die Umkehrung dieses Problems bildet in einem gewissen Sinne die Aufgabe: alle Gruppen von höchstens h ganzen oder gebrochenen linearen Substitutionen zu finden, die einer gegebenen endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung h ein- order mehrstufig isomorph sind, oder auch, wie man sagt, alle Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch lineare Substitutionen zu bestimmen.

と述べているので，問題意識としては，「$GL(n, \boldsymbol{C})$ に入っている有限部分群を決定したい」という発想である．従って，発想としては，「G を表現したい」というよりも，G の射影変換による表現 π（現代用語では，射影表現，または，スピン表現，という）に重点があるのではなくて，π によって写っていった先の「像 $\pi(G) \subset GL(n, \boldsymbol{C})$ を知る」ことに重点があった．

ここで，念のために，**射影表現の定義**（Schur によるのと同一）を与える．それは，G の各元 g に対し，1つの線形変換 $\pi(g)$ が対応して，

$$\pi(g)\pi(h) = r_{g,h}\pi(gh) \quad (g, h \in G,\ r_{g,h} \in \boldsymbol{C}^\times), \tag{2.1}$$

となっているものであり，$G \times G$ 上の関数 $r_{g,h}$ を π の**因子団**と呼ぶ．

他方，$G \times G$ 上の $\boldsymbol{C}^\times := \{z \in \boldsymbol{C};\ z \neq 0\}$ の値をとる関数で

$$r_{k,gh}\, r_{g,h} = r_{k,g} r_{kg,h} \quad (k, g, h \in G) \tag{2.2}$$

を G 上の $\boldsymbol{C}^\times$-値 2-cocycle と言う．2つの 2-cocycle の積はまた 2-cocycle で，2-cocycle 全体を 同値関係 $r_{g,h} \approx r'_{g,h} := r_{g,h} \cdot (\lambda_g \lambda_h / \lambda_{gh})$ で割った群を $H^2(G, \boldsymbol{C}^\times)$ と書き，G の Schur multiplier と呼ぶ．

論文 [Sch1] においては，有限群 G の射影表現に関する基礎理論が展開されている．まず，可換群 Z よる G の中心拡大 G' とは，

$$1 \to Z \to G' \xrightarrow{\Phi} G \to 1 \quad (\Phi : G' \to G \text{ は準同型写像}) \tag{2.3}$$

が完全（exact）系列になるようなものである．G' の中に G の切断 $G \ni g \to s(g) \in S \subset G'$ をとると，

$$s(g)s(h) = z_{g,h}\, s(gh) \quad (g, h \in G,\ \exists z_{g,h} \in Z), \tag{2.4}$$

を満たす．そこで，G' の線形表現 Π に対し，$\pi(g) := \Pi\big(s(g)\big)$ $(g \in G)$ とおくと，$g, h \in G$ に対し，

$$\pi(g)\pi(h) \;=\; \Pi\big(s(g)\big)\Pi\big(s(h)\big) = \Pi\big(s(g)s(h)\big)$$

$$= \Pi\big(z_{g,h}\, s(gh)\big) = \Pi\big(z_{g,h}\big)\Pi\big(s(gh)\big) = \Pi\big(z_{g,h}\big)\pi(gh),$$

となるので，Π が既約であれば，$z \in Z$ に対し，**Schur の補題**により，$\Pi(z) = \chi_Z(z)I$，ここに，I は恒等作用素，となる．$\chi_Z \in \widehat{Z}$ を Π の spin type と呼ぶ．従って，$\Pi(z_{g,h}) = r_{g,h}I$，$r_{g,h} = \chi_Z(z_{g,h}) \in \boldsymbol{C}^\times$，よって，

$$\pi(g)\pi(h) = r_{g,h}\,\pi(gh) \quad (g, h \in G), \tag{2.5}$$

となり，π は $G \cong G'/Z$ の射影表現である．

有限群 G の全ての射影表現 π が上の形で得られるような G の中心拡大 G' のうち，位数 $|G'|$ が最小のものを G の**表現群**という．G の射影表現とは，G の**多価表現**のことでもある．[Sch1] では，なかんずく，次が示されている．

(1) 任意の有限群 G に，表現群が（同値を除いて）有限個存在する．

(2) G の全ての表現群 G' にたいして，中心拡大 (2.3) の中心的部分群 Z は $H^2(G, \boldsymbol{C}^\times)$ に同型である．

注 2.1. 連結リー群 G の場合には，G の普遍被覆群が表現群に当たる．有限群 G の表現群のうちの 1 個をとり，$R(G)$ と書くことにする．リー群の場合に倣って，$R(G)$ を G の（一意的ではないが）'普遍被覆群' ということもある（以下の項目 **2.3**, **2.6** 参照）.

1907 （表現群の構成・個数，Schur multiplier，スピン指標）

[Sch2] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **132**(1907), 85–137.

ここでは，表現群の構成法，同型でない表現群の個数の評価，Schur multiplier の計算法，が与えられた．さらに，スピン指標（スピン表現の指標）が

$$SL(2,K),\ PSL(2,K),\ GL(2,K),\ PGL(2,K),\ \text{ただし，}\ K = GF[p^n],$$

に対して計算された．これにより，基本的には，これらの群に対してスピン表現の分類が完成した．

1911 （n 次対称群，n 次交代群のスピン表現の構成と，スピン指標の計算）

[Sch3] J. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **139** (1911), 155–255.

n-次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の表現群（$n = 2, 3$ では $\mathfrak{S}_n$ 自身，$n \geq 4, \neq 6$ では 2 個，$n = 6$ では 1 個）および n-次交代群 $\mathfrak{A}_n$ の表現群（1 個）を構成した．その線形表現を調べることにより，もとの群 $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ のスピン表現を調べた．その構成，指標の計算，が具体的に行われている．

スピン表現の構成では，$\mathfrak{S}_n$ のもっとも基本的なスピン表現 Δ_n を主表現 (Hauptdarstellung) という．Δ_n は天下り式に与えられているが，それをタ

ネにして一般のスピン既約表現を構成している．Δ_n を与える為には，以下の項目 **2.4** におけるパウリ行列3個組（1927）と同じものを使っている．

スピン指標の計算には，（今日）Schur 多項式と呼ばれているものなどが現れる．彼の結果は包括的であり，今日までその影響を及ぼしている．

注 2.2. J. Schur = Issai Schur の first name には，この様に，J. と Issai の二通りがある．事実としては，

(1) Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1902 年には，2編の論文があるが，著者名欄には，Von J. Schur, ついで，Von Dr. J. Schur となっている．Frobenius の紹介文には，いずれも，Hr. FROBENIUS legte eine Mittheilung des Hrn. Dr. J. SCHUR in Berlin vor: ··· とある．また，同誌の

1905 年には，やはり，2編の論文が掲載されているが，著者名欄には，Von Dr. J. Schur, ついで，Von Dr. Issai Schur, Privatdozent an der Universität zu Berlin, とある．はじめの論文（pp.77–91）の，12. Januar. での Frobenius の紹介文は，上と同じであり，2番目の論文（pp.406–432）の，23. März. の紹介文では，

Derselbe legt ferner eine Abhandlung des Privatdozenten an der hiesigen Universität Dr. Issai SCHUR vor: ··· （注：Derselbe=Frobenius）とある．

従って，この2つの間に，Privatdozent になり，first name を変えたことが分かる．

(2) Journal für die reine und angewante Mathematik (Crelle Journal) 誌では，**127**(1904) – **165**(1931) の間は，J. が保持されているが，**167**(1932) に至って，初めて Issai に変わっている．（これは反ユダヤの流れ (antisemitism) に関係があるのか？ 1933 年にはナチスが権力を掌握した．）

2.3 Lie 群および Lie 環のの場合

1913 （単純リー群の既約線形表現を最高ウェイトで決定，回転群のスピン表現の発見）

[Car1] É. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. France, **41**(1913), 53-96.

Cartan はこの論文で，$\boldsymbol{C}$ 上の半単純 Lie 環の，$\boldsymbol{C}$ 上の既約表現を全て分類した．ここには，単純 Lie 環の彼自身による分類も使って，既約表現がその highest weights で決定されること，highest weights の決まり方，などを示している．

当時には，まだ，単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対する Lie 群 G，その普遍被覆群（単連結なもの）$\widetilde{G}$，などの結果が不足していたので，分類した既約表現の中に，ス

ピン表現が含まれていることは，はっきりとは意識されていなかった．

例えば 3 次元回転群 $SO(3)$ の（実）Lie 環は $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$ で，対応する Lie 群は $SU(2)$, これが $SO(3)$ の普遍被覆群である．$SU(2)$ の 2 次元の自然表現 $SU(2) \ni u \mapsto u$ は，$SO(2)$ から見れば 2 価の表現であり，ここがスピン表現の名前の起こりである．これを Lie 環レベルで見てみると，$\mathfrak{so}(3)$ の複素化 $\mathfrak{so}(3, \boldsymbol{C})$ は $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ と同型であり，後者に対応する普遍被覆群は $SL(2, \boldsymbol{C})$ である．$SL(2, \boldsymbol{C})$ の 2 次元の自然表現 $SL(2, \boldsymbol{C}) \ni g \mapsto g$ に対応する Lie 環の表現は $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C}) \ni X \mapsto X$ であり，$\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ の基底（3 組の行列）を適当に取れば，それが本質的には後述の Pauli 行列 3 個組である．

論文 [Car1] には，残念ながら，具体的な行列表示は書かれなかったので，理論物理学者（例えば，Pauli や Dirac）が，この論文の結果を使うことはなく，彼らはあらためて Pauli 行列などを独立に再発見したのである．

解説． [CC] S.-S. Chern and C. Chevalley, É. Cartan and his mathematical work, Bull. Amer. Math. Soc., **58**(1952), 217-250.

2.4 量子力学でのスピン理論と量子力学の数学的基礎付け

1927 （パウリ行列 3 個組の発見とその応用）

[Pau2] W. Pauli, Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, Zeitschrift für Physik, **43**(1927), 601-623.

2×2 のエルミート型行列を

$$a = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

と置くと，これが Pauli 行列の 3 つ組である．交換関係は,

$$[a, b] = 2ic, \ \ [b, c] = 2ia, \ \ [c, a] = 2ib \quad (i = \sqrt{-1}), \tag{2.7}$$

である．3 つ組み $\{a, b, c\}$ は $\mathfrak{so}(3)$ の複素化と同型な $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ の基底を与える．交換関係式に虚数 $i = \sqrt{-1}$ が現れない，より数学的な言い方をすると，$A_j := i\sigma_j$ $(j = 1, 2, 3)$, とおけば，$\{A_1, A_2, A_3\}$ は $\mathfrak{su}(2)$ の $\boldsymbol{R}$ 上の基底を与えて，交換関係式は $[A_j, A_k] = 2A_l$，ここに $(j\ k\ l)$ は $(1\ 2\ 3)$ の巡回置換，である．

これらは，**2.3** 項で述べたように回転群 $SO(3)$ の普遍被覆群 $SU(2)$ の 2 価の表現（スピン表現）を与えるものである．

Pauli がこれに到達した理由は次である．「電子を質点として捉える」という考え方で，波動方程式を波動関数に適用する理論では，水素原子などの原子核の回りの 1 つの電子の安定軌道の個数が，観測値に比して理論値が 2 倍

になる現象（"duplexity" phenomena）が起こった．その矛盾を解決するために，Pauli は 4 番目の量子量（quantum number）を導入することとして，電子は $\pm\frac{1}{2}\hbar$ の角運動量（spin angular momentum）を持つ，としたのである．

これを数学的にいうと，『電子に対する波動方程式・波動関数は，空間の回転群 $SO(3)$ の変換を受けるのではなくて，その普遍被覆群 $SU(2)$ の変換を受けている』ということであり，『電子は 3 次元ユークリッド空間 E^3 に住んでいるのではなくて，複素 2 次元（実 4 次元）の空間 $\boldsymbol{C}^2$ に住んでいる』ことを意味する．この数学的すぎる説明は，物理学者にはなかなか理解できず，受け入れ難かったようである．例えば，私の同級生で物理学科に進んだ友人の話だと，授業では『電子はどの方向の回転軸か分からぬが，その回転軸の回りに回転しているのだ』という説明だった，とのこと．

以上のような，Pauli の波動方程式，波動関数，それらの 群 $SU(2)$ による変換，などについて，詳しく解説してあるのが，著書 [HiYa] の第４章である．

1928 （Quantum Theory of Electron）

[Dir2] P.M.A. Dirac, The quantum theory of electron, Proceedings of the Royal Society London A, **117**(1928), 610-624; and
Part II, ibid., **118**(1928), 351-361.

３個組のパウリ行列を４個組に拡大して，Lorentz 群のスピン表現を得て，相対論的（すなわち，Lorentz-不変な）波動方程式である Dirac 方程式，を作った．これによって，電子を記述すると，上記の duplexity phenomena が，何らの仮定無く解決できる．

さらに，Klein-Gordon 方程式は，Dirac 方程式２個の積に「因数分解」出来るなど，後者がより基本的であることが分かった．そして，量子力学のその後の大きな発展の基礎となったのである．少し詳しく述べるために，基礎となる Minkowski 空間 M^4 と Lorentz 群 $\mathcal{L}_4 = SO_0(3,1)$ とを準備しよう．

Minkowski 空間． まず，M^4 とは，時空を記述するための空間であり，ベクトル（縦ベクトルで書くが）

$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ${}^t(x_1, x_2, x_3) \in E^3$, $x_4 = ct \in \boldsymbol{R}$, $c =$ 光速, $t =$ 時間,

の全体からなり，内積

$$(2.8) \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_{3,1} := {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - {x_4}^2 = {}^t x\, J_{3,1} x\,, \quad J_{3,1} := \mathrm{diag}(1,1,1,-1),$$

が導入されている．群 $O(3,1)$ は $g \in GL(4, \boldsymbol{R})$ で内積を不変にする $\langle g\boldsymbol{x}, g\boldsymbol{x} \rangle_{3,1} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_{3,1}$ ($\boldsymbol{x} \in M^4$)，つまり ${}^t g J_{3,1} g = J_{3,1}$ を満たす元 g の全体である．それは４個の連結成分を持つが，単位元 $e = E_4$ の連結成分が，固有 Lorentz 群と呼ばれ，次の記号で表される：

$$\mathcal{L}_4 = SO_0(3,1) := \left\{ g = (g_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4} \in O(3,1)\ ;\ \det(g) = 1,\ g_{44} \geq 1 \right\}.$$

Dirac 方程式. Dirac の波動関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ は $V = \boldsymbol{C}^4$ に値をとる M^4 上の関数であり，列ベクトルで：$\psi(\boldsymbol{x}) = \big(\psi_j(\boldsymbol{x})\big)_{1\leqslant j\leqslant 4}$ と書く．Dirac は，電子に対する相対論的不変な波動方程式を次のように与えた:

$$(2.9)\qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

とおき，さらに 4×4 型行列 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ be 4×4 を

$$(2.10)\qquad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0_2 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0_2 \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq 3), \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} -i\sigma_4 & 0_2 \\ 0_2 & i\sigma_4 \end{pmatrix},$$

とする．ここに，0_2 は位数 2 の零行列．すると，電磁場が零の場合の Dirac 方程式は，電子の質量を m として，

$$(2.11)\qquad \big(D + \kappa\big)\psi = 0, \quad D := \sum_{1\leq j\leq 4} \gamma_j \partial_{x_j}, \;\; \partial_{x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j}, \;\; \kappa := \frac{mc}{\hbar}.$$

$g \in \mathcal{L}_4$ の波動関数への作用は，$T_g(\psi)(\boldsymbol{x}) := g\big(\psi(g^{-1}\boldsymbol{x})\big)$，である．Dirac 方程式は，Lorentz-不変，すなわち，$\mathcal{L}_4$-不変である：

$$T_g^{-1}\big(D + \kappa\big)\big(T_g\psi\big) = \big(D + \kappa\big)\psi \quad (g \in \mathcal{L}_4).$$

さらに，Klein-Gordon 方程式は，次のように分解される：

$$(\Box - \kappa^2)\psi = (D - \kappa)(D + \kappa)\psi = 0, \qquad \Box := \sum_{1\leq j\leq 3} \partial_{x_j}^{\,2} - \partial_{x_4}^{\,2}.$$

この方面のより詳しい解説には，[HiYa] の第 5 章や [HHoH] を参照のこと．

1928 （von Neumann の定式化 (1927) による量子力学)

[Weyl] H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1st edition, 1928 (2nd edition, 1931), Hirzel, Leipzig; English Translation of 2nd edition by H.P. Robertson, Dutton, New York, 1932.

von Neumann の，「量子力学の数学的な基礎付け」では，粒子の状態を記述するのは，あるヒルベルト空間の，ベクトルというよりもそれが決める直線 (Strahlenkörper) である．従って，状態の変換は，変換群の **Strahldarstellung = ray representation**（実質は射影表現）によって記述される．

2.5 A.H. Cliffordの仕事 再発見

1937（有限群 H の既約表現を正規部分群 N に制限したときの状況）

[Clif] A.H. Clifford, Representations induced in an invariant subgroup, Ann. Math., **38**(1937), 533-550.

Clifford が Princeton 高等研究所で H. Weyl の助手をしていた時代に研究した論文であり，有限群 H の既約表現を，その正規部分群 N に制限したときに現れる N の表現全体の構造を調べた．とくに，そこに必然的に N のある部分群の射影表現が現れる場合があることを示した．

この論文の §§3–4 の結果を，私なりにまとめて定理の形にしたのが，下の定理である．

この結果を用いれば，H が N と，ある部分群 S，との半直積である（すなわち，$H \cong N \rtimes S$ の）場合，H の全ての既約線形表現を構成する方法が導かれる．そこには必然的に N の射影表現が現れる．

この点は Mackey の誘導表現の場合と異なる．彼の場合は，N を可換群，と仮定しているので，射影表現は現れない．一般に，半直積型有限群に対して，Mackey の方法だけでは一般に「全ての既約線形表現を得ることは出来ない」

Theorem (cf. §§3–4 in [Clif]). *Let N be a normal subgroup of a finite group H. For an irreducible representation τ of H, assume that all irreducible component of $\tau|_N$ are mutually equivalent, or $\tau|_N \cong [\ell]\cdot\rho$, a multiple of an IR ρ of N, and that the ground-field P is algebraically closed.*

(i) *The IR τ is equivalent to the tensor product of two matrix irreducible projective representations C and Γ of H:*

$$\tau(h) \cong C(h) \otimes \Gamma(h), \tag{2.12}$$

where $\dim C = \dim \rho$, $\rho(h^{-1}uh) = C(h)^{-1}\rho(u)C(h)$ $(h \in H, u \in N)$, $\dim \Gamma = \ell$.

(ii) *It can be normalized in such a way that, for $h \in H$ and $u \in N$,*

$$C(hu) = C(h)\rho(u),\ C(u) = \rho(u); \quad \Gamma(hu) = \Gamma(h),\ \Gamma(u) = E_\ell.$$

Then $h \mapsto \Gamma(h)$ is actually a projective representation of H/N, and the factor sets associated to C and Γ, mutually inverse to the other, are actually for the quotient group H/N.

この Clifford の古典的結果は，現在の我々の仕事 [HHo2] につながっている（**2.9** 節, **2013** の項目参照）.

2.6 数学における発展と量子力学

1939 （古典型リー群のすべての既約表現の構成とその指標の計算）

[Wey2] H. Weyl, *Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1939.

古典型リー群は，複素のものの分類は，$SL(n,\boldsymbol{C})$ $(n \geq 2)$, $SO(2n+1,\boldsymbol{C})$ $(n \geq 2)$, $Sp(2n,\boldsymbol{C})$ $(n \geq 3)$, $SO(2n,\boldsymbol{C})$ $(n \geq 4)$，であるが，その compact form は，

$$SU(n),\quad SO(2n+1),\quad USp(2n) = SU(2n) \cap Sp(2n,\boldsymbol{C}),\quad SO(2n), \tag{2.13}$$

である．Weyl の unitarian trick によって，後者のユニタリ既約表現は，1-1 に前者の複素解析的既約表現と対応する．これらのすべての既約表現を構成して，その指標も与えた．

そこには，線形（1価）のものとスピン（=射影，=多価）のものとが，共通の指標公式，次元公式などを持って，統一的に存在している．

1947 （3次元ローレンツ群 $\mathcal{L}_3$ の2重被覆群 $SL(2,\boldsymbol{R})$ の既約表現と指標）

[Bar] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. Math., **48**(1947), 568-640.

空間部分が2次元の 3次元ローレンツ群 $\mathcal{L}_3 = SO_0(2,1)$ の2重被覆群が $SL(2,\boldsymbol{R})$ で実現出来る．その既約表現を構成，指標も与えた．これには，下の群（base group）$\mathcal{L}_3$ から見て，線形（1価）のものも，射影（=多価，ここでは 2価）のものも含まれている．$\mathcal{L}_3$ の普遍被覆群は無限重の被覆群であり，そこまで上がると，状況はかなり変わってしまう．

1947 （4次元ローレンツ群 $\mathcal{L}_4$ の普遍被覆群 $SL(2,\boldsymbol{C})$ の既約表現と指標）

[GeNa] I.M. Gelfand and M.I. Naimark, Unitary representations of Lorentz group (in Russian), Izvestia Akad. Nauk SSSR, **11**(1947), 411-504.

4次元ローレンツ群 $\mathcal{L}_4$ の普遍被覆群 $SL(2,\boldsymbol{C})$ は2重被覆である．その既約表現を構成，指標も与えた．

そこには，下の群（base group）$\mathcal{L}_4 = SO_0(3,1)$ から見て，線形（1価）のものとスピン（=射影，=2価）のものとが，統一的に存在している．

1947 （4次元ローレンツ群の既約表現の infinitesimal な構成）

[HC] Harish-Chandra, Infinite irreducible representations of the Lorentz group, Proceedings of the Royal Society London A, **189**(1947), 327-401.

植民地時代のインドでは，優秀な現地人は見込まれれば，宗主国イギリスによんで貰って，そこで修行出来たが，Harish-Chandra が Dirac の指導を London で受けられたのも，そうしたお蔭なのだろうか？

ともかく，この仕事は「Dirac の示唆に依る」ことが，Introduction で感謝とともに記されている．ここで，infinitesimal な，と言っているのは，4次元ローレンツ群の既約表現の構成を，リー環レベルで議論している，という意味である．こうした手法のことを，infinitesimal method と言っている．

リー環レベルの議論なので，（群上の関数である）既約指標の話は出てこない．

2.7 (半世紀の休眠を経て) 有限群に対するスピン表現の理論の再生

半単純 Lie 群では，有限次元表現の場合，線形表現とスピン表現（多価表現）は，その highest weight の性格に差があるだけである．例えば $SO(3)$ の場合には，前者の highest weights は非負整数だが，後者のそれは正の半整数である．指標公式や次元公式は，共通の形をしており差は無い．そして，E. Cartan，J. Schur, H. Weyl 等の有限次元表現の時代を経て，Lorentz 群の無限次元の表現も，被覆群（$SL(2, \boldsymbol{R})$, $SL(2, \boldsymbol{C})$ など）を考えることにより，自然にスピン表現も統一的に取り込んできた．

それに反して，有限群については，スピン表現は線形表現と大きな差がある場合が多い．このことも関係するのか，あるいは，Schur のスピン表現三部作 [Sch1]～[Sch3] が余りに網羅的，かつ，徹底的にやってしまったからか，その後が続かなかった．

1962 (Beginning of recapturing of Schur's theory)

[Mor1] A.O. Morris, The spin representation of the symmetric group, Proc. London Math. Soc., **(3) 12**(1962), 55–76.

Schur の三部作以来，半世紀のブランクを経て，有限群のスピン表現の研究が再開された．その最初の論文が上記であるが，内容は，Schur の仕事を見直すところから始めている．

このあと，徐々に，Morris の弟子達も育って，この方面の研究も花盛りになった．

1965 (Schur multiplier $H^2(G, \boldsymbol{C}^\times)$ の決定)

[IhYo] S. Ihara and T. Yokonuma, On the second cohomology groups (Shur multipliers) of finite reflexion groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. 1, **IX**(1965), 155-171.

より代数的な群論の見地からは，SChur multiplier $H^2(G, \boldsymbol{C}^\times)$ の決定は，ある時期，集中的に研究されたテーマであった．解説によると，有限単純群の分類に関係する部分もあったようである．

それらの結果を使って，スピン表現・スピン指標の研究に進のには，かなりの時間差があった．

1973 [Mor2] A.O. Morris, Projective representations of abelian groups, J. London Math. Soc., **(2)** **7**(1973), 235-238.

1976 [Rea1] E.W. Read, On the Schur multipliers of the finite imprimitive unitary reflexion groups $G(m,p,n)$, J. London Math. Soc., **(2)**, **13**(1976), 150-154.

2.8 群のヴェイユ表現

1964 (局所コンパクト可換群上の Symplectic 群のヴェイユ表現)
[Weil] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math., **111**(1964), 143-211.

この仕事の動機としては，Weil は，多分，アデール群上の代数群などの研究を，目標としてイメージしていた思われる．ここでは，より一般的に，局所コンパクト可換群上の Heisenberg 群の既約表現を使って，その intertwining operators が与える，Symplectic group のスピン表現を調べている．

実数体上では，$Sp(2n,\boldsymbol{R})$ であり，2重の被覆群を Metaplectic group と言い，$Mp(2n,\boldsymbol{R})$ と書く．実は，Weil 表現は base group $Sp(2n,\boldsymbol{R})$ の2価の表現で，$Mp(2n,\boldsymbol{R})$ まで上がれば，線形になる．

1972 [Sait] M. Saito, Représentations unitaires des groupes symplectiques, J. Math. Soc. Japan, **24**(1972), 232-251.

群 $Sp(2n,\boldsymbol{R})$ の極大コンパクト部分群は $U(n)$ と同型であり，その普遍被覆群は無限重の被覆である．そして，$Sp(2n,\boldsymbol{R})$ は，任意の k に対し，k-重の被覆群を持つ．Weil 表現は $Sp(2n,\boldsymbol{R})$ の2価の表現で，$Mp(2n,\boldsymbol{R})$ の線形表現である．これを使って，既約表現の各種の系列を作っている．

$$\begin{array}{ll} \widetilde{Sp}(2n,\boldsymbol{R}) & \text{普遍被覆群} \\ \downarrow & \\ Mp(2n,\boldsymbol{R}) & \text{2 重被覆群} \\ \downarrow & \\ Sp(2n,\boldsymbol{R}) & \text{base group} \end{array}$$

1979 [Yos1] H. Yoshida, Weil's representations of the symplectic groups over finite fields, J. Math. Soc. Japan, **31**(1979), 399-426.

有限体 K 上の $Sp(2n,K)$ の Weil 表現は，$Mp(2n,K)$ の線形表現である．

1992 [Yos2] H. Yoshida, Remarks on metaplectic representations of $SL(2)$, J. Math. Soc. Japan, **44**(1992), 351-373.

2.9 現在の研究

現在のスピン表現の研究については，多岐にわたり，その展望を語るには，力不足なので，ここでは，自分が直接関わっているものをリストアップするにとどめる．

位数 m の巡回群を $\mathfrak{Z}_m$ と書く（multiplicative group と解する）．直積群 $D(m,n) := \boldsymbol{Z}_m^n$ に，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を直積成分の置換として働かせる．すると，半直積群 $\mathfrak{S}_n(\boldsymbol{Z}) := D(m,n) \rtimes \mathfrak{S}_n$ は，いわゆる generalized symmetric group の実現であり，記号で $G(m,1,n)$ と書かれる．

また，複素鏡映群 $G(m,p,n)$, $p|m$, は，$G(m,1,n)$ の正規部分群で，次で与えられる．$D(m,n)$ の元を $d=(t_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$, $t_j \in \boldsymbol{Z}_m$, と書き，$P(d) := t_1t_2\cdots t_n$ とおく．また，$\boldsymbol{Z}_m$ の部分群を $S(p) := \{t^p\,;\, t\in \boldsymbol{Z}_m\} \cong \boldsymbol{Z}_{m/p}$ とおくと，

$$G(m,p,n) := \big\{g=(d,\sigma)\in G(m,1,n)\,;\, d=(t_j),\ P(d)\in S(p)\big\}. \tag{2.14}$$

2009 [HHH2] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Towards projective representations and spin characters of finite and infinite complex reflection groups, *Proceedings of the fourth German-Japanese Symposium, Infinite Dimensional Harmonic Analysis, IV*, World Scientific, 2009, pp.112-128.

複素鏡映群 $G(m,p,n)$ のスピン表現の研究を開始した．

（1）基礎的な一般論を与えた．そこには，[Rea1] における Schur multiplier の結果をもろに使う．

（2）さらに，generalized symplectic group $G(m,1,n)$ が，$G(m,p,n)$, $p|m$ たちの mother group というべき立場にあることを示した．ここには，$G(m,1,p)$ の Schur mulltiplier の結果 [IhYo] を使う．

2012 [HHH3] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Projective representations and spin characters of complex reflection groups $G(m,p,n)$ and $G(m,p,\infty)$, I and II, to appear.

論文 [I] では，

（1）$G(m,p,n)$, $p|m$ の１つの普遍被覆群 $R\big(G(m,p,n)\big)$ を生成元系と基本関係式系を与えることによって決定した．それを用いて，$G(m,p,n)$ に対する結果を与えるのに，mother group $G(m,1,n)$ に対する結果が，どのように決定的か，を証明した．

（2）さらに，$G(m,1,n)$ の non-spin 既約表現と，ある特定の spin type のスピン既約表現との間の緊密な関係を与えた．m が偶数の場合でいうと，Schur multiplier $Z := H^2\big(G(m,1,n), \boldsymbol{C}^\times\big)$ は，位数 2 の生成元 z_1,z_2,z_3 で生成されるので，$\chi_Z \in \widehat{Z}$ は，$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\beta_j = \chi_Z(z_j)$, で決まる．

spin type が $(1,\ 1,-1)$, の spin 既約表現と，non-spin の場合の既約指標とが，ほぼ 1:2（まれに 1:1）に対応することを具体的に示した．

論文 [II] では，spin type $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,\ 1)$ の２つの型の場合に両者を並行的に研究した．２つの型の間のスピン既約指標の対応が興味深い．

[HHo1] T. Hirai and A. Hora, Spin representations of twisted central products of double covering finite groups and the case of permutation groups, to appear.

残された spin type は４個 $(-1,\ 1,\pm 1)$, $(1,-1,\pm 1)$ あるが，それらの場合のスピン表現を構成し，スピン指標を計算する為の基礎になる定理（twisted central products に関する定理）を証明した．

2013 [HHo2] T. Hirai and A. Hora, Method of constructing all irreducible representations of semidirect product of a compact group with a finite group and application to generalized symmetric groups, in preparation.

以上の理論の背景にある基礎的な理論の研究である．

半直積群 $G = U \rtimes S$, U コンパクト群，S 有限群，を考える．この群の既約表現の完全系，すなわち，G の dual $\widehat{G}$ の完全代表系がとれる既約表現の集合，を構成する方法を与える．

U の既約表現 ρ をとり，その同値類 $[\rho] \in \widehat{U}$ の S における固定化群 $S([\rho])$ をとる．$s \in S([\rho])$ に対する intertwining operator $J_\rho(s)$ を

$$J_\rho\big(s(u)\big) = J_\rho(s)\,\rho(u)\,J_\rho(s)^{-1} \quad (u \in U)$$

で定義すると，$s \to J_\rho(s)$ は一般には，$S([\rho])$ の射影表現（スピン表現）になる．$S([\rho])$ の適当な被覆群 $S([\rho])'$ に持ち上げるとこれは線形表現 J'_ρ になる． $S([\rho])'$ の既約表現 π^1 で，$S([\rho])$ から見ての factor set が J_ρ の factor set の逆になっているものをとる．$\pi^0 := \rho \cdot J'_\rho$ は $U \rtimes S([\rho])'$ の既約表現だが，π^1 とのテンソル積 $\pi^0 \boxdot \pi^1$ をとると，２つの factor sets がキャンセルし合って，base group $U \rtimes S([\rho])$ の線形表現になる．それを G まで誘導した表現を $\Pi(\pi^0, \pi^1)$ と書く．

この $\Pi(\pi^0, \pi^1)$ の集合が完全系をなすことを証明する．

群のスピン表現(射影表現)の歴史概観　文献

●● 日 本 語 文 献：

[平井1] 対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事，第 13 回数学史シンポジュウム，津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**24**(2003), pp.53–58.

[平井2] Schur の学位論文および対称群の表現，ibid., **25**(2004), pp.123–131.

[平井3] Frobenius による「群の指標と表現」の研究，ibid., **26**(2005), pp.222–240.

[平井4]　　同上　　（その２），ibid., **27**(2006), pp.168–182.

[平井5]　　同上　　（その３），ibid., **28**(2007), pp.290–318.

[平井6]　　同上　　（その４），ibid., **29**(2008), pp.168–182.

[平井7] Schur の表現論の仕事（射影表現３部作）
その I，ibid., **30**(2009), pp.104–132.

[平井8]　　同上　　その II，ibid., **31**(2010), pp.74–82.

[平井9] 群の表現論草創期における T. Molien の仕事と Frobenius,
ibid., **32**(2011), pp.49–67

[平井10] (Benjamin) Olinde Rodrigues (1795-1851) の業績について ― とくに「空間の運動の記述」に関して ―， ibid., **33**(2012), pp.59–79.

[平井11] 数学者から数学者へ/フロベニウス，『数学セミナー』2009, 1 月号, pp.6–7.

[平井12] 数学者から数学者へ/シューア，『数学セミナー』2009, 2 月号, pp.6–7.

[平井13] 群の作用と群の表現，『数学セミナー』2012, 9 月号, pp.18–22.

References

[Alt] S.L. Altmann, " Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal", *What went wrong with one of the major mathematical discoveries of the nineteenth century,* Mathematics Magazine, **62**(1989), 291-308.

[AlOr] S. Altmann and E. Ortiz edit., *The Rehabilitation of Olinde Rodrigues, Mathematics and Social Utopias in France: Olinde Rodrigues and His Times*, American Mathematical Society (Providence, RI) and London Mathematical Society, 2005, 168 pages. Contributors: Simon Altmann, Richard Askey, Paola Ferruta, Ivor Grattan-Guinness, Jeremy Gray, Eduardo L. Ortiz, Barrie M. Ratcliffe, David Siminovitch, and Ulrich Tamm.

[Bar] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. Math., **48**(1947), 568-640.

[Bur1] W. Burnside, On the continuous group that is defined by any given group of finite order, I, Proc. London Math. Soc., Vol.**XXIX**(1898), 207-224.

[Bur2] W. Burnside, On the continuous group that is defined by any given group of finite order, II, Proc. London Math. Soc., Vol.**XXIX**(1898), 546-565.

[Car1] É. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. France, **41**(1913), 53-96.

[Car2] É. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs* I, 1938, Hermann, Paris.

[CC] S.-S. Chern and C. Chevalley, Élie Cartan and his mathematical work, Bull. Amer. Math. Soc., **58**(1952), 217-250.

[Clif] A.H. Clifford, Representations induced in an invariant subgroup, Ann. Math., **38**(1937), 533-550.

[DaMo] J.W. Davies and A.O. Morris, The Schur multiplier of the generalized symmetric group, J. London Math. Soc., **(2) 8**(1974), 615-620.

[Dir1] P.M.A. Dirac, On the theory of quantum mechanics, Proceedings of the Royal Society London A, **112**(1926), 661-677.

[Dir2] P.M.A. Dirac, The quantum theory of electron, ibid, **117**(1928), 610-624; and Part II, ibid., **118**(1928), 351-361.

[Fro1] F. Frobenius, Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

[Fro2] F. Frobenius, Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, ibid., 1343–1382(1896).

[Fro3] Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, ibid., 944–1015(1897).

[Fruc] R. Frucht, Zur Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen, Math. Z., **63**(1955), 145-155.

[GeNa] I.M. Gelfand and M.I. Naimark, Unitary representations of Lorentz group (in Russian), Izvestia Akad. Nauk SSSR, **11**(1947), 411-504 [English Translation in Collected Works, Vol. 2, pp.41–123].

[Ham] W.R. Hamilton, On a new species of imaginary quantities connected with the theory of quaternions, Proc. Roy. Irish Acad., **2**(1843), 424-434.

[HC] Harish-Chandra, Infinite irreducible representations of the Lorentz group, Proceedings of the Royal Society London A, **189**(1947), 327-401.

[HHH3] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Projective representations and spin characters of complex reflection groups $G(m,p,n)$ and $G(m,p,\infty)$, I and II, to appear.

[HHoH] T. Hirai, A. Hora and E. Hirai, Introductory expositions on projective representations of groups, to appear.

[HHo1] T. Hirai and A. Hora, Spin representations of twisted central products of double covering finite groups and the case of permutation groups, to appear.

[HHo2] T. Hirai and A. Hora, Method of constructing all irreducible representations of semidirect product of a compact group with a finite group and application to generalized symmetric groups, in preparation.

[HiYa] 平井 武, 山下 博 共著, 表現論入門セミナー — 具体例から最先端にむかって —, 第2版, 遊星社, 2007.

[IhYo] S. Ihara and T. Yokonuma, On the second cohomology groups (Shur multipliers) of finite reflexion groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. 1, **IX**(1965), 155-171.

[Kar] G. Karpilovski, *The Schur multiplier*, London Math. Soc. Monographs, New Series, vol.**2**, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1987.

[Mac1] G.W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I, Ann. Math., **55**(1952), 101-139.

[Mac2] G.W. Mackey, Unitary representations of group extensions, I, Acta Math., **99**(1958), 265-311.

[Mol1] T. Molien, Ueber Systeme höherer complexer Zahlen, Math. Ann., **41**(1892), 83–156.

[Mol2] T. Molien, Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionensgruppe, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft, **11**(1897), 259-274.

[Mol2] T. Molien, Über die invarianten der linearen Substitutionsgruppe, 1897 Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, **52**(1898), 1152–1156.

[Mor1] A.O. Morris, The spin representation of the symmetric group, Proc. London Math. Soc., **(3) 12**(1962), 55–76.

[Mor2] A.O. Morris, Projective representations of abelian groups, J. London Math. Soc., **(2) 7**(1973), 235-238.

[Pau1] W. Pauli, Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren, Zeitschrift für Physik, **31**(1925), 765-783.

[Pau2] W. Pauli, Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, ibid., **43**(1927), 601-623.

[Rea1] E.W. Read, On the Schur multipliers of the finite imprimitive unitary reflexion groups $G(m,p,n)$, J. London Math. Soc., **(2)**, **13**(1976), 150-154.

[Rod] (Benjamin) Olinde Rodrigues, Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire, J. de Math. Pures et Appliquées, **5**(1840), 380-440.

[Sait] M. Saito, Représentations unitaires des groupes symplectiques, J. Math. Soc. Japan, **24**(1972), 232-251.

[Sch01] I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

[Sch02] I. Schur, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 406–432.

[Sch1] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50.

[Sch2] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **132**(1907), 85–137.

[Sch3] J. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **139**(1911), 155–255.

[Waer] B.L. van der Waerden, Spinoranalyse, Nachrichten von der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, **1929**, 100-109.
http://gdz.sub.uni-goettingen.de/search-entry.shtml

[Weil] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math., **111**(1964), 143-211.

[Wey1] H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1st edition 1928, 2nd edition 1931, Hirzel, Leipzig; English Translation of 2nd edition by H.P. Robertson, Dutton, New York, 1932.

[Wey2] H. Weyl, *Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1939.

[Wig] E. Wigner, On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, Ann. Math., **40**(1939), 149-204.

[Yos1] H. Yoshida, Weil's representations of the symplectic groups over finite fields, J. Math. Soc. Japan, **31**(1979), 399-426.

[Yos2] H. Yoshida, Remarks on metaplectic representations of $SL(2)$, J. Math. Soc. Japan, **44**(1992), 351-373.