座標の歴史

足立恒雄

1　座標の先行的概念

1.1　長安と平城京・平安京

座標の考え方はとても古い。たとえば西暦 710 年に作られた平城京は大通りが碁の盤面のような形をして並んでいる。y 軸に当たるのが、朱雀大路で、東へ東一坊大路、東二坊大路、・・・、また西へ西一坊大路、西二坊大路、・・・となっている。平城宮から南へは二条大路、三条大路、・・・が並んでいるので、たとえば、唐招提寺は四条西二坊にあると指示することができる。数学の座標系で言えば、第三象限と第四象限が使われていることになるだろう。天子は南面することになっているので、天子のいる宮殿は北の中央に位置し、南へ向かって一条、二条と付けられていく。つまり平城京、平安京はいずれも第三象限と第四象限が使われているのである（現在、京都御所のある位置は本来の天皇の住む場所ではない。大内裏は平城京の平城宮同様一条と二条の間に位置したのだった)。

平城京は唐の長安を模して作られたというが、街区の表示については大きく異なる。長安は一つ一つの区画に、「大安」とか「平康」といった名称があてがわれていて、しかもその名称が整然と規則立って付けられているとはとても言えないので、座標系というには程遠い。数学の立場から言えば、平城京の方が断然近代的だと言えるだろう。なお、碁盤は目（交点）が使われるのに対して、長安は、区画（コマ）を使うのだから、「将棋盤」に似ていると言えよう。

近代的といえば、札幌市の中央部は「大通り」を x 軸とし、「創成川通り」を y 軸として、南三条西四丁目というようになっている。つまり「条」をいにしえにならって x 軸に平行に、「丁目」を y 軸と平行に採っているので、全象限が使われている。これは新しく作られた大都市の特徴であろう。ただし、札幌の場合長安や平城京、平安京のように正確に東西南北を大路が走っているわけではない。また、「大通り」や「創成川通り」を整然と座標軸として扱っているわけでもない。つまり $(0,3)$ の地点を表すのに「創成川通り北三丁目」、$(3,0)$ の地点を「大通り東三丁目」と呼ぶなどとしているほど数学的ではない。

なお、ヨーロッパの都市は、座標系という観点からは、長安や奈良・京都と大きく違う。たとえばパリはエトワール広場を中心にして十二本の放射状道路が走っている。またアメ

リカの首都ワシントン市は放射状に延びた街路と広い環状道路が交差するように設計された都市である。後からだが、ワシントン記念塔がその中心部に建てられた。数学的に言えば、欧米の都市は「極座標」に近い考え方が使われているということになる（ただし偏角が使われているわけではない）。中心に向かって道路が集まるというのも一つの自然な考え方であろう。

1.2 碁と将棋とチェスと

新聞で解説するとき将棋は第四象限を使っているが、一方、囲碁は第三象限を使っている。しかし囲碁もある時期は将棋と同じく第四象限を使っていた。何のために、まただれがこれを変更したのかはわからない。棋譜は下手（黒石側）から見て記されるという習慣をまず記憶していていただきたい。白石を持つ方が上手（うわて）であって、下手（したて）はまず第一着を右上隅に打ち、上手は左上隅に第二着を下すのが、古来礼儀とされてきた。今は必ずしも守られていないが、それでも第一着を、相手の懐をめがけて打つように、左上隅に打つ人は、コンピュータならいざ知らず、ほとんど見かけない。一応の礼儀は守られているということだろう。この伝統から行くと、上手側に 1 や一から始まる隅が来るように番号を付けることに変更したのではないかと思われるが、どうだろうか？

さて囲碁や将棋で、こうした 5 四、7 九（数学ではそれぞれ $(5,4)$, $(7,9)$ と記す）といった座標方式が使われるようになったのはいつのころからだろうか。つまり、数学で座標が使われるようになったのと碁将棋で座標が使われるようになったのとどちらが早いのか、を考証してみたい。

私は当初、江戸時代には囲碁の方が格が上と見られ、碁所の制度は将棋所に先じて制度化されたようだから、きっと座標を採り入れたのも囲碁の方が先に違いないと思っていたのだが、それは見込み違いだった。囲碁の場合、明治時代でも黒石、白石の印に、打った順番に数字が書き込まれていて、縦横の軸には数字は振られていないのである（現在は座標を使うのと打った順に棋譜に数字を記すのとが併用されている）。

一方、将棋の方だが、元禄 16 年（1703 年）に出版された大橋宗桂『象戯力草』は現在と同じように（ただし縦横とも漢数字だが）第三象限が使われている。それ以前は各マスに「いろは」文字、足りない分は漢字が宛てられている。長安方式よりは整然としているが、座標を使っているとまではいかない。

さて西洋将棋とも呼ばれるチェスの方はどうだろうか？ チェスの棋譜は現在は代数式と呼ばれる方式が公認となっている。これは座標を使う方式である。各マスはたとえば c4 のように記される。チェスの棋譜は第一象限を使っている。代数式の前は記述式が主

流だった。これはマス目に駒の初期配置の略称をあてる方式である。つまり長安方式に近い。それだけではなく、先手側と後手側とでは別々に棋譜を使うという、とても複雑なもので、これは座標という考え方からはずいぶんと外れた方式だと言わざるを得ない。

代数式が普及したのは二十世紀になってからのようだから、これは数学的な座標系の考え方を応用したものではないか、と予想してチェスの棋譜について調べてみた。するとまったく当てが外れた。

代数式（英語では algebraic notation）は 18 世紀に活躍したフィリップ・スタンマ（1705？－ 1755）というシリア生まれのチェスの達人の書いた『高貴なるチェス』（西暦 1737 年フランスで刊行、1745 年英訳）に初めて使用されたものだそうである（さすがにチェスは進んでいてチェスの棋譜の歴史を論じた本もあるらしいが、私はそこまでは調べていない)。スタンマが有名な対戦で敗北したために相手の使っていた記述法が流行するようになって行ったのだということである。

しかしながら、将棋の方はすで 1703 年に座標が使われていたのだから、西洋よりは早く座標の考え方を採用したゲームであるということになる。

これが本講演をする直前までに私が得た結論だったのだが、またまたこれを覆さねばならなくなった。世界最古の棋書とされるのは北宋の徽宗皇帝時代（12 世紀初め）に出版された『忘憂清楽集』である。これが 1983 年に講談社から現代訳を付けて出版されていることを知って、購入してみた。この本の中に「碁盤路図」という節があって、棋譜について解説されている。その箇所の和訳を引用する。

> 碁盤には三百六十一路がある。これを平（ひょう）・上（じょう）・去・入の四字に区分し、一字が一隅、つまり九十路を示す。碁盤は左側を尊んで平とし、隅の角を一とし、順に十まで、逆の方は九までとする。たとえば、六三といえば、先に順に六を数えて後に逆に三を数える。

「順に」というのは左下隅を「平一一」とし、上に向かって進み、「平十一」で終わる。「逆に」というのは右に進むことである。左上の「上」の場合は左上隅を「上一一」とするのである。

これは紛れもなく座標である。現代数学の座標との違いは、中央を基点に採らないことと、0 を使わないこと位だろう。

結局、平面の点を座標軸に刻んだ数値の組によって表す方式は碁において宋の時代に使われたのが最初というのが現段階での結論である。この優れた方法が流布しなかった理由はわからない。

2　解析幾何の歴史

2.1　現代の解析幾何学

まず復習の意味もあって、現代の教科書から始める。私が手にしているのは A.C. Berdette という人の書いた

An Introduction to Analytic Geometry and Calculus, Academic Press (1968)

という本である。この本を題材にするのには何の理由もない。単に図書館で見つけた最初の本だというだけのことである。解析幾何学は、微積分学と並んで、数学の基礎として完全に整備されている分野だからおそらくどれを採っても同じことだろう。

最初に向きの付いた直線の説明があり、続いてデカルト座標系 (Cartesian Coordinates) の説明が来る。これは向き付けられた二本の直線 $X'X$ と $Y'Y$ が直交しているものである。二直線の交点は原点 (origin) と呼ばれ、O と記される。そしてこの O を 0 として二つの直線上の点には正負の実数と対応が付けられているものとする。そして通常は向きは $X'X$ は右向き、$Y'Y$ は上向きに向きが付けられているものとする。水平の直線 $X'X$ を x 軸 (x-axis)、$Y'Y$ を y 軸 (y-axis) と呼ぶ。

P を座標軸が成す平面上の点とし、P から x 軸、y 軸へ垂線をおろし、軸との交点を M, N とする。向き付けられた線分 OM を測って、それを点 P の x 座標 (x-coordinate)、あるいは abscissa と言う。同様に向き付けられた線分 ON を測って、それを点 P の y 座標 (y-coordinate)、あるいは ordinate と言う。OM、ON の向き付けられた長さを x_1、y_1 とする。ここで「線分 AB と言うが、実は AB の長さ (measure) のことを意味することにすることが多いが混同が起きることはないだろう」という脚注が付いている。点 P の位置を (x_1, y_1) という記法で表し、この数のペアを P の座標 (coordinates) と言うと説明されている。

次に明治時代の日本でも教科書として使われたという E. Loomis の

Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus (1851)

を覗いて見よう。最初は平面図形の辺に数値を当てて比例関係や三平方の定理を使う例が挙げられている。次いで作図と代数との関係が述べられていて、第三節に至って初めて座標系が出てくる。点の位置を表す方法としてまず極座標を説明し、続いて斜交座標の説明が来る。その後は原文を訳してみよう。

しかしながら、一般には互いに交わる定まった二直線からの距離によって点の位置を表示するのが最も便利である。点 A で交わる二直線 AX、AY を考える。P を同一平面内の任意の点として、AY に平行な直線 PB と AX に平行な直線 PC を引くと、点 P の位置は二つの距離 PB と PC を使って表示される。

直線 AX と AY を軸（axis）と言い、A を原点（origin）と言う。距離 AB（これは CP と等しい）は、点 P の abscissa と呼ばれ、BP（これは AC と等しい）は P の ordinate と呼ばれる。軸 AX は axis of abscissas、軸 AY は axis of ordinates と呼ばれる。座標系（the axes）は YAX が非直角であるか直角であるかに従って斜交的 (oblique) あるいは直交的 (rectangular) と呼ばれる。直交座標系が最も単純で、本書では主としてこれを使う。

abscissa は一般に文字 x で表され、ordinate は文字 y で表される。故に abscissas の軸はしばしば X の軸（axis of X)、そして ordinate の軸は Y の軸（axis of Y）と呼ばれる。

現代との違いを指摘しよう。

1. 原点は O ではなく A が使われている。
2. x 座標、y 座標という言葉はまだ使われていない。
3. 第 1 象限だけである。
4. 点を表す (x,y) という記号法が使われていない。

(1) について。後述のように後世に大きな影響を与えたオイラーの『無限解析入門』(1748 年）でも A が使われているので、これが標準だったらしいことがわかる。

O になったのは、いつだれが始めたのかは、私は寡聞にして知らない。アルファベットの A には最初という意味があるだろうから当初はこれが使われたというのは納得できる。正負の軸を同時に使う方式、言い換えれば代数幾何や解析で負の数も正の数と同等に扱うのが常識になったとき、原点の頭文字 O が使われるようになったのではなかろうか。O はゼロ 0 を連想させるという利点もあるだろう。

(2) について。x 座標、y 座標を表す言葉としては、abscissa、ordinate という術語が由緒正しいらしく使われている。「X の軸」、「Y の軸」という言葉が使われるようになった後に「x の座標」、「y の座標」という簡便な言葉が使われるようになったらしい。

(3) について。負の軸もこの後に登場するのだが、少なくとも最初は正の値しか考えていないのも現代とは様子が違う点である。いつも言うことだが、西洋では負数が数と見なされるようになるには長大な年月を要したのである。その影響がまだ見られるということ

だろう。

(4) について。19 世紀半ばでも点の座標を表すのにまだ (x, y) という記法が一般的ではなかったというのは、現代で数学を学んだ身にすれば、とても奇妙に思える。Loomis は x 座標が a で y 座標が b の点は $x = a, y = b$ という「方程式」で表現されると断っているのである。

座標を表す (x, y) という記号のことだが、まずハミルトンが 1833 年に「純粋時間の学問としての代数学」という論文の中で複素数 $x + yi$ を (x, y) と書くようにしたことがわかっている。ハミルトンがどうして複素数を座標で表したかだが、ハミルトンは実数や複素数というものの実在性を幾何学に依拠させることが嫌いで、これらを時間に求めることを提唱したのだった（拙著『数とは何か　そしてまた何であったか』、78 ページから 79 ページ参照)。ハミルトンによる複素数の座標表示をヒントとして、平面上の点でも使われるようになったのではないかというのが私の推察である。

Loomis（したがって 19 世紀のとも言えるが）の教科書はオイラーの『無限解析入門』第 2 巻（1748 年）を手本にしているとされている。そこでこのオイラーの本の該当箇所を調べてみよう。

最初に図のような数直線の説明から始まる。勝手な点 A を始点として選び、x の正の値を右方向に取れば、負の値は左方向に取ることになるとして、正負の値が A からの線分の長さによって表現できることが説明されている。線分 AP は abscissa と呼ばれる。続いて関数のグラフの説明が与えられているのでその箇所を読んでみよう。

> y を x の任意の関数とする。x に定まった値が与えられると y も定まった値を取る。x のあらゆる値を表示するために直線 RAS を採る。そしての定まった値に対して対応する区間 AP を取り、y の値に対応する区間 PM を垂直に立てる。もし y が正の値であるなら、PM は直線 RS の上側にあるが、y の値が負ならば、PM は RS の下側に来る。

関数とグラフとの関係の説明があった後に、用語の定義が与えられる。

> まず直線 RS は軸（axis)、あるいは基準線（directrix）と呼ばれる。点 A は、そこから x の値が測られるのだが、abiscissae（複数形）の始点と呼ばれる。軸の部分 AP（それによって x の値が示されるのだが）は abscissa と呼ばれる。abscissa から曲線に達する垂線 PM は applicatus と呼ばれる。(中略。一般には直交系を使うことが断られている。)

任意の abscissa AP が変化量 x で表しておくと、関数 y は applicatus PM の長さを与え、$PM = y$ となる。

19 世紀以降の教科書との一番大きな違いは、まず xy 座標系が最初に設定されているのではないということであろう。現在ではまず、いろいろな多様な関数を考察する場としての座標系が先もって存在していて、そこに特定の関数が与えられてグラフが考察されるのだが、オイラーの場合はそうではない。同じようなものだが、x 軸と y 軸を対等に扱う現代の方法では逆関数は簡単にグラフで考えることができるが、オイラーは逆関数の考察をしていない。

なお、用語としては、オイラーの時代では x 座標、 y 座標という言い方はまったく存在していなかったということがわかる。 x 座標は abscissa（英語でもそのまま使う）であり、y 座標は ordinatus（オイラーの本では applicatus）と呼ばれている。ありがたいことに日本では、こうした歴史的遺産というか、残滓ともいうべきものがないので、あっさりと x 座標、 y 座標だけで済ますことができる。

なお abscissa は「切断線分」といった意味であり、ordinatus（英語では ordinate）は英語で言えば ordered というような意味を持つ名詞である。

以上調べたことから、「座標系」というのはとても新しい考え方なのだということがわかるだろう。

2.2 中世から近代へ

量と運動の問題に図形を使うという方法を一番最初に構想したのは、ニコル・オレームであるとされている。何事も最初に始めるのは茨の道をさまよわねばならないことが次の文章だけでも理解できるだろう。

> 測定され得るものは連続量の様態に即して把握される。・・・（点、線、面といった）幾何学的なものにおいてこそ、測定あるいは比が存在する。他のものにおいては、幾何学的なものへ関係付けられるときに初めて、測定あるいは比が認識される。たとえ点や線が実在しないとしても、ものを測定したり、測定量間の比を認識するために、それらを数学的に仮定しなければならない。それゆえ、連続的に獲得され得るすべての内包量は基体の上に立てられた直線によって把握されなければならない。・・・
>
> 内包量とは、それに従ってより白いとか、より速いとか言われるものである。ところで、内包量は・・・（無限分割可能であるので）線を用いる以上に適切な表現

方法は考えられない。(第一部第一章　『内包量の連続性』)

ニコル・オレームの場合は愛情、幻視、魂、幸福といったものまで図形化（グラフ表現）の対象としているので、正確な意味での数学的な量の関係を図示する方式にはまだ距離がある。そうは言うものの、具体的な例を考察していないわけではない。有名なのは、マートン学派（マートン学派の貢献については Grant 編 “A Source Book in Medieval Science” (Harvard, 1974), pp 237-43）の「平均速度の法則」、すなわち「等加速度運動は速さの平均値の等速運動と走行距離が等しい」に図形を使った証明を与えたことである(『質と運動の図形化』第三部、第七章)。要するに、底辺に経過時間、高さに速度を取ると、三角形ＡＢＣの面積が長方形ＡＢＧＦの面積と等しいということである。

ガリレオは『新科学対話』の中で運動を数学的に論じているが、その中で図形を多用している。ガリレオの場合、時間に関する考察のときと同様、質や量に関する面倒な議論はほとんどなく、軽々と図で考える方法を使っている。中でも有名なのは「自然落下法則」、すなわち「落下距離は経過時間の平方に比例する」を証明するのにオレームの証明を使ったことである。つまり、ガリレオは「自然落下は等加速度運動である」という命題を「自然界の原理」として採用し、自然落下法則を数学的に証明したのである。ガリレオはこの「等加速度運動の原理」にたどり着くまでに長い年月の試行錯誤を重ねたのであった。ガリレオがオレームの著作を知っていたかどうかは不明だが、知らなくても速度や距離を線分で表すことを常識としているのだから、自分で証明を与えることはまったく朝飯前のことであっただろう。

なお、マートン学派やオレームは落下運動について論じているのではなく、一般論であったから、ガリレオが落下法則を見付け、そして証明したという栄誉をいくらかでも先行者に分け与えなければならないというようなものではない。あくまで「自然落下は等加速度運動である」という、実験によって確かめるのが極めて困難な命題を原理（仮説、公理といっても同じである）として採用し、そして自然落下法則を数学的に証明したというところにガリレオの偉大さがあるのである。この「原理を前提として置き、その原理に数学を適用してもろもろの結果を証明し、それらが現象を十分精密に説明しているならば、原理そのものの正しさも立証されたことになる」という「数理物理学」の方法を創始したのはガリレオであり、ガリレオ以外の誰の功績でもない。

ガリレオ以降の数学者は運動や曲線の問題を扱うのに図形を多用するようになって行く。たとえば円やサイクロイドを描いてそこで種々の設定をして議論を展開するのである。しかし、座標系を設定し、代数式のグラフを考察するという観点から見れば、その最

初の人はフェルマーであろう。

フェルマーの解析幾何は『平面および立体の軌跡論入門』（タンヌリ編『フェルマー全集』（全 4 巻＋補遺 1 巻　1891-1922）にフランス語訳とともに収録されている。ラテン語の原文だけならフェルマーの死後、息子サミュエルが刊行した『フェルマー著作集』(1679：復刊 1969) で見ることができる。詳細な解説は中村幸四郎『数学史—形成の立場から』(1981　共立出版）参照）にある。フェルマーの目的はアポロニオスの『軌跡論』を代数的に論じることであった。読み易さを考えて少し現代用語を宛てる。

> 方程式を立てるために、二つの未知量を定まった角をなすように取るのが便利である。そして普通には、角としては直角を取り、かつまた二つの未知量のうちの一方についてはその端点の一つは定点であるとする。二つの未知量のいずれもが平方を超えないときは、後で明らかにされるように、軌跡は直線、または円錐曲線となる。

ここには明瞭に座標系の考えが記されている。定点となる端点というのが現今言うところの原点である。次に x, y の 1 次式は直線を与えることを説明している。表現を現代式に改めると次のように述べている。

> 図のように N を定点とし、NM を N を端点とする定直線とする。NZ を未知数 x に等しく取り、NZI を与えられた角（今は直角）に取る。線分 ZI を引き、これをもう一つの未知数 y に等しく取る。今 d, b を定数として、
>
> $$ax = by$$
>
> とすれば、I は直線を描く。

この後、その証明が比例関係 $b : a = x : y$ の幾何的な意味を使って与えられる。以下、2 次式の場合には円錐曲線になることが説明されている。これはオイラーの『無限解析入門』の方法とまったく同じである。ただ 2 次式の場合に限定されているという違いがあるだけである。ちなみに原点を N としているのは、数 (numeros) の頭文字を借りているからであろう。

フェルマーの独創になる点を挙げてみよう。

1. 二つの未知数に対して、一定角（普通は直角）をなす直線を割り当てた。
2. 方程式と曲線を対応させた。
3. 平行移動や回転によって簡単な式に還元する方法を述べた。

以上から、フェルマーが、座標系を使って代数と幾何の問題を一緒に扱えるようにしたという本格的な意味で、解析幾何を創始したと結論してもどこからも文句は出ないであろう。ただしフェルマーの著作は生前ほとんど発表されなかったし、息子のサミュエルが刊行した『フェルマー著作集』がそれほど読まれたとも思えないので、後世への影響という点ではデカルト『幾何学』の比ではない。

それでは、デカルトの独創と思われる点を挙げて見てみよう（原文の解説とその詳しい分析は拙著『フェルマーの大定理―整数論の源流』の第2章・第7節を参照。)。

1. 算術における加減乗除の四則演算が与えられた二線分から定規を用いて第三の線分を求める問題に転化できる。開平も定規とコンパスを用いて作図できる。
2. 作図可能な問題は2次方程式を重ねて解くことに還元できる。
3. 何次元の量でも線分として取り扱うことができる。

デカルトは与えられた作図問題を一つ一つ解くのではなく、作図で解ける問題とはどういうタイプの問題かを分析するという発想の逆転を行っている。これによって「角の三等分問題」、「立法倍積問題」などの作図不可能性の証明の方針を与えたということができる。フェルマーのように、問題を円錐曲線、あるいは2次曲線に限定するのではなく、開いた一般論として考察しているところに特徴があるが、座標軸といった考え方はまったくない。縦軸が描かれた図は『幾何学』の中にはないのである。

フェルマーは数学者らしく、デカルトは哲学者らしく、解析幾何に貢献したと評価することができるだろう。

最後に、負の軸まで考慮に入れたのは誰が最初だろうかを考えてみよう。私はそれはニュートンではないかと思う。2次曲線は円錐曲線に分類されてしまうが、3次曲線はそう簡単ではない。ニュートンは論文『3次曲線の分類』（Whiteside 編『ニュートン著作集』第7巻）で3次曲線の分類を試みていて、そこには3次曲線の精緻なグラフを多数描いている。それを見ると、後年のオイラーなどより、はるかに自在に曲線のグラフを扱っていることがわかる。ここでも原点はAだが何も言わずに第二、第三、第四象限が使われている。

最後に、空間座標だが、これはオイラーの『無限解析入門』第2巻の付録『局面の理論』が最初ではなかろうか。ここではx座標をabscissaと呼び、y座標をaplicatusと呼ぶようなことはなくなり、ただ単に「三つの座標 (co-ordinate)」と呼んでいる。これを見ると、abscissaというような奇妙な名称は、空間座標を頻繁に考えるようになって、姿を消していったのではなかろうか。