物理学の分野におけるガウスの研究について

植　村　栄　治　(大東文化大学)

2012年10月13日

1　はじめに

数学者ガウスは, 物理学の分野でも多くの研究を行った. ガウスによる地磁気の研究については2011年の本シンポジウムで報告したが, それ以外にも彼は力学, 電磁気学, 光学等の領域で様々な研究を行っている. 本稿では, それらのうち光学及び結晶学に関するガウスの研究を取り上げて考察する. 電磁気学に関しても彼は多大な貢献をしているが, それについては他日を期すことにしたい.

2　光学の歴史（その1——視覚理論の誕生）

光の振舞いと性質に関する学問は「光学」と呼ばれる. 光学の中には, 光の進む線の性質を幾何学的に研究する「幾何光学」や, 光の波動あるいは電磁波としての性質を研究する「波動光学」あるいは「電磁光学」などがあり, また, 20世紀に入ってからは光の量子力学的性質を研究する「量子光学」などの現代光学も生まれている.

幾何光学の起源は古代ギリシアに見出すことができる. 原子論の基礎を築いたレウキッポス (Leukippos. 紀元前440-430年頃に活躍), その弟子で原子論を確立したデモクリトス (Demokritos. 紀元前460年頃－紀元前370年頃), 「万学の祖」と称されるアリストテレス (Aristoteles. 前384年－前322年), 「快楽主義」で知られるエピクロス (Epikouros. 紀元前341年－紀元前270年), ローマの詩人・哲学者だったルクレティウス (Lucretius. 紀元前99年頃－紀元前55年) らは, 視覚は, 物体から発せられる何物かが目に入って生ずると考えた. このような考えはまとめて「流入説」と呼ばれる。なお, 視覚をこのようにとらえた場合, 「光学」より「視学」の語の方がふさわしい.

これに対し, 四元素説を唱えた哲学者エンペドクレス (Empedocles. 紀元前490年頃－紀元前430年頃) は, 視覚は目から光線が放出されて対象物に当たることによって生じると考えた. このように眼から何かが出て対象に当たり視覚が生ずるという考えはまとめて「流出説」と呼ばれる。哲学者プラトン (Platon. 紀元前427年－紀元前347年) の視覚理論にも流出説的な考えが見られるとされる. 数学者エウクレイデス (Eukleides. 紀元前3世紀頃) は, 眼から出た視線が直線となって進み, その視線の離散的な束により対象物を底面とする視覚ピラミッド (視覚円錐) が構成されて視覚が生ずるという考え方に基づいて「オプティカ」(視学) や「カトプトリカ」(反射視学) 等の書物を著わし, 幾何光学の基礎を築いた. (注1)

(注1) 高橋憲一「『オプティカ』『カトプトリカ』解説」(斎藤憲・高橋憲一 [訳・解

説] エウクレイデス全集第4巻 デドメナ/オプティカ/カトップトリカ, 193-305頁) は, ギリシャ視覚理論の枠組み, 「オプティカ」と「カトプトリカ」の内容および両書のギリシャ・アラビア・ヨーロッパにおける伝承と理論的展開等について詳しく解説している (両書の翻訳は307-452頁にある). 本稿の記述も同解説に多くを負っている.

3　光学の歴史（その2——視覚理論の展開）

紀元2世紀にアレキサンドリアで活躍した天文学者クラウディオス・プトレマイオス (Klaudios Ptolemaios. 83年頃－168年頃) は, エウクレイデスと同様に流出説に立った上で, 視線の直進・反射・屈折・色等の性質を検討し, また, 視覚による物体の形状・距離・方向の認識等を論じた. 彼の著書「光学」は幾何光学の重要な文献となり, 中世のアラビア学者たちにも大きな影響を与えた. また、彼が屈折や反射について実験に基づく考察を行ったことも注目される.

中世イスラムの有名な哲学者キンディー (Abu Yusuf Ya'qub ibn Ishaq al-Kindi. 801年－873年頃) は, 視覚に関して流出説を採ったが, 視線は3次元的でなければならないとし, 視覚円錐は離散的でなく連続的だとし, また, 瞳の表面のすべての点からあらゆる方向に視線が出ていくとするなど, その視覚論にはエウクレイデスに対する本質的な批判が含まれていた.

ペルシアの科学者イブン・サフル (Ibn Sahl. 940年頃－1000年頃) は, 984年頃の著作「燃焼鏡とレンズ」において屈折の法則を正確に記述したとも言われるが, そのような評価は疑問とする見方もある. その後, バグダード生まれの科学者イブン・アル＝ハイサム (Ibn al-Haitham. 965年－1040年) は, エウクレイデスやプトレマイオスらの流出説を批判して流入説を採りつつも, 流出説の持つ数学的な説明力を自然学的な流入説と結び合わせて新しい視覚理論を生み出した. また, 彼は多くの実験を行って光学に関する諸理論を構築し, 「近代光学の父」と呼ばれた. その主著「光学の書」(Kitab al-Manazir. 1015年－1021年) はラテン語に訳されて, 西洋科学に大きな影響を及ぼした.

近代科学の先駆者といわれるイギリスの哲学者ロジャー・ベーコン (Roger Bacon. 1214年－1294年) は, 基本的にはイブン・アル＝ハイサムの流入説に立ちつつも, それと抵触しない形で流出説をも取り込み, 西欧における視学・光学研究の歩みを決定づけたと評価されている.

ヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler. 1571年－1630年) は, 天文観測に関連して光と視覚の理論に関心を寄せた. 彼はそれまでの数学的・自然科学的・医学的な諸知見を総合し, 眼の内部に生ずる光円錐群の共通底面は眼の水晶体にあるが, その頂点は網膜上の異なる1点にあると考え, 「網膜上の像」というアイデアを提唱した.

光の屈折の仕方について考察したプトレマイオスやイブン・アル＝ハイサムは正確な屈折の法則に到達していなかった. 屈折の法則がいつ最初に発見されたのかは今日でも必ずしも明確でないが, 屈折の法則が世に知れ渡るに至ったのは17

世紀になってからのことである.

1602年にイギリスの天文学者トーマス・ハリオット(Thomas Harriot[Harriott, Hariot とも綴る]. 1560年頃－1621年)が屈折の法則を発見したが, 彼は著作をほとんど残さなかったため, この発見は当時は世に知られなかった. 1621年にはオランダの天文学者ヴィレブロルト・スネル(Willebrord Snell. 1580年－1626年)が独自に屈折の法則を発見したが, この成果も生前には刊行されなかった. その後, フランスの哲学者ルネ・デカルト(René Descartes. 1596年－1650年)が1637年発表の方法序説試論において屈折の法則を導いた. また, フランスの数学者ピエール・ド・フェルマー(Pierre de Fermat. 1607年頃－1665年)は, 1657年頃に, 自己の考案した「最小時間の原理」を使って屈折の法則の導出を示した.

ニュートン(Isaac Newton. 1642年－1727年)は光のスペクトル分析を行い, また光の微粒子説を唱えて近代的な光学の創始者となった. 彼の微粒子説に対しては, 当時からロバート・フック(Robert Hooke. 1635年－1703年)やクリスティアーン・ホイエンス (Christiaan Huygens. 1629年－1695年)らが光は波動であると反論していた. その後, 1803年に至り, トマス・ヤング(Thomas Young. 1773年－1829年)が光の干渉の実験を行ったことにより, 光の波動説が有力になった. もっともガウスの存命中(1777年－1855年)に理論的な法則の裏付けを持つ波動説が確立したわけではない. ジェームズ・クラーク・マクスウェル(James Clerk Maxwell. 1831年－1879年)が電磁気学の基礎方程式である「マクスウエルの方程式」を提唱したのは1864年のことであり, ハインリヒ・ルドルフ・ヘルツ (Heinrich Rudolf Hertz. 1857年－1894年)が電磁波の存在を実験によって確認したのは1877年頃のことである.

4　光学機器の歴史

最も単純な光学機器は鏡やレンズである. 金属製の鏡は紀元前2600年頃のエジプトでも使用されていた. また, アッシリアの古都ニネヴェ(現在のイラク北部)では, 紀元前700年頃, 太陽熱を集めるため水晶製のレンズが用いられていた. 12世紀頃には文字を拡大して見るためにレンズが用いられるようになり, 13世紀後半には凸レンズを用いた老眼鏡が登場した. 14世紀にはイタリアでガラス製造の技術が広まり, レンズが普及するようになった. 16世紀末以降, 顕微鏡や望遠鏡が発明され, ガリレオによる望遠鏡の改良やニュートンによる反射式望遠鏡の発明などが行われた。

カメラについては, その原型である「カメラ・オブスクラ」が15世紀頃に登場した. これはピンホールカメラと同様のものであり, 画家が遠景の透視画を描くのに用いられた。16世紀には鏡やレンズが使用されるようになって, カメラのサイズも暗室ないしテントの大きさから携帯型にまで小型化された. しかし, 像を化学的に固定する写真が発明されたのは19世紀になってからである. 1839年にフランスのルイ・ジャック・マンデ・ダゲール(Louis Jacques Mandé Daguerre. 1787年－1851年)は世界最初の実用的な写真技術(ダゲレオタイプ)を公開して世の注目を

集めた．その後, 1851年には露光時間が10秒程度の写真湿板が発明され, さらに1870年代には写真乾板が登場してカメラはより便利なものとなった．

5　ガウスの光学研究

ガウスは若いときから天文学に関わっていたので, 望遠鏡にも関心があり, 1807年頃以降, レンズの設計や光学上の諸問題についてしばしば書簡の中で自己の見解を披瀝している．例えば, 1807年から1810年にかけて, ハンブルクの天文機器製作者ヨハン・ゲオルク・レプソルト (Johann Georg Repsold. 1770年－1830年) 及びガウスの指導を受けたクリスティアン・ハインリヒ・シューマッハ (Christian Heinrich Schumacher. 1780年－1850年) との間で, ガウスは望遠鏡用対物レンズにつき自分の見解や計算結果を示している．

他方, 光学についてガウスが発表した主要な論文は, 1817年のものと1840年のものの2点しかない．したがって, ガウスの光学研究の全体を考察するには, 書簡集の検討が本来欠かせないのであるが, 本稿ではこの2つの論文の要点を紹介するにとどめたい．

1817年にガウスは, リンデナウ (Bernhard August von Lindenau. 1779年－1854年) が1815年から刊行していた「天文学及びその関連諸科学の雑誌」(Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften) の第4巻 (1817年12月) に, 論文「色の散乱のより完璧な除去を特に考慮した色消し二重対物レンズについて」(Über die achromatischen Doppelobjektive besonders in Rücksicht der vollkommenern Aufhebung der Farbenzerstreuung) を発表した (ガウス全集第5巻504－508頁収録).

ガウスは, この論文の中で, 数理的な解析についてはほとんど触れていないものの, 凸レンズと凹レンズを組み合わせて分離型の2枚1組のレンズを作ると色収差が少なくなることを示した．この場合, 1枚目の凸レンズには色の分散が少ないクラウンガラスを用い, 2枚目の凹レンズには色の分散が多いフリントガラスを用いて, 色の分散の違いを相殺するのがポイントである．また, 従来は凸レンズと凹レンズは貼り合わせて用いられていたが (これはフラウンホーファー型と呼ばれる), ガウスは両者を分離して間に空気が入るようにし, 屈折面を1つ増やして屈折の具合を修正しやすくした．

ガウスが1817年に提案したこのタイプの対物レンズは, 理論上は優れていたものの, 当時の技術では製作するのが難しく, 結局, 望遠鏡に使われることはなかった．しかし, この論文発表から70年たった1888年に, アメリカのアルバン・グレイアム・クラーク (Alvan Graham Clark. 1832年－1897年) は, ガウスの提案した対物レンズを改良し, 絞りを挟んで反対側にもう1組の凹レンズと凸レンズを置くという, 前後対称の望遠鏡用レンズを考え出して特許を取った．その後, ドイツのパウル・ルドルフ (Paul Rudolph. 1858年－1935年) は, 1896年頃に, 内側の凹レンズ1対を, 2枚のレンズを貼り合わせたものでそれぞれ置き換えて計6枚から成るカメラ用のレンズを作った．このような前後対称のレンズ構成は, 現在「ダブ

ルガウスタイプ」あるいは単に「ガウスタイプ」などと呼ばれているが, ガウスがこれらを直接考案したわけではない.

1840年にガウスはゲッチンゲン王立科学協会論文集に「屈折光学の研究」(Dioptrische Untersuchungen) を発表した (以下「1840年論文」という. ガウス全集第5巻245 − 276頁収録。なお同巻309-312頁にガウス自身による同論文の紹介批評がある). この論文において, ガウスは, いわゆる近軸近似の仮定の下で, レンズを通過した光線の経路や結像の仕方を正確に計算する方法を確立した. 近軸近似とは, 光線と光軸 (= 光学系の回転対称軸を指す。通常はレンズの2つの焦点を結んだ直線を考えればよい) のなす角度 u が小さい場合に,

$$\sin u \simeq u, \qquad \cos u \simeq 1, \qquad \tan u \simeq u$$

とおく近似のことである. u が $10°$ 程度以下ならこの近似による誤差は1%未満にとどまり, かなり正確とされる.

このような近軸近似が全空間で成り立つとした場合の光学理論は「ガウス光学」と呼ばれる. 19世紀中はガウス光学が支配的であり, それを超える光学理論は存在しなかったと言ってよい. 但し, 今日では, 近軸近似によらない, より精確な計算が行われている.

以下では1840年論文の内容の概要を述べるが, その記述を逐一追うことは避けて, 今日の教科書に見られるような簡明な記述方法に従って説明する.

6 ガウス光学の内容 (その1)—屈折について

まず, 座標系と符号について次のように定める.

①光軸は z 軸で表す. 光線が左から右へと進む方向を正の方向とする.

②光軸と (レンズ等の) 境界面との交点を頂点と呼び, 座標系の原点とする. 境界面ごとに座標系をとる. 光軸と直交方向に x 軸をとり, 光軸から遠ざかる方向を正とする.

③光線の角度は, 光軸その他の基準線から鋭角をなすようにとり, 反時計回りを正、時計回りを負とする.

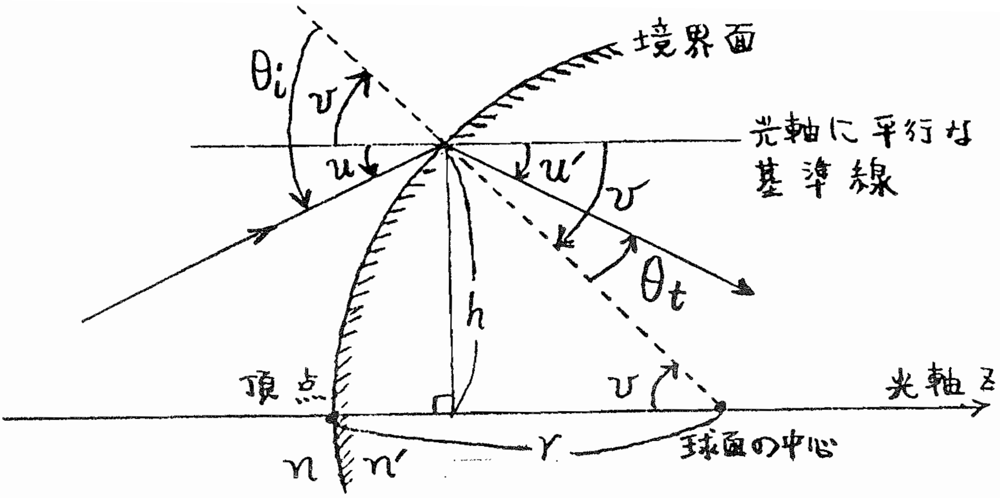
④レンズ球面の半径の符号は, 中心が頂点の右にあるときは正, 左にあるときは負とする.

⑤光線は, 境界面での高さ h および光軸となす角 u の2個の変数を使って表す.

屈折率が n の媒質と n' の媒質との境界面が, 半径 r の球面を形作っているとする. 光線は, 境界面と高さ h で交わり, その角度は屈折により u から u' に変わる. 光線と境界面との交点と球の中心とを結んだ線が光軸となす角を v とする. この場合, u, r, h は正で, u', v は負である. 境界面における光線の屈折については, 屈折の法則により,

$$n \sin\theta_i = n' \sin\theta_t$$

が成立する.



(図 1)

ここで近軸近似により, $\sin\theta_i$ を θ_i に置き換え, $\sin\theta_t$ を θ_t に置き換えると,

$$n\,\theta_i = n'\,\theta_t \qquad \cdots\cdot \quad (1)$$

となる. ここで,

$$\theta_i = -v + u, \qquad \theta_t = -v - (-u') \qquad \cdots\cdot \quad (2)$$

である. 近軸近似により,

$$-v \simeq \sin(-v) \simeq \frac{h}{r} \qquad \cdots\cdot \quad (3)$$

が成り立つ. (2), (3) を (1) に代入すると,

$$n'u' = n\,u + \frac{n-n'}{r}\,h \qquad \cdots\cdot \quad (4)$$

を得る. ここで

$$\phi = \frac{n'-n}{r}$$

とおき, ϕ を「屈折力」と呼ぶことにする. 屈折直後の光線について, その高さ h' および光軸との角度 u' を, h と u を使って表すことを考える.

$$h' = h \qquad \cdots\cdot \quad (5)$$

であるから, (4) と (5) を同時に表すために, 行列を用いて,

$$\begin{pmatrix} h' \\ n'u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ n\,u \end{pmatrix}$$

と書くことができる (なおガウスはこのような行列表記はしていない). このように, 境界面における光線の屈折は, 行列を掛算する形で表すことができる. この行列を「屈折マトリックス」と呼び, R で表す. すなわち,

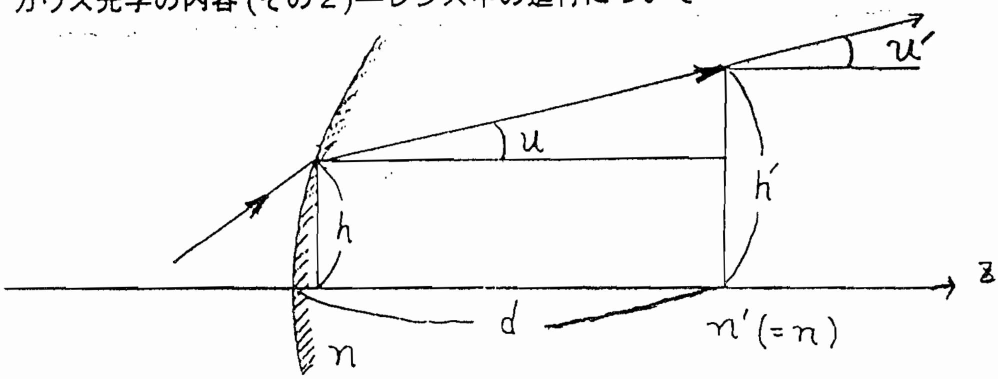
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-n'}{r} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi & 1 \end{pmatrix}$$

である. また,

$$|R| = 1$$

が成立することに注意しておこう.

7　ガウス光学の内容 (その2)—レンズ中の進行について



(図2)

高さ h, 角度 u で境界面を出た光線が, 屈折率 n のレンズの中を z 座標が d の所まで進み, そのときの高さは h', 角度は u' であるとする. ここで, u, u', h, h', d はすべて正である. 近軸近似を用いると, 次のように書ける.

$$h' = h + d\tan u = h + du$$

$$u' = u$$

この関係を屈折の場合と同じように行列の掛算の形で表すことを考えると, $n = n'$ に注意して, 次のように書くことができる.

$$\begin{pmatrix} h' \\ n'u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ nu \end{pmatrix}$$

このように一様な媒質中における光線の進行を表す行列を「移行マトリックス」又は「転送マトリックス」と呼び, T で表す. すなわち,

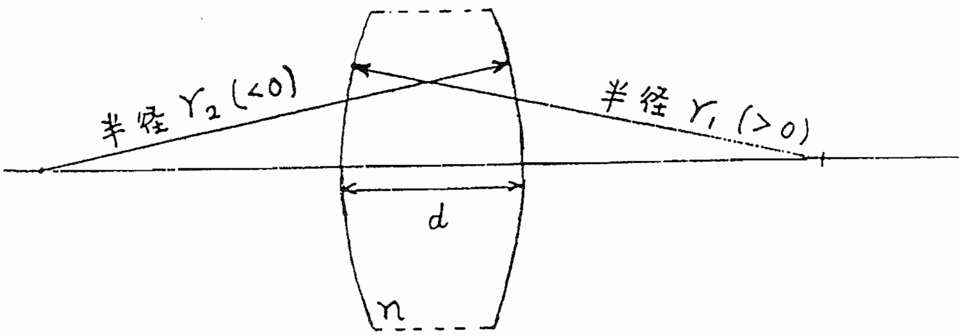
$$T = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．この場合も

$$|T| = 1$$

が成立している．

8　ガウス光学の内容 (その３)—レンズのマトリックス



(図３)

レンズの２つの球面の半径を r_1, r_2 とし，レンズの厚さを d, レンズの屈折率を n, レンズの外部は空気でその屈折率は１とする．この場合，レンズの働きを行列 L で表すと次のようになる．

$$L = R_2 T R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-1}{r_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1-n}{r_1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{d}{r_1} & \dfrac{d}{n} \\ (n-1)\left\{\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1} - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{d}{r_1 r_2}\right\} & 1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{d}{r_2} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

ここでも

$$|L| = |R_2|\,|T|\,|R_1| = 1$$

が成り立つ．

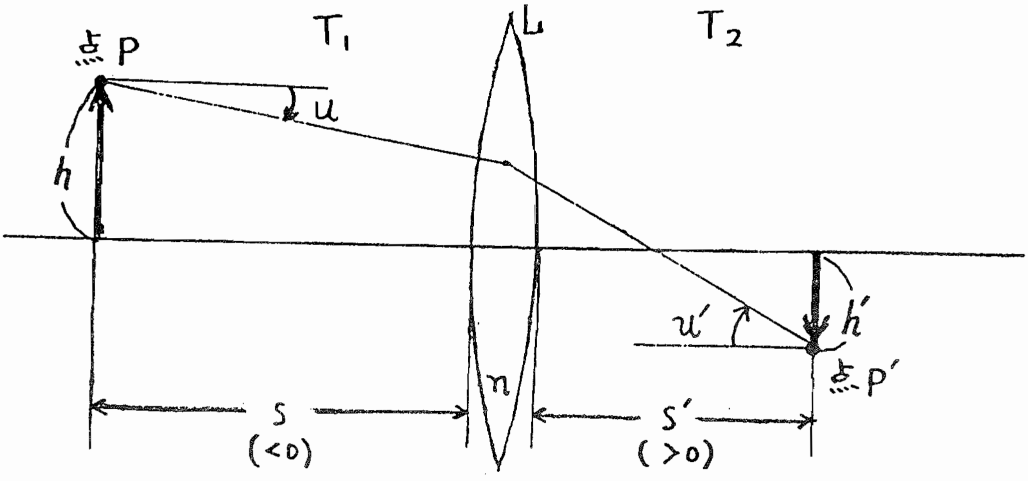
9　ガウス光学の内容 (その４)—レンズが十分薄い場合

レンズが十分薄い場合には，レンズの厚さ d を０とみなすことができる．すなわち，(6) において $d = 0$ とおくと，次式が得られる．

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

この式より, 薄いレンズは, 光線の高さは変えないものの, 光線の高さに応じて屈折角を変えることが分かる.

さて, 薄いレンズによる結像について調べよう.



(図4)

高さ h, 角度 u で出発した光線が高さ h', 角度 u' で像を結んでいるとする. このとき, 光線の振舞いは次の行列で表される.

$$\begin{pmatrix} h' \\ u' \end{pmatrix} = T_2 L T_1 \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + s'(n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) & s' - s - s's(n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \\ (n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) & 1 - s(n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$$

結像するためには, 高さ h の点 P から出たすべての光線が角度 u の如何にかかわらず高さ h' の点 P' に到達することが必要である. したがって, 上式最後の２行２列の行列の１行２列目の成分は０にならなくてはならない. それ故, 次式が成立する.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

これは「レンズメーカーの公式」と呼ばれる式である. 物体を無限の遠くに置いたときに像のできる位置を像側焦点というが, レンズから像側焦点までの距離を f'

で表すと, $s=-\infty$ とおいて,

$$\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

となる．これを用いてレンズメーカーの公式を書き直すと,

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$$

が得られる．これはガウスの結像公式と呼ばれる．

10　ガウス以後の幾何光学の展開

レンズを通過した光は厳密には１つの像点に結像せず, わずかなずれを生じる．これを収差という．収差には単色光の場合でも生ずる単色収差と多色光の場合に生ずる色収差とがある．単色収差には, 球面収差 (光軸上での焦点が合わない), 非点収差 (光軸外での焦点が合わない), コマ収差 (光軸外で彗星のような尾を引く), 像面湾曲 (結像面上に像が集まらない), 歪曲収差 (像が歪む) の５種類がある．また, 色収差には軸上色収差 (色により光軸上の焦点の位置が異なる), 倍率色収差 (色により像の大きさが異なる) の２種類がある．

ガウスが考案したレンズは球面収差と色収差を少なくするものであったが, ガウス自身は収差について数理的な分析を示したわけではない．単色収差について数理的な研究を行ったのは, ルートヴィヒ・ザイデル (Philipp Ludwig von Seidel.1821 年－ 1896 年) である．彼は 1857 年の論文で,

$$\sin\theta\simeq\theta-\frac{\theta^3}{3!},\qquad \cos\theta\simeq 1-\frac{\theta^2}{2!}$$

と３次項まで近似した場合に近軸近似との差がどうなるかを計算し, そこに５種類の収差係数が現われることを示して, ５種類の単色収差を理論的に説明した．そのため, この５種類の単色収差は「ザイデル収差」とも呼ばれる．

ザイデルがこの論文を発表したのはガウスがこの世を去って２年後のことだから, ガウスはこのような単色収差の理論は知らなかったのではないかと思われる．このあたりに, 光学の分野におけるガウスの貢献の限界がうかがわれよう。

11　結晶学の歴史 (その１)—18 世紀後半まで

鉱物の系統的な研究は, 古代ギリシアの哲学者・植物学者のテオプラストス (Theophrastos.　B.C.371 年 - B.C.287 年) にまで遡るとされるが, 結晶に関してはガイウス・プリニウス・セクンドゥス（Gaius Plinius Secundus. 22 年? - 79 年) の著作「博物誌」(Naturalis historia) の記述が知られている．同書は, ダイアモンドの正８面体として形状やその極めて高い硬度等について触れている．

中世になると, ドイツの鉱山学者ゲオルク・アグリコラ (Georg Agricola. 1494 年 - 1555 年) が, 1546 年の著書「化石の本性について」(De natura fossilium) の中で,

鉱物をその物理的な特性に従って分類し, 幾何学的な形状について述べている．また, ケプラーの法則で有名なヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler. 1571 年 - 1630 年) は, 1611 年の冊子「新年に贈る 6 角形の雪」(Strena seu de nive sexangula) において、雪片は正 6 角形の構造を持つことを示したが, その際, 球を最大に詰め込む場合のいわゆるケプラー予想 (=球の敷詰めは面心立方格子の場合が最密になる) を提出している．

結晶そのものに関する科学的な考察としては, デンマークの科学者ニコラウス・ステノ (Nicolaus Steno. 1638 年 - 1686 年) が 1669 年の著書「固体の中に自然に含まれている固体についての論文への序文」(De solido intra solidum naturaliter contento dissertationis prodromus. 略称：固体論) で示した「面角一定の法則」が挙げられる．これは, 同一鉱物の結晶面がなす角は常に同じ大きさであるという法則である．18 世紀後半には結晶学が進展し始め、1780 年にはフランスの鉱物学者カランジョー (Arnould Carangeot. 1742 年 - 1806 年) が結晶面の角度を測る装置 (ゴニオメーター) を発明した．

12　結晶学の歴史 (その２)—18 世紀後半以後

1784 年には, フランスの鉱物学者ルネ＝ジュスト・アユイ (René Just Haüy. 1743 年 - 1822 年) が, 結晶面の寸法には整数比が成り立つという「有理指数の法則」を発見した．彼は, 結晶構造の考察に対称の概念を導入した最初の人物であり, 「結晶学の祖」と呼ばれている．

イギリスの鉱物学者ウィリアム・ハロウズ・ミラー (William Hallowes Miller. 1801 年 - 1880 年) は, 結晶の格子面やその方向を記述するための「ミラー指数」を考案し, 1839 年の著書「結晶学論」(A Treatise on Crystallography) で発表した．このミラー指数は基本的に現在の結晶学でも用いられている．なお, ミラー指数のような記号法の体系を初めて考えたのはミラーの師である科学哲学者ウィリアム・ヒューウェル (William Whewell. 1794 年 - 1866 年) であり, 1825 年頃のことだったとされる．

また, 当時のドイツでは, 後に電磁誘導に関するファラデー・ノイマンの法則を発見したフランツ・エルンスト・ノイマン (Franz Ernst Neumann. 1798 年 - 1895 年) や, グラスマン代数に名を残すヘルマン・ギュンター・グラスマン (Hermann Günther Grassmann. 1809 年 - 1877 年) らが結晶学の研究を行っていた．

1840 年代には結晶の立体構造についての幾何学的研究が盛んになった．結晶をその対称性から 7 結晶系 (三斜晶・単斜晶・斜方晶 [直方晶]・六方晶・三方晶 [菱面体晶]・正方晶・立方晶 [等軸晶]) に分けることは少し前から行われていたが, フランスの数学者オーギュスト・ブラヴェ (Auguste Bravais. 1811 年-1863 年) は, すべての結晶が 14 種類の空間格子 (ブラヴェ格子, 結晶格子) に分類されることを 1845 年に指摘した。

19 世紀後半には, 結晶の対称性に群論を応用した研究が進められた．結晶を鏡映対称性と回転対称性の組み合わせで分類すると, 点群と呼ばれる群になるが, そ

の種類は 32 種類しかない．この事実自体はドイツの鉱物学者ヨハン・ヘッセル (Johann Friedrich Christian Hessel. 1796 年 - 1872 年) が 1830 年に明らかにしたのだが, 彼の業績は 19 世紀末までほとんど知られなかった．

並進対称性をも取り入れて結晶の対称性を分類すると空間群という群になり, その種類は230種類に上る．この数え上げと分類は, 1890 年頃に, ドイツのアーサー・モーリッツ・シェーンフリース (Arthur Moritz Schoenflies. 1853 年－ 1928 年), ロシアのイエヴグラフ・ステパノヴィッチ・フョードロフ (Yevgraf Stepanovich Fyodorov. 1853 年－ 1919 年), イギリスのウイリアム・バーロー (William Barlow. 1845 － 1934 年) の 3 人によって独立になされたとされる．当時はこの空間群には理論的意義しかなかったが, 20 世紀になると X 線の回折による分子構造の解析が可能になり, 空間群が結晶の構造解析に役立つようになった．

13　結晶学とガウス

以上のような結晶学の発展に対して, ガウスはどのような寄与をしたのであろうか．1831 年 6 月 30 日付のゲルリング宛ての書簡において, ガウスは, 最近, 結晶学の研究を始めたこと, 1830 年にヘッセルが物理学辞典に書いた 32 種類の分類の記述が混乱していて, それを追うのはこれまでの自分の分野におけるよりもより大きな忍耐が必要とされること, 結晶面の角度を正確に測定するための装置を考案したこと等を述べている．ガウスは, その後, 結晶の面を表すのに各面の法線や仮想球を用いる方法を採用し, 結晶面を正確に表現する数学的方法を研究した模様である．しかし, ガウスは短期間の研究の後に結晶学関係のすべての研究成果を破棄してしまい, 結局何も残さず何も発表しなかった．そのため, 結晶学の分野におけるガウスの功績は公式にはゼロである．ガウスが結晶学の研究を放棄した理由は不明だが, 筆者が勝手に推測してみると, 1830 年代以降の結晶学においては結晶の対称性に着目した幾何学的研究ないし群論的研究が盛んになっていくのであるが, ガウスはそのような傾向にもはや関心を持てなかったのでなかろうかと思われる．

14　結語

1．光学の分野におけるガウスの貢献は, 何と言っても, 近軸近似に基づく幾何光学を確立したことである．これによってレンズを通過した光線の進み方が相当程度精確に計算できるようになり, レンズ設計や収差計算の進歩に貢献した．

2．実際のレンズ製作や望遠鏡, 顕微鏡, カメラ等の光学機器の発明・改良は, 必ずしも光学理論に導かれて行われたわけではない．したがって, 測地学や地磁気学の場合と異なり, ガウスが幾何光学全般の始祖であるというような評価は無理であるし, また, 実際面においても各種の光学機器の発明や改良についてガウスがずば抜けて大きな役割を果たしたとも言えない。あくまでガウスは近軸近似を前提とした光学理論の創始者として位置付けるのが適当である．

3．結晶学の分野においては, ガウスは, 或る程度の研究を行ったものの, その具体的な内容は不明であり, 学問的な成果の発表にも至っていない．ガウスの関心は結

晶面の精確な数学的表現にあったと思われる節があるが, 19 世紀後半に見られるような結晶の対称性に着目した群論的考察には至っていなかった。とはいえ, 1830 年の発表後, 60 年以上にわたって世に無視されたヘッセルの結晶分類論にいち早く目を付けてそれを学ぼうとしたガウスの慧眼はさすがと言えよう.

参考文献

【1】ガウス全集 : Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Bde 1-12, 1863-1929.
【2】ダニングトン著, 銀林浩他訳『ガウスの生涯』, 東京図書, 1976.
【3】左貝潤一『光学の基礎』コロナ社, 1997.
【4】大頭仁・高木康博『基礎光学』, コロナ社, 2000.