アーベルの「不可能の証明」に及ぼされたラグランジュとガウスの影響の考察

高瀬正仁
(九州大学 MI 研究所／日本オイラー研究所)

第 23 回数学史シンポジウム
津田塾大学数学・計算機科学研究所
平成 24 年 10 月 14 日 (日)

はじめに

西暦 2011 年 (平成 23 年) はガロアの生誕 200 年の節目であったこともあり，ガロアが語られる機会が目立ち，新しい評伝も何冊か出版された．ガロアは代数方程式論と楕円関数論の領域で多くの数学的発見を体験した人だが，ガロアより少し年長で，同じ二つの領域で際立った足跡を残したのはアーベルである．アーベルはガロアを知らないまま世を去ったが，ガロアのほうではアーベルの数学研究の消息によく通じていて，大きな影響を受けた様子がうかがわれる．

代数方程式論は 16 世紀のイタリアの代数学派，すなわちシピオーネ・デル・フェッロ，タルタリア，フェラリ，カルダノたちがが 3 次と 4 次の方程式の解法を発見したころから発展のきざしを見せ始め，チルンハウス，ベズー，オイラーを経てラグランジュへと継承された．この間の歴史については内外の多くの研究があり，ほとんど語りつくされたかのような印象があるが，ガロアの生誕 200 年の節目に際会したのを機に，あらためて所見を表明してみたいと思う．特記するほどの新事実はないが，特にアーベルの「不可能の証明」の値打ちについて，明確な批評を書き残して置きたいと思ったのである．

代数方程式の代数的可解性を左右する根本的な要因は何であろうか．今日の数学の状況に足場を求めるならば,「方程式のガロア群」と答えるのが正解であろう．方程式のガロア群が可解群であることが代数的可解性を担保する必要十分条件である．これはいわゆるガロア理論に基づく解答だが，この視点に立つと，アーベルのいわゆる「不可能の証明」などはガロア理論のひとつのかんたんな適用例にすぎず，たちどころに導かれてしまう．なぜなら，一般の n 次方程式のガロア群は n 次の対称群 S_n であり，$n>4$ のとき，S_n は可解群ではもはやないからである.「不可能の証明」と並んで，アーベル方程式の代数的可解性を示したことはアーベルの大きな成果である．だが，ガロア理論の立場から見ればこれもまたほとんど自明な事実である．なぜなら，アーベル方程式のガロア群はアーベル群 A_n であり，アーベル群はつねに可解群であるからである．

万事がこんなふうで，アーベルの代数方程式論は今日のガロア理論に吸収されて小さ

な一区域を占めるにすぎないかのようである．だが，本稿ではこの見方を否定して，ガロアともガウスともまったく異なるアーベルの独創を指摘したいと思う．

1. ラグランジュの「省察」

ラグランジュの論文「方程式の代数的解法の省察」(以下,「省察」と略称する) は代数方程式論の形成史において時代を画する位置を占めている．もっとも注目に値するのは「方程式を解く」ということ，それ自体に関心を寄せる気運を醸成したことで，ガウスもアーベルもその気運の中で代数方程式論を考察した．ただし，代数的可解性に対する考えは大きく異なっている．ラグランジュ自身は高次方程式の代数的可解性を終始確信していたが，やみくもに式変形を繰り返して僥倖を頼むのではなく，代数的可解性を左右する一般原理を追い求めた点において，ラグランジュ以前の状況に比してたしかに一線を画している．ラグランジュはラグランジュ以前に知られていた 3 次と 4 次の方程式のさまざまな解法を解析し，いろいろな解法の根底にあるものを見つけようと試みて，いわゆる「ラグランジュの分解式」を発見した (「省察」の第一部と第二部)．続いて「ラグランジュの分解式」を梃子にして高次方程式の解法を試みたが，これは成功しなかった (「省察」の第三部と第四部)．

ガウスははじめ高次方程式の代数的可解性を疑わず，解けたと確信した一時期もあった．その際，ガウスが依拠したのは「ラグランジュの分解式」とチルンハウスの変換であった．チルンハウスの変換は方程式の解法にあたってチルンハウスが提案したアイデアで，3 次と 4 次の方程式に対して成功し，独自の解法に到達した．チルンハウス自身はこのアイデアを高次方程式に及ぼすにはいたらなかったが，ラグランジュは「ラグランジュの分解式」とともにチルンハウス変換にも大きな期待を寄せていた．ガウスはその期待を継承し，あるとき，ラグランジュの行く手をはばんだ壁を越えたと確信したのである．この間の消息は「ガウスの数学日記」に鮮明に刻まれている．第 34 項目の主役は「チルンハウスの変換」，第 37 項目に見られるのは「ラグランジュの分解式」である．

だが，ガウスのが「解ける」と確信 s た時期はごく短く，ほどなくして「解けない」という考えに転換した．1799 年の学位論文や 1801 年に刊行された『アリトメチカ研究』には，高次方程式の代数的解法はありえないという，確信に満ちた文言が散見する．何かしら転換をうながす出来事があったのであろう．

2. ガウスの代数方程式論

当初，ガウスは高次の一般方程式の代数的解法を探索したが，まもなく「不可能であること」を当然視するようになった.「解ける」と思い，解法を探索するのはごく自然な成り行きであり，ガウスの前の世代はもとより後の世代のアーベルもヤコビもみなはじ

めは「解ける」ことを当然のことと考えていた．この見方を転換して「不可能かもしれないこと」に思い至り，しかも当然視するのはいかにも異様である．この視点の逆転こそ，代数方程式論におけるガウスの最大の寄与と見るべきであり，もっとも深くアーベルに影響を及ぼしたのもこのアイデアであった．

「解けない」というアイデアはどこまでもガウスに独自であり，そこにはラグランジュの影響は見られない．だが，ガウスは円周等分方程式の解法を考える場面において「ラグランジュの分解式」を利用した（『アリトメチ研究』第 7 章参照）．数学思想の面ではラグランジュと正反対の位置に身を置いたが，技術上の影響は受けたのである．

3. 代数的に解けるすべての方程式の探索

高木貞治の著作『近世数学史談』からアーベルのパリ便りを引用しよう．

> 僕はその外にもいろいろ論文を書いて，特にクレルレ誌の初めの 3 冊に載せた．ジェルゴン（*Gergonne*）の *Annales* にも出したが，あれは日に日に低下する．あまり古くなってしもうたのだ…

> 僕の方程式解法不可能の論文の概要が *Ferussac* の *Bulletin* に載った．あれは僕が自分で書いたのだ．この雑誌へはこの後も書くつもりだ．人の書いた論文を解題するなどは恐ろしくいやなことだが，僕はクレルレの為にはそれを忍ぶのだ．彼は想像し得る最も善い人だ．僕は断えず彼と書信を交換している．僕の所に彼の手紙が随分溜った．僕の約婚からの分と凡そ同じほどであろう．

「ジェルゴン（*Gergonne*）の *Annales*」と「*Ferussac*（フェリュサック）の *Bulletin*」はアーベルのパリ逗留の時期にパリで出ていた数学誌である．

以下，少しの間，代数方程式論の話題が続く．

> 僕は今方程式論について仕事をしている．僕の得意の題目だが，到頭次の一般的の問題を解く手掛りが見付かったようだ．それは「代数的に解き得る凡ての方程式の形を決定すること」というのだ．僕は五次，六次，七次等々のそれらを無数に見出した．今までそれを嗅ぎつけたものはあるまいと思う．

「代数的に解き得る凡ての方程式の形を決定すること」という構えの大きな問題が提示されたが，アーベルの独創がありありと現われるのはこのような場面においてである．視線の方向がガロアとは全然違う．ガウスといえども決してこんなふうには考えなかったであろう．

4. 「不可能の証明」を越えて

「代数的に解きうるすべての方程式の形を決定すること」という，極度に一般的な問題を設定し，しかもその解決の手掛りを得たと，アーベルはホルンボエに報告した．この時点ではすでに「不可能の証明」に成功していたのであるから，代数方程式論におけるアーベルの探究は「不可能の証明」に限定されていたのではないことが諒解されるのである.「代数的に解ける方程式」と「代数的に解けない方程式」の区分けを左右する根本の要因を探索していたのであろうと思われるが，独特なのはその際の探索の様式で，代数的に解ける方程式の形を一般的に決定しようというのである．気宇はあまりにも広大で，もし本当にそのようなことができたなら,「不可能の証明」などはそこから簡単に導かれてしまう．なぜなら，ある方程式が提示されたとき，代数的に解けるか否か，その形を一瞥するだけでたちまち判別されてしまうからである．ただし，これはもちろん話が逆で,「不可能の証明」が成立するからこそ,「代数的に解ける方程式」と「代数的に解けない方程式」の識別ということが問題になりうるのである.

アーベルの手紙の続きを見ると，こんなことが書かれている.

> 同時に僕は最初の四つの次数の方程式の最も直接なる解法を得た．それに由れば，何故にこれらだけが解けて，他のものは解けないかが甚だ明白に理会されるのである．(『近世数学史談』から引用した．)

最初の四つの次数の方程式というのは，一次，二次，三次，それに四次の代数方程式のことで，これらはみな代数的に可解である．次数がもう一段上がって五次方程式になると，一般に代数的に解くのは不可能になるというのがアーベルの「不可能の証明」の主張だが，ではなぜ最初の四つの方程式だけが代数的に解けるのだろうかと問えば，完全に解明されたわけではなく，謎は依然として残されている.

この問題を考えるうえで参考になるのはラグランジュの思索である．一次方程式の解法は自明であり，問題になりえない．二次方程式の解の公式は早くから世界の各地で知られていたが，簡単な式変形にすぎず，謎めいた事情は何もない．三次と四次の方程式の解法はむずかしいが，16 世紀のイタリアのカルダノの時代以来，いろいろな人の手が加わってさまざまな解法が見い出された．このような状勢を受けて，ラグランジュは「ラグランジュの分解式」に着目し，さまざまな解法を統一的な視点から説明しようと試みたのであった.「ラグランジュの分解式」が満たす方程式は「還元方程式」と呼ばれるが，その還元方程式の次数を定めるのは,「ラグランジュの分解式」を構成する諸根に置換を施す際に現れる値の個数である．ラグランジュが根の置換に着目したと言われるのは，まさしくこの場面においてであり，このアイデアがガロアに継承されたという見方は今日の定説のひとつを形作っているのではないかと思う．ここではこの定説に検討を加えることはしないが，ガロア理論の立場から見れば，なぜはじめの四つの次数の方程式だけが云々という疑問に対しては，方程式のガロア群の構造，すなわち可解群か否かという判断をもって答えるのが至当である．だが，アーベルの思索はガロアとはまったく異なっていた.

上に引いた言葉に続いて，アーベルは特に5次方程式の解法について重要なひとことを言い添えた．これも『近世数学史談』からの引用である．

> 特に五次方程式に関しては，若しもそれが代数的に解かれるならば，根の形は次のようでなければならないことが分った．
>
> $$x = A + R^{\frac{1}{5}} + R'^{\frac{1}{5}} + R''^{\frac{1}{5}} + R'''^{\frac{1}{5}}$$
>
> ここで R, R', R'', R''' は一つの四次方程式の四つの根で，それらは平方根ばかりで表わされるのだ．ここで困難であったのは式と符号とであった．

5次方程式の根の公式は存在しないことを承知したうえで，アーベルの思索はすでに「不可能の証明」を越え，代数的可解方程式の根の形そのものに関心を寄せている．ガウスにもガロアにも見られない出来事であり，印象はきわめて神秘的である．

5. アーベルに及ぼされたラグランジュとガウスの影響

代数方程式論の究明の場において，アーベルにはラグランジュとガウスという二人の先行者がいた．ラグランジュは代数的可解性ということそれ自体に反省を加えるという姿勢を示したが，ラグランジュ以前には見られないことであり，きわめて独創的である．「省察を加える」という姿勢はガウスにもアーベルにも影響を及ぼしたとみてよいと思う．だが，ラグランジュはあくまでも「解ける」と確信し，解法の模索を続けたのである．これに対し，ガウスは早い時期に「不可能であること」を確信した．ガウスとラグランジュを明確に分けるのはこの点においてである．アーベルはこのガウスの思想を継承し，「不可能の証明」に成功した．

技術的な方面から見ると，方程式の解法を一計の低次数方程式の解法に帰着させる工夫や「ラグランジュの分解式」などに象徴されるように，ガウスははっきりとラグランジュの影響を受けている．また，ラグランジュは代数的可解性を左右する根本的な要因は「根の相互関係」であることをはっきりと認識していたが，ガウスはこれを継承し，円周等分方程式の解法に成功した．ただし，今度は技術的な影響は皆無であり，ガウスの独創が際立っている．「根の相互関係」への着目はアーベルにも影響を及ぼし，「アーベル方程式」の発見に結実した．

人が人に影響を及ぼす姿は多様である．アーベルに及ぼされた影響に焦点をあてると，ラグランジュの影響はほとんど見られないが，ガウスの影響は多大である．ただし，ガウスの影響が顕著なのは思想的な方面でのことであり，具体的な場面では，代数的可解方程式の根の形状への関心に見られるように，アーベルの独創が異彩を放っている．アーベルはガウスの数学思想をもっとも継承し，しかも独自の場所に到達したと言えるであろう．

補記

本稿は第 23 回数学史シンポジウムにおける講演「アーベルの「不可能の証明」に及ぼされたラグランジュとガウスの影響」の記録である．ラグランジュとガウスの影響を論じるという体裁になっているが，実際には講演の主旨は「どれほど大きな影響を受けたか」ということの解明ではなく，かえって「本質的な影響は受けていない」と主張するのが本来のねらいであった．講演の題目は相応しいとは言えない．そこで本稿では末尾に「考察」の一語を添えて,「アーベルの「不可能の証明」に及ぼされたラグランジュとガウスの影響の考察」とした．