Schur の表現論の仕事（射影表現３部作） その I

平井　武 (Kyoto)
hirai.takeshi@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

I. Schur (= J. Schur) は Frobenius の直弟子である．学位論文は表現論に関するもの [**S1**, 1901] であり，[**F53**, 1896] から始まった Frobenius の「群の指標と線形表現の理論」に従いながらも独自のもので，一般線形群 $GL(n,\boldsymbol{C})$ と対称群 $\mathfrak{S}_k$ の表現に関する Schur-Weyl 双対性の淵源がここにある（参考文献 [平井３] 参照）．1906 年には共著論文 [F75], [F76] もある．

今回は，彼の独自性を最もよく表している射影表現３部作 [**S4**, 1906], [**S10**, 1907], [**S16**, 1911] を調べてみることとする．ページ数にして，31 頁，53 頁，96 頁の大部であるから，報告は，[**S4**], [**S10**] と [**S16**] との２つに分けて行う．全てを現代風に書き表しては，あまり意味がないので，出来るだけ原典の雰囲気を残して，それを味わえるようにと企図した．なお，Schur の表現論に関する論文全てと，今回の報告に関連する参考文献は，報文末尾にリストアップしてある．

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[S4] J. Schur, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* **J. für die reine und angewante Mathematik, 127(1904), 20–50**

凡例: 命題，定義等の番号付けには，射影表現３部作の番号 I ([S4, 1904]), II ([S10, 1907]), III ([S16, 1911]) を頭に付ける．そして，original に Satz としてあるもの以外に，平井が勝手に都合で，命題，定義などと名付けて切り出したものには最後に H (Hirai の頭文字) を付加する．例えば，命題 I-0.1H のごとし．

各 section のタイトル付与は平井による．

導入部

代数の最も難しい問題として，「n 変数の線形変換よりなる有限群の決定」がある．解決しているのは，$n = 2, 3$ だけであり，一般的には，「Typen von Gruppen が有限」としか分かっていない．

この問題の逆は，ある意味では次の問題になる．

① 多くて h 個の線形変換または射影変換からなる群で与えられた群 $\mathfrak{H}, |\mathfrak{H}| = h$, と同型または準同型（mehrstufig isomorph）になるものを見つける；　または，

② 群 $\mathfrak{H}$ の線形変換による表現を決定する．

後者の問題は，Molien [Mo2, 1897], Frobenius [F53, 1896], [F54, 1896], [F56, 1897], [F59, 1899], によって，

「$\mathfrak{H}$ の群行列 Gruppemmatrix をこれ以上分解できない部分行列に分解する問題」

と同等である．この問題の解答に至る最初のそして本質的な第一歩が，Frobenius の研究が示す通り，

③ Gruppemdeterminante von $\mathfrak{H}$ の Primfaktoren への分解，であり，

④ その主要部分は，Gruppencharaktere von $\mathfrak{H}$ の計算，である．

この論文では，同様の意味で，与えられた有限群の射影変換による表現を全て決定する問題を，（イ）Gruppenmatrix,（ロ）Gruppencharaktere, を取り扱うことによって研究する．

$\mathfrak{H}$ の相異なる h 個の元 $A, B, \ldots,$ に対して，h 個の lineare Substitutionen von nicht schwindender Determinante を対応させる：

$$\begin{aligned} &\{A\} \qquad x_\nu = \frac{a_{\nu 1}y_1 + a_{\nu 2}y_2 + \cdots + a_{\nu,n-1}y_{n-1} + a_{\nu n}}{a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{n,n-1}y_{n-1} + a_{nn}}, \\ &\{B\} \qquad x_\nu = \frac{b_{\nu 1}y_1 + b_{\nu 2}y_2 + \cdots + b_{\nu,n-1}y_{n-1} + b_{\nu n}}{b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,n-1}y_{n-1} + b_{nn}}, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

$\{A\}\{B\} = \{AB\}$ を満たすときは，群の表現を与える．$(A) := (a_{ik}), (B) := (b_{ik})$ とおくと，

$$(A)(B) = r_{A,B}(AB) \quad (A, B \in \mathfrak{H}).$$

今後この種の beschaffene System von Matrizen を

eine zu den Zahlensystem $r_{A,B}$ gehörende *Darstellung der Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen* と呼ぶ．$n =$ Grad der Darstellung.

Definition I-1H. Zwei Darstellungen $(A), (B), \ldots$ und $(A'), (B'), \ldots$ als einander *assoziiert*

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(A') = a(A),\ (B') = b(B), \ldots.$

Definition I-2H. Zwei Darstellungen $(A), (B), \ldots$ und $(A'), (B'), \ldots$ als einander *äquivalent*

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(A') = P^{-1}(A)P,\ (B') = P^{-1}(B)P, \ldots.$

Definition I-3H. *primitiv* = 既約

命題 I-0.1H. $\mathfrak{H}$ の射影表現の Grad はつねに $h = |\mathfrak{H}|$ の約数である．

（線形表現の場合は Molien-Frobenius の結果）

Definition I-4H. *durch die Gruppe* $\mathfrak{A}$ *ergänzte Gruppe von* $\mathfrak{H} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}), \mathfrak{A} =$ *Abel*sche Gruppe:

$$1 \longrightarrow \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{H} \xrightarrow{\Phi} 1.$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}A' + \mathfrak{A}B' + \cdots, \quad \mathfrak{A}A' \xrightarrow{\Phi} A,\ \mathfrak{A}B' \xrightarrow{\Phi} B,\ \ldots.$$

$\mathfrak{G}$ の primitive Darstellung を考える．$\forall J \in \mathfrak{A},\ (J) = j \cdot (E),\ \ j^r = 1$ if $J^r = E$.

$\Psi : A \to A',\ B \to B',\ \ldots,\ \ \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$ の切断．そして，

$A \to (A'),\ B \to (B'), \ldots$ Darstellung der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen

Definition I-5H. *hinreichend ergänzte Gruppe* $\mathfrak{G}$ *von* $\mathfrak{H}$:

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\mathfrak{H}$ の射影表現に対して，

ある asoziierte Darstellung が，上のように $\mathfrak{G}$ の線形表現から得られたものに同値．

Definition I-6H. *Darstellungsgruppe* $\mathfrak{G}$ *von* $\mathfrak{H}$:

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ hinreichend ergänzte Gruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ のうち，$|\mathfrak{G}|$ が最小．

例 I-1.1H. $\mathfrak{H}$ が連結リー群の場合は，その表現群は $\mathfrak{H}$ の普遍被覆群にあたる．

$\mathfrak{H} = SO(n)$ の場合は $Spin(n)$ であり，$SO(n)$ の射影表現はスピン表現ともいわれ，古典的な Littlewood や Weyl の本でも取り扱われている．

Definition I-7H. Darstellungsgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ に対して，central group $\mathfrak{A}$ は一意的である．これを $\mathfrak{M}$ と書いて *Multiplikator* der Gruppe $\mathfrak{H}$ という．

Definition I-8H. eine Gruppe, deren Multiplikator ist die Einheitsgruppe を *abgeschlossene* Gruppe という．

問題. $\mathfrak{H}$ の全ての射影表現を求める

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(イ)}\ \mathfrak{H} \text{ の表現群 } \mathfrak{G} \text{ を求める；} \\ \text{(ロ)}\ \mathfrak{G} \text{ の primitive Darstellung を全て求める（Frobenius の誘導表現の方法）.} \end{cases}$$

1 $\mathfrak{H}$ の射影表現の存在と Multiplikator

$\mathfrak{H} = \{H_0 = E, H_1, \ldots, H_{h-1}\}$, $h = |\mathfrak{H}|$, の射影表現 $P \to (P)$：

$$(P)(Q) = r_{P,Q}(PQ) \quad (P, Q = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1}).$$

h^2 個の量 $r_{P,Q}$ は次の h^3 個の方程式を満たす：

$$\text{(A.)} \qquad r_{P,Q}\, r_{PQ,R} = r_{P,QR}\, r_{Q,R} \quad (P, Q, R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1}).$$

逆に，関係式 (A.) を満たす h^2 個の零でない数の Zahlensystem $r_{P,Q}$ に対して，それに属する $\mathfrak{H}$ の表現を与えられる．

命題 I-I. h^2 個の Zahlensystem $r_{P,Q}$ に属する $\mathfrak{H}$ の表現が存在する必要十分条件は関係式 (A.) を満たすことである．

証明. (論文の雰囲気を知るために原典通りに辿って見る．**アイディア** は，線形表現の場合に，Frobenius が group algebra に対する Gruppenmatrix（群行列）を考えたことに倣い，ここでは，twisted group algebra の Gruppenmatrix を考える)

h 個の独立変数，$x_{H_0}, x_{H_1}, \ldots, x_{H_{h-1}}$ をとり，

$$X := (r_{PQ^{-1},Q}\, x_{PQ^{-1}}) = \sum_{R \in \mathfrak{H}} (R)\, x_R \qquad (P, Q = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1}),$$

を考える．【注：真性の Gruppenmatrix では，群環の基底の元 δ_S は左正則表現で，$\delta_S(R^{-1}T) = \delta_{RS}(T)$ に移る．従って，その成分 $(R)x_R$ では，S 列，RS 行に 1 が載る：$P = RS, Q = S, PQ^{-1} = R$. 目下の twisted case では，$S = Q$ 列，$RS = P$ 行に $r_{R,S} = r_{PQ^{-1},Q}$ が載る.】

$y_{H_0}, y_{H_1}, \ldots, y_{H_{h-1}}$ を別の独立変数として，h Größen $z_{H_0}, z_{H_1}, \ldots, z_{H_{h-1}}$ を

$$z_P := \sum_{RS=P;\, R,S \in \mathfrak{H}} r_{R,S}\, x_R\, y_S$$

とおく．すると，

$$XY = \Big(\sum_{R \in \mathfrak{H}} r_{PR^{-1},R}\, x_{PR^{-1}}\, r_{RQ^{-1},Q}\, y_{RQ^{-1}} \Big) =: (D_{P,Q}),$$

$$r_{PR^{-1},R}\,r_{RQ^{-1},Q} = r_{PR^{-1},RQ^{-1}}\,r_{PQ^{-1},Q} \quad (\because\ PR^{-1},\ RQ^{-1},\ Q \text{ の 3 個}),$$

$$D_{P,Q} = r_{PQ^{-1},Q} \sum_{R\in\mathfrak{H}} r_{PR^{-1},RQ^{-1}} x_{PR^{-1}}\, y_{RQ^{-1}} = r_{PQ^{-1},Q} z_{PQ^{-1}},$$

$$\therefore \qquad XY = (r_{PQ^{-1},Q} z_{PQ^{-1}}) = Z$$

$$\therefore \sum_{R,S} (R)(S)\, x_R\, y_S = \sum_T (T) z_T = \sum_{R,S} r_{R,S}\,(RS)\, x_R\, y_S, \quad \text{oder}$$

(1′) $$(R)(S) = r_{R,S}(RS).$$

(2) $$(r_{R,S})^h = \frac{d_R d_S}{d_{RS}} \quad (\because\ (1') \text{ の両辺の det をとれ}),$$

$$d_R := \det(R) = \left[(-1)^{r-1}\right]^{h/r} \prod_{S\in\mathfrak{H}} r_{R,S} \quad \text{if } \mathrm{ord}(R) = r,$$

$\because$ consider left cosets by $\langle R\rangle = \{E, R, R^2, \dots, R^{r-1}\}$.

方程式 (A.) の解の個数.

Definition I-9H. $r'_{P,Q}, r_{P,Q}$ *assoziierte Zahlensysteme*

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad r'_{P,Q} = \frac{c_P c_Q}{c_{PQ}} r_{P,Q}.$$

Definition I-10H. zwei einander nicht assoziierten Lösungen von (A.) に対応する表現は *von verschiedene Typus* という. 同じ Typus のものは einer Klasse にする.

$\delta_P^h = d_P$ となる δ_P をとる. すると,

$$s_{P,Q} := \frac{\delta_P^{-1}\delta_Q^{-1}}{\delta_{PQ}^{-1}} r_{P,Q} \qquad \text{は} \quad (s_{P,Q})^h = 1 \quad \text{を満たす. ゆえに}$$

命題 I-1.1H. Klasse の個数 $=: m \le (h)^{h^2}$.

Klasse $K_0, K_1, \dots, K_{m-1}$ の K_λ の代表元 $r^{(\lambda)}_{P,Q}$ をとると, 積 $r^{(\lambda)}_{P,Q} r^{(\mu)}_{P,Q}$ はある K_ν の代表元, このとき, $K_\lambda K_\mu := K_\nu$.

Definition I-11H. 可換群 $\mathfrak{M} := \{K_0, K_1, \dots, K_{m-1}\}$ を $\mathfrak{H}$ の *Multiplikator* と呼び, $\mathfrak{M}$ と書く $\left(H^2(\mathfrak{H}, \boldsymbol{C}^\times) \text{ のこと}\right)$. $|\mathfrak{M}| = m$.

命題 I-1.2H. m には h と素な素因数は無い. $\qquad (\because\ (K_\lambda)^h = K_0.)$

2 durch eine *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$

$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}G_0 + \mathfrak{A}G_1 + \cdots + \mathfrak{A}G_{h-1} \quad (G_0 = E)$,

【注 : 1 点集合の互いに素な合併を + で表す記法を用いている】

$\mathfrak{G}/\mathfrak{A} \ni \mathfrak{A}G_\lambda \xrightarrow{\cong} H_\lambda \in \mathfrak{H}, \qquad \Psi:\ \mathfrak{H} \ni H_\lambda \to G_\lambda \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ への切断.

(4) $$H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \dots, h-1),$$

(5) $$G_\lambda G_\mu = A_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \dots, h-1),$$

$$A_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{A},\ A_{0,\mu} = A_{\lambda,0} = E),$$

$\mathfrak{A}$ の双対群につき，$\widehat{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{A}$ $(\widehat{\mathfrak{A}} \ni \psi_{A_\alpha} \leftrightarrow A_\alpha \in \mathfrak{A})$ により，

(6) $\quad \psi_{A_\alpha}(A)\psi_{A_\beta}(A) = \psi_{A_\alpha A_\beta}(A) \quad (A \in \mathfrak{A},\ \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, a-1),\ a = |\mathfrak{A}|,$

● そこで，primitive Darstellung D der Gruppe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \ni A \to (A)$, をとる．

$$(A) = \psi^{(\alpha)}(A) \cdot (E) \quad (A \in \mathfrak{A}) \quad (\exists\, \psi^{(\alpha)} := \psi_{A_\alpha})$$

$\therefore$ D には $\psi^{(\alpha)} \in \widehat{\mathfrak{A}}$, が対応して，

(7) $$\psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}) =: r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu},$$

$(G_\lambda)(G_\mu) = r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H\mu}(G_{\varphi(\lambda,\mu)})$ Zahlensystem $r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H\mu}$ に

属する Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen

● 逆に，$\psi^{(\alpha)}$ に属する $\mathfrak{H}$ の射影表現 $(H_0), (H_1), \ldots, (H_{h-1})$ があれば，

$$(A_\beta G_\lambda) := \psi^{(\alpha)}(A_\beta) \cdot (H_\lambda) \quad (\beta = 0, 1, \ldots, a-1,\ \lambda = 0, 1, \ldots, h-1)$$

とおけば，これは，

eine dem Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ entsprechende Darstellung der $\mathfrak{G}$ durch ganze lineare Substitutionen

● しかしながら，$a = |\mathfrak{A}|$ 個の factor set $r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H\mu}$ $(a = 0, 1, \ldots, a-1)$ は互いに assoziiert なものもあり得る．相異なる同値類の個数を m' とする．

$m' =$ " $\mathfrak{G}$ から来る $\mathfrak{H}$ の射影表現の verschiedene Typen の個数"

◆ $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ eine Untergruppe で，

$$\psi_{B_0}(A),\ \psi_{B_1}(A), \ldots, \psi_{B_{b-1}}(A) \qquad (b = |\mathfrak{B}|),$$

が，$\mathfrak{G}$ の 1 次元指標から来ているもの全体とする．$\psi_{B_\alpha}(A), \psi_{B_\beta}(A)$ が $\mathfrak{G}$ の Charaktere $\chi^{(\alpha)}(R), \chi^{(\beta)}(R)$ から来ているとすると，Charakter $\psi_{B_\alpha B_\beta}(A)$ は積 $\chi^{(\alpha)}(R) \cdot \chi^{(\beta)}(R)$ から来ている．

命題 I-2.1H $\psi_B(A_{\lambda,\mu}), \psi_C(A_{\lambda,\mu})$ が assoziierte Lösungen der (A.)
$\iff BC^{-1} \in \mathfrak{B}$.

命題 I-2.2H. verschiedene Typus の個数 $m' = |\mathfrak{A}|/|\mathfrak{B}|$. (命題 I-2.1H より)

● **部分群 $\mathfrak{M}'$ $(\cong \mathfrak{A}/\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{M}$ の構成：**

$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}A_0 + \mathfrak{B}A_1 + \cdots + \mathfrak{B}A_{m'-1}$ とすると，

$$\psi_{A_\alpha}(A_{\lambda,\mu}) =: r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, m'-1)$$

は，(A.) の $m' = a/b$ 個の解を与え，相異なる Klasse $K_0, K_1, \ldots, K_{m'-1}$ $(K_\alpha := \mathfrak{B}A_\alpha)$ を与えている．

$\mathfrak{B}A_\alpha \cdot \mathfrak{B}A_\beta = \mathfrak{B}A_\gamma \implies r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu} r^{(\beta)}_{H_\lambda, H_\mu}$ と $r^{(\gamma)}_{H_\lambda, H_\mu}$ とは assoziiert

$\implies K_\alpha K_\beta = K_\gamma,$

$\therefore$ $\mathfrak{M}' := \{K_0, K_1, \ldots, K_{m'-1}\} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{M}$ の部分群となる：$\mathfrak{M}' \hookrightarrow \mathfrak{M}$, $m'|m$.

● m' の別の意味付け：

$\mathfrak{R} := [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, $\mathfrak{R}' := [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, $\mathfrak{D} := \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{A}$, $\quad r := |\mathfrak{R}|$, $r' := |\mathfrak{R}'|$, $d := |\mathfrak{D}|$.

$\mathfrak{G}/\mathfrak{A} \cong \mathfrak{H} \quad \therefore\ \mathfrak{R}'/\mathfrak{D} \cong \mathfrak{R} \quad \therefore\ r' = rd.$

$\mathfrak{D} = \{J \in \mathfrak{A};\ \chi(J) = 1\ (\forall\, \chi :$ lineare Charakter von $\mathfrak{G})\}$,

$\chi(A) = \psi_B(A)\ (\exists\, B \in \mathfrak{B})$, 故に

(8) $\quad \mathfrak{D} = \{J \in \mathfrak{A}; \psi_B(J) = 1\ (\forall B \in \mathfrak{B})\}$ (b 個の条件), $\quad \mathfrak{D} = \mathfrak{B}^{\perp} \subset \mathfrak{A}$,

$\therefore \quad \mathfrak{D} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{B} \cong \mathfrak{M}'$,

$$m' = \frac{a}{b} = d = \frac{r'}{r}. \qquad \square$$

命題 I-II (重要). durch eine *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ において,

$$\mathfrak{D} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \cap \mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M} = \text{Multiplikator der } \mathfrak{H}.$$

とくに, $\mathfrak{G}$ = hinreichend ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ ならば, $m' = d = m$. 逆に,

命題 I-2.3H. $d = m$, *i.e.*, $|\mathfrak{D}| = |\mathfrak{M}| \implies \mathfrak{G}$ *hinreichend.*

定理 I-2.4H(重要). $1 \longrightarrow \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow 1, \quad \mathfrak{G} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$, において,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{G} \quad \text{hinreichend} \\ [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \supset \mathfrak{A} \end{array}\right\} \implies \mathfrak{G} \text{ Darstellungsgruppe von } \mathfrak{H}$$

3 hinreichend ergänzte Gruppe, Darstellungsgruppe の構成

● **位数 mh の hinreichend ergänzte Gruppe $\mathfrak{G}$ の構成：**

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{生成元系：} & Q_0, Q_1, \ldots, Q_{h-1}\ ;\ J_{H_\lambda, H_\mu}\ (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1), \\ \text{基本関係式系：} & (9),\ (10),\ (\mathrm{B.}) \end{array}\right.$$

(9) $\quad Q_\lambda Q_\mu Q_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1} = J_{H_\lambda, H_\mu} \quad$ (h^2 個の式)

$\qquad (\Longleftarrow \quad (4) \quad H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)})$

(10) $\quad Q_\nu \cdot J_{H_\lambda, H_\mu} = J_{H_\lambda, H_\mu} \cdot Q_\nu \quad (\lambda, \mu, \nu = 0, 1, \ldots, h-1) \quad$ (h^3 個の式),

$\qquad (\implies \ J_{H_\lambda, H_\mu}$ 同士互いに可換, $\ \therefore\ J_{H_\lambda, H_\mu}$ は中心元)

$\mathfrak{K}' := \langle Q_\nu, J_{H_\lambda, H_\mu}\ ;\ \lambda, \mu, \nu = 0, 1, \ldots, h-1 \rangle$ durch (9)-(10),

$\mathfrak{N}' := \langle J_{H_\lambda, H_\mu}\ ;\ \lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1 \rangle$ unendlich *Abel*sche Gruppe $\subset \mathfrak{K}'$,

assoziativen Gesetzes $\implies$

(B.) $\quad J_{P,Q}\, J_{PQ,R} = J_{P,QR}\, J_{Q,R} \ \ (P, Q, R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$ (h^3 個の関係式)

$\mathfrak{K}'$ の任意の元は, $JQ_\lambda, J \in \mathfrak{N}'$, と書かれる. そして,

- $JQ_\lambda = J'Q_\mu \implies \lambda = \mu$ ($\because$ 下の specialization によって $H_\lambda = H_\mu$ を得るから).

- (9)-(10) からの J_{H_λ,H_μ} 達には，(B.) からの関係式以外に

$$\prod_{\lambda,\mu} J_{H_\lambda,H_\mu}^{\ell_{\lambda,\mu}} = E$$

という関係式は存在しない．かくて，関係式系 (B.) は
vollständiges System von definierenden Relationen für *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{N}'$ となり，

生成元系：　J_{H_λ,H_μ}, $p = h^2$ 個　($X_1, X_2, \ldots, X_p$ と書く)

基本関係式系：　(B.) を次の形に書く：

(12)　$$X_1^{\alpha_{\lambda 1}} X_2^{\alpha_{\lambda 2}} \cdots X_p^{\alpha_{\lambda p}} = E \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \qquad (n = h^3 = ph \text{ 個})$$

ここに，$\alpha_{\lambda i} = 1, -1, 0$.

補助定理（Frobenius-Steckelberger，有限生成可換群の構造定理）．
p 個の互いに可換な元 $X_1, X_2, \ldots, X_p$ が n 個の関係式 (12) を満たすとする．その行列　$(\alpha_{\lambda\kappa})_{1\le\lambda\le n, 1\le\kappa\le p}$　の Rank $= p - s$, 単因子 > 1 を $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$, $e_{i+1}|e_i$, とする．

$\mathfrak{N}' := \langle X_\kappa \rangle = \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}''$

$\mathfrak{N}$ = Invarianten $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ の有限群,

$\mathfrak{N}''$ = 'Rang $= s$' の無限群で, 単位元以外は無限位数,

これらの生成元系は，それぞれ,

$Y_\alpha = X_1^{s_{\alpha 1}} X_2^{s_{\alpha 2}} \cdots X_p^{s_{\alpha p}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho)$　　e_α に対応,

$Z_\beta = X_1^{t_{\beta 1}} X_2^{t_{\beta 2}} \cdots X_p^{t_{\beta p}} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s)$,

逆に，$X_\nu = Y_1^{a_{\nu 1}} \cdots Y_\rho^{a_{\nu\rho}} \cdot Z_1^{b_{\nu 1}} \cdots Z_s^{b_{\nu s}}$　と表される．

p 個の数 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ に対する n 個の方程式：

(13)　$$x_1^{\alpha_{\lambda 1}} x_2^{\alpha_{\lambda 2}} \cdots x_p^{\alpha_{\lambda p}} = 1 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p),$$

の任意の解は,

$y_\alpha^{e_\alpha} = 1 \quad (1 \le \alpha \le \rho)$　の任意の根と，任意の $z_1, z_2, \ldots, z_s \ne 0$ を取り，

(14)　$$x_\nu = y_1^{a_{\nu 1}} \cdots y_\rho^{a_{\nu\rho}} \cdot z_1^{b_{\nu 1}} \cdots z_s^{b_{\nu s}},$$

の形で得られる．　**（補助定理終わり）**

$\mathfrak{K}' := \langle Q_0, Q_1, \ldots, Q_{h-1} \rangle = \langle Q_0, Q_1, \ldots, Q_{h-1},\ J_{H_\lambda,H_\mu}\ (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1) \rangle$ に対し，次の s 個の条件を付加する：

(15)　$$Z_\beta := X_1^{t_{\beta 1}} X_2^{t_{\beta 2}} \cdots X_p^{t_{\beta p}} = E \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s).$$

すると，基本関係式 (9), (10), (B.), (15) はある有限群 $\mathfrak{K}$ を定義する．そして，

$$\mathfrak{N} = \langle J_{H_\lambda,H_\mu}\ (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1) \rangle$$

は位数 $\overline{m} := e_1 e_2 \cdots e_\rho$ の有限群を生成し，$\mathfrak{K}$ は eine ergänzte Gruppte $(\mathfrak{N}, \mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ である：

$$1 \longrightarrow \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow 1.$$

次が証明されている：$\begin{cases} ① & s = h\,; \\ ② & \mathfrak{N} \cong \text{Multiplikator von } \mathfrak{H}\,; \\ ③ & \mathfrak{K} = \text{eine hinreichend ergänzte Gruppe von } \mathfrak{H}. \end{cases}$

前節で，$|\text{hinreichend ergänzte Gruppe von } \mathfrak{H}| \geq mh$ が分かっているので，
$\mathfrak{K} = $ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$，が分った．

◆ $\mathfrak{K}$ の定義 (9), (10), (B.), および (15):

$$(15) \qquad Z_\beta := X_1^{t_{\beta 1}} X_2^{t_{\beta 2}} \cdots X_p^{t_{\beta p}} = E,$$

において，$Z_\beta \in \mathfrak{N}'$ の選び方はいろいろあり得る．従って，同型でない表現群 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$ があり得る．しかし，次は決まっている：

$$|\mathfrak{G}| = mh,\ \mathfrak{A} \cong \mathfrak{M} = \text{Multiplikator von } \mathfrak{H}.$$

◆ $\mathfrak{T} := [\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'] = \{T \in \mathfrak{K}'; \chi(T) = 1\ (\forall \text{ Charakter } \chi(A) \text{ von } \mathfrak{K}')\}$.

Lemma I-3.3H. *Der gröste gemeinsame Teiler der Gruppen* $\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{N}'$*:*

$$\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N}' = [\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'] \cap \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}.$$

また，$\mathfrak{T} = [\mathfrak{K}', \mathfrak{K}']$ は有限群

$$1 \longrightarrow \mathfrak{N} = \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{T} = [\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'] \longrightarrow \mathfrak{R} := [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \longrightarrow 1,$$

$$\therefore \quad \mathfrak{T} = (\mathfrak{M}, \mathfrak{R}) = \text{‘}\mathfrak{R}\text{ の }\mathfrak{M}\text{ による中心拡大’}, \qquad |\mathfrak{T}| = m\,|\mathfrak{R}| = mr.$$

◆ **表現群の Kommutator:**

命題 I-III. 表現群の交換子群は互いに同型．
とくに，$[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = \mathfrak{H}$ のときには，$r := |\mathfrak{R}| = h$ で，

$$\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}], \quad \mathfrak{L} = \text{Darstellungsgruppe von } \mathfrak{H}.$$

命題 I-IV. $\mathfrak{H} = [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ のときには，表現群は互いに同型．　　（命題 I-III より）

4 Zahlensystem $r_{P,Q}$ に属する既約射影表現

課題： Zahlensystem $r_{P,Q}$ に属する既約射影表現を如何にして作るか？

Frobenius の線形表現での命題を援用する．§2 と同様に中心拡大 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$ をとり，

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}G_0 + \mathfrak{A}G_1 + \cdots + \mathfrak{A}G_{h-1} = G_0\mathfrak{A} + G_1\mathfrak{A} + \cdots + G_{h-1}\mathfrak{A} \qquad (G_0 = E),$$

$$G_\lambda G_\mu G_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1} =: A_{\lambda,\mu}, \quad \psi^{(\alpha)}(A) = \psi_{A_\alpha}(A) \ \text{ ここに } \ A_\alpha \in \mathfrak{A} \cong \widehat{\mathfrak{A}},$$

$$r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu} := \psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}) \qquad (\text{wie in §2}).$$

問題 1. zu den Zahlensystem $r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu}$ gehörigen *primitiven* Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen を与える

$\Longleftrightarrow$

問題 2. dem Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ von $\mathfrak{A}$ entsprechenden *primitiven* Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch ganze lineare Supsitutionen を与える

後者に関して，Frobenius の基礎理論により次の命題 ①, ②, ③ が成り立つ：

① ah 個の独立変数 $x_{A_\beta G_\lambda}$ ($\beta = 0, 1, \ldots, a-1$, $\lambda = 0, 1, \ldots h-1$) を考える．$\psi^{(\alpha)}(A)$ に対しては，h 次の行列 (23′) を primitive Teilmatrizen に分解すればよい：

$$(23') \qquad Y^{(\alpha)} = \Big(\sum_\beta \psi^{(\alpha)}(A_\beta) x_{A_\beta G_\lambda G_\mu^{-1}}\Big) = \Big(y^{(\alpha)}_{G_\lambda G_\mu^{-1}}\Big) \qquad \text{(誘導表現の行列)}$$

$\big(P = G_\lambda, Q = G_\mu$ とおくと，$PQ^{-1} = R$. $\therefore$ $(P, Q) = (P, R^{-1}P)$ に $y_R^{(\alpha)}$ をおく．群行列 $(x_{PQ^{-1}})$ を $\psi^{(\alpha)}(A_\beta)$ で project したもの$\big)$

$$(23) \qquad y_R^{(\alpha)} := \sum_\beta \psi^{(\alpha)}(A_\beta) x_{A_\beta R} \quad (R \in \mathfrak{G}) \quad \text{(定義)},$$

$$(24) \qquad y_{AR}^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(A^{-1})\, y_R^{(\alpha)} \quad (R \in \mathfrak{G}) \qquad \text{(性質)}.$$

② (20) $\quad Q^{(\alpha)} := \det Y^{(\alpha)} = \Phi_1^{f_1}\Phi_2^{f_2}\cdots\Phi_{\ell_\alpha}^{f_{\ell_\alpha}}$, $\quad \Phi_i$ Primfaktoren

(21) $\quad f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_{\ell_\alpha}^2 = h.$

③ $\Phi_\kappa \leftrightarrow \chi^{(\kappa)}(S)$ $(S \in \mathfrak{G})$ Charakter,

(22) $\quad f_1\chi^{(1)}(S) + f_2\chi^{(2)}(S) + \cdots + f_{\ell_\alpha}\chi^{(\ell_\alpha)}(S) = h\,\psi^{(\alpha)}(A_\beta)\,\varepsilon_\lambda,$

$S = A_\beta G_\lambda, \quad \varepsilon_\lambda = \delta_{\lambda 0}.$ 【注：右辺は $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{G}}\psi^{(\alpha)}$ の指標】

命題 I-V. 条件式 (A.) の任意の解 $r_{P,Q}$ に対して，$x_{H_0}, x_{H_1}, \ldots, x_{H_{h-1}}$ を独立変数として，

$$\big(r_{PQ^{-1},Q}\, x_{PQ^{-1}}\big) = \sum (R)\, x_R \qquad (R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1}),$$

とおく．*zu dem Zahlensystem* $r_{P,Q}$ *gehörende primitive Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{H}$ は上の表現 $R \to (R)$ の成分のどれかと同値である．

◆ den Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ entsprechenden primitive Darstllungen von $\mathfrak{G}$ **の個数** $=: \ell_\alpha$ **の決定**：

方法：Frobenius が群行列に対して用いた方法を真似た．詳細な計算は省略するが，

$$G_\lambda^{-1}G_\mu^{-1}G_\lambda G_\mu = F_{\lambda,\mu}G_\nu \quad (F_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{A}), \quad \text{とおくと},$$

$$(27) \qquad h\ell_\alpha = \sum_{\lambda=0}^{h-1} \sum_{\substack{\mu;\\ G_\lambda^{-1}G_\mu^{-1}G_\lambda G_\mu \in \mathfrak{A}}} \psi^{(\alpha)}(F_{\lambda,\mu}) = \sum_{\lambda=0}^{h-1} \sum_{\substack{\mu;\\ H_\lambda H_\mu = H_\mu H_\lambda}} \psi^{(\alpha)}(F_{\lambda,\mu}).$$

これからさらに右辺を計算して，コンパクトな表示式を与えているが，他への影響が少ないので省略する．

命題 I-VI. $r_{P,Q}$ を (A.) の任意の解とする．$\mathfrak{H}$ の k 個の共役類のうち $\ell \geq 1$ 個の (ρ) が存在して次の性質を持つ：

P がどれかの (ρ) に入り，$QP = PQ$ とすると $r_{P,Q} = r_{Q,P}$.
$\ell = \sharp\{$zu den $r_{P,Q}$ gehörigen primitiven Darstellung von $\mathfrak{H}$ の同値類$\}$.

群の指標の Grad は群の位数を割る（Frobenius）．それと同様に，

命題 I-VII. 中心拡大 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$ に対し，$|\mathfrak{G}| = ah, |\mathfrak{A}| =: a$.　$\mathfrak{G}$ の任意の指標の次元は ah を割るばかりではなく，h を割る．

命題 I-VIIa. $\mathfrak{H}$ の任意の primitiven Darstellung durch (ganze oder gebrochene) lineare Substitutionen の Grad は $h = |\mathfrak{H}|$ を割る．

p.46 欄外 には，Frobenius の示唆に依るより簡単な別証が与えられている．

5 計算を短くするのに使える Sätze

Darstellungsgruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ は次により特徴付けられる：
① 中心 $Z_{\mathfrak{K}} \supset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{H}$,
② $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \supset \mathfrak{M}$,
③ $\not\exists \mathfrak{G}$: 性質 ①, ② を持ち $|\mathfrak{G}| > |\mathfrak{K}|$　(i.e.,【①, ②の下で位数 $|\mathfrak{K}|$ 最大】）．

定理 I-5.1H（表現群の別の特徴付け）．
①′ $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M}, \mathfrak{H})$ は hinreichend ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$,
②′ $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \supset \mathfrak{M}$.

② より，$\forall \chi = \mathfrak{K}$ の 1 次元指標，$\chi(J) = 1$ $(\forall\, J \in \mathfrak{M})$.
$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}Q_0 + \mathfrak{M}Q_1 + \cdots + \mathfrak{M}Q_{h-1}$,　$\mathfrak{K}/\mathfrak{M} \ni \mathfrak{M}Q_\lambda \leftrightarrow H_\lambda \in \mathfrak{H}$ 同型対応,
$\mathfrak{M} = \{M_0, M_1, \ldots, M_{m-1}\}$,
$\psi^{(\mu)}(J) = \psi_{M_\mu}(J)$　$(J \in \mathfrak{M})$,　$\mathfrak{M}$ の指標,
primitiven Darstrellung (R) f-ten Grades von $\mathfrak{K}$:

$$(J) = \psi(J)(E)\ (J \in \mathfrak{M}), \quad \psi(J) = \psi_M(J)\ (\exists M \in \mathfrak{M}),$$

$\det(R)$ $(R \in \mathfrak{K})$ は $\mathfrak{K}$ の 1 次元指標だから，$\det(J) = \psi_M(J)^f = \psi_{M^f}(J) = 1$　$\therefore$ $M^f = E$.
$\therefore$　$\mathrm{ord}(M) = q$ なら $q|f$.
$\mathfrak{M}$ の指標 $\psi(J)$ に対応する $\mathfrak{K}$ の表現が ℓ 個で，Grade $= f_1, f_2, \ldots, f_\ell$ とすると，

$$f_1{}^2 + f_2{}^2 + \cdots + f_\ell{}^2 = h, \quad \therefore\ q^2|h.$$

命題 I-VIII. Multiplikator $\mathfrak{M}$ の任意の元の位数 q について，$q^2|h$, $h = |\mathfrak{H}|$.

命題 I-VIII の系. $h = |\mathfrak{H}|$ が quadratfrei ならば，$\mathfrak{H}$ は abgeschlossene (i.e., $\mathfrak{M} = \{E\}$).

命題 I-IX（命題 I-VIII の一般化）．　$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{H}$ 部分群で，$s = |\mathfrak{S}|$, $n = |\mathfrak{H}|/|\mathfrak{S}|$.
$\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}^{(n)} := \{A \in \mathfrak{M}\,;\ \mathrm{ord}(A)$ は n と素$\}$　は $\mathfrak{S}$ の Multiplikator の部分群.

● $m = |\mathfrak{M}|$ に入る素数 p の巾：

命題 I-X. $h = |\mathfrak{H}|$ を割る最高の p 巾を p^a とする．$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{H}$ を部分群で $p^a|s$, $s = |\mathfrak{S}|$, とする．このとき，

$m := |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}$ = Multiplikator von $\mathfrak{H}$, $m' := \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'$ = Multiplikator von $\mathfrak{S}$, とおけば，m に含まれる p 冪は，m' にも含まれる．

注意 I-5.1H. $(s, n) = 1$ とすると，$\mathfrak{D} = \mathfrak{M}^{(n)}$.

命題 I-X より直ちに，

命題 I-XI. $\mathfrak{H}$ の部分群で位数が p 冪のものはすべて巡回群（$\mathfrak{H}$ の性質）
$\Longrightarrow$ $\mathfrak{H}$ は abgeschlossene, d.h., $m = |\mathfrak{M}| = 1$.

%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%

[S10] **J. Schur,** *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* **J. für die reine und angewante Mathematik, 132(1907), 85–137**

凡例： section を subsection に分けたこと，および各 section, subsection のタイトル付与は平井による．

導入部

有限群 $\mathfrak{H}$ の射影表現を全体として決定するには，[I]=[S4] で示したように先ず，表現群 $\mathfrak{K}$ を決定すること，

表現群 $\mathfrak{K}$ の特徴付け：
$$\begin{cases} \textbf{1.} & \mathfrak{K} \text{ は中心的部分群 } \mathfrak{M} \text{ を含み，} \mathfrak{K}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{H}, \\ \textbf{2.} & [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \supset \mathfrak{M}, \\ \textbf{3.} & \text{性質 } 1,\ 2 \text{ を持ち，位数が } |\mathfrak{K}| \text{ より大なる群がない．} \end{cases}$$

このとき，Multiplikator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ は一意的に決まる．

$\mathfrak{H}$ の射影表現を議論するだけならば，どれか 1 つの表現群を知れば事足りる．

しかし，群論的には，異なる表現群に関する情報を得ること，その個数を正確に決定すること，は興味がある．この課題を
§1 (pp.86-96) で取り扱う．

とくに，vollkommenen Gruppe $\mathfrak{H}$ について，個数の上界を与える．

定義 II-1H. $\mathfrak{H}$ が *vollkommen* とは，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{H}) = \mathrm{Int}(\mathfrak{H})$, かつ，中心 $Z_{\mathfrak{H}} = \{E\}$.

§2 (pp.96-100) では，性質 1, 2 を持つ $\mathfrak{K}$ が性質 3 を持つための Kriterium を与える．とくに，$\mathfrak{K}$ が abgeschlossene なら OK.

定義 II-2H. $\mathfrak{K}$ が *abgeschlossene* であるとは，$\mathfrak{K}$ の Multiplikator が自明であること．

§3 (pp.100-107) では Multiplikator の計算法を与える．生成元系と基本関係式系があれば十分．

§4 (pp.107-113) では Multiplikatorgruppe を具体例，とくに 2 次の線形変換の群で，求める．

§5 (pp.113-123) では，これらの群の線形または射影表現（ganze oder gebrochene lineare Substitutionen）の次元を，表現群の指標の計算を通して，決定する．

1　表現群の個数

1.1. 中心拡大の一般論.

$\mathfrak{H} = H_0 + H_1 + H_2 + \cdots + H_{h-1}, \quad (H_0 = E)$

$$H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, h-1)$$

$\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{H}) =$ durch die *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{A}$ *ergänzte Gruppe von* $\mathfrak{H}$:

$1 \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \to 1, \quad \mathfrak{A} = A_0 + A_1 + \cdots + A_{a-1},$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}G_0 + \mathfrak{A}G_1 + \cdots + \mathfrak{A}G_{h-1}, \quad \mathfrak{A}G_\lambda \to H_\lambda \in \mathfrak{H} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{A},$$

(1) $$G_\lambda G_\mu = A_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)}, \ \ A_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{A} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1)$$

$A_{H_\lambda, H_\mu} := A_{\lambda,\mu}$ とおくと, 結合律より,

(2) $$A_{P,Q}\, A_{PQ,R} = A_{P,QR}\, A_{Q,R} \qquad (P, Q, R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

逆に, (2) を満たす $A_{P,Q}$ から, $A_{\lambda,\mu} := A_{H_\lambda, H_\mu}$ とおけば,

(3) $$A_\alpha\, G_\lambda \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, a-1, \ \lambda = 0, 1, \ldots, h-1)$$

は,「A_α 中心元, かつ, 関係式 (1)」のもとで群をなす.
これは, durch $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ である.

$C_0, C_1, \ldots, C_{h-1} \in \mathfrak{A}$ を任意に取り, $\overline{A}_{\lambda,\mu} := C_\lambda\, C_\mu\, C_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1}\, A_{\lambda,\mu}$ とおくと,

$\overline{A}_{H_\lambda,H_\mu} := \overline{A}_{\lambda,\mu}$ は (2) を満たす. $A_{\lambda,\mu}$ と $\overline{A}_{H_\lambda,H_\mu}$ とは *einander assoziiert*

代表元系 $\{G_0, G_1, \ldots, G_{h-1}\}$ を $\{C_0G_0, C_1G_1, \ldots, C_{h-1}G_{h-1}\}$ で置き換えると, $A_{\lambda,\mu}$ は $\overline{A}_{\lambda,\mu}$ に置き換わる.

$A_{\lambda,\mu}, A'_{\lambda,\mu}$ が (2) を満たせば, 積 $A_{\lambda,\mu} \cdot A'_{\lambda,\mu}$ も (2) を満たすので, 中心拡大群が対応する.

◆ さて, $\mathfrak{B} = B_0 + B_1 + \cdots + B_{a-1}$ *Abel*sche Gruppe

$1 \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \to 1, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{A}G_0 + \mathfrak{A}G_1 + \cdots + \mathfrak{A}G_{h-1},$

$1 \to \mathfrak{B} \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{H} \to 1, \quad \mathfrak{G}' = \mathfrak{B}G'_0 + \mathfrak{B}G'_1 + \cdots + \mathfrak{B}G'_{h-1},$

$$G_\lambda\, G_\mu = A_{\lambda,\mu}\, G_{\varphi(\lambda,\mu)}, \qquad G'_\lambda\, G'_\mu = B_{\lambda,\mu}\, G'_{\varphi(\lambda,\mu)},$$

これら 2 つが同型であるとしたとき, 3 種の同型に分ける :

① $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ の同型 $\begin{pmatrix} A_\alpha \\ B_\alpha \end{pmatrix}$ があり, $G_\lambda \leftrightarrow G'_\lambda$ により, $A_{\lambda,\mu} \leftrightarrow B_{\lambda,\mu}$ となる, すなわち,

$A_\alpha G_\lambda \leftrightarrow B_\alpha G'_\lambda$ で $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}'$.

② $\mathfrak{A} \ni A_\alpha \leftrightarrow \overline{B}_\alpha \in \mathfrak{B}$ 同型で, $G_\lambda \in \mathfrak{B}G'_{\chi(\lambda)} \implies \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_\lambda \\ H_{\chi(\lambda)} \end{pmatrix}$ が $\mathfrak{H}$ の自己同型.

同型 $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$ によって, $G_\lambda \to G'_{\chi(\lambda)}$ $(\forall\lambda)$ となるように $\mathfrak{G}'$ の代表元系を選ぶ. このとき,

$A_{\lambda,\mu} \to B_{\chi(\lambda),\chi(\mu)} =: \overline{B}_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{B}$.

③ $\mathfrak{A}$ の元に $\mathfrak{B}$ の元でない $\mathfrak{G}'$ の元が対応する．このときには，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ とは限らず，また，$\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ それぞれは，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 以外の中心元を持つ．

- **②の場合への注意：　同型 H が innere だと仮定する：**

$\exists H_\rho,\ H_{\chi(\lambda)} = H_\rho^{-1} H_\lambda H_\rho \implies G_\rho'^{-1} G_\lambda' G_\rho' = C_\lambda\, G'_{\chi(\lambda)}\ (\exists\, C_\lambda \in \mathfrak{B})$,

$\Psi:\ A_\alpha G_\lambda \to \overline{B}_\alpha C_\lambda^{-1} \cdot G'_\lambda \ \big(= \overline{B}_\alpha G'_\rho G'_{\chi(\lambda)} G_\rho'^{-1}\big)$，とおくと，

$$(A_\alpha G_\lambda)(A_\beta G_\mu) = A_\alpha A_\beta A_{\lambda,\mu}\, G_{\varphi(\lambda,\mu)} \xrightarrow{\Psi}$$
$$\overline{B}_\alpha \overline{B}_\beta \overline{B}_{\lambda,\mu}\, C_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1}\, G'_{\varphi(\lambda,\mu)} = \overline{B}_\alpha \overline{B}_\beta \overline{B}_{\lambda,\mu}\, G'_\rho\, G'_{\chi(\varphi(\lambda,\mu))} G_\rho'^{-1},$$

ここで　$\chi(\varphi(\lambda,\mu)) = \varphi(\chi(\lambda), \chi(\mu))$　なので，

$$= \overline{B}_\alpha \overline{B}_\beta\, G'_\rho (G'_{\chi(\lambda)} G'_{\chi(\mu)}) G_\rho'^{-1} = (\overline{B}_\alpha C_\lambda^{-1} G'_\lambda)(\overline{B}_\beta C_\mu^{-1} G'_\mu) = \Psi(A_\alpha G_\lambda)\, \Psi(A_\beta G_\mu).$$

この Ψ は第①種の同型．

従って，本来的な第②種としては，**同型 H が äußere であるものだけが残る**．

(F.G. Frobenius, [F64] *Über auflösbare Gruppen V*, Berliner Brichite 1901, pp.1324-1329, において，群の同型につき，*innere, äußere* を定義した．)

1.2. 1つの表現群から他の表現群を得る．

以上の準備のもとで，

課題：　1つの表現群から他の表現群を得るにはどうするか，　を調べる．

2つの表現群：
$$\begin{cases} \mathfrak{K} = \mathfrak{M}Q_0 + \mathfrak{M}Q_1 + \cdots + \mathfrak{M}Q_{h-1} & \text{(これを固定)} \\ \mathfrak{K}' = \mathfrak{M}Q_0' + \mathfrak{M}Q_1' + \cdots + \mathfrak{M}Q_{h-1}' & \text{(上と比較)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_\lambda Q_\mu = J_{\lambda,\mu}\, Q_{\varphi(\lambda,\mu)}, \\ Q'_\lambda Q'_\mu = J'_{\lambda,\mu}\, Q'_{\varphi(\lambda,\mu)}, \end{cases} \qquad J_{\lambda,\mu},\ J'_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{M}.$$

$\mathfrak{M} = \{M_0 = E, M_1, \ldots, M_{m-1}\}$,　　$\widehat{\mathfrak{M}} \cong \mathfrak{M}$ により

$\widehat{\mathfrak{M}} = \{\psi_{M_\rho}(J); \rho = 0, 1, \ldots, m-1\}$,　　$\psi_{M_\rho}(J)\, \psi_{M_\sigma}(J) = \psi_{M_\rho M_\sigma}(J)$,

$$(*) \qquad r^{(\rho)}_{H_\lambda, H_\mu} := \psi_{M_\rho}(J_{\lambda,\mu})$$

は次の (4) の nicht zwei assoziiert な m 個の解の代表元系を与える [I, §§1 ~ 2]：

$$(4) \qquad r_{P,Q}\, r_{PQ,R} = r_{P,QR}\, r_{Q,R} \qquad (P, Q, R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

$\therefore$　$\psi_{M_\rho}(J'_{\lambda,\mu})$ も $(*)$ のどれかに assoziiert,　$(\exists\, \overline{M}_\rho)$ $\psi_{\overline{M}_\rho}(J'_{\lambda,\mu}) \sim \psi_{M_\rho}(J_{\lambda,\mu})$ (assoziiert)

$$\psi_{\overline{M}_\rho}(J'_{\lambda,\mu})\psi_{\overline{M}_\sigma}(J'_{\lambda,\mu}) = \psi_{\overline{M}_\rho \overline{M}_\sigma}(J'_{\lambda,\mu}) \ \sim\ \psi_{M_\rho}(J_{\lambda,\mu})\psi_{M_\sigma}(J_{\lambda,\mu}) = \psi_{M_\rho M_\sigma}(J_{\lambda,\mu}),$$

従って，$M_\rho \to \overline{M}_\rho$ は $\mathfrak{M}$ の自己同型で，それを $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} M_\rho \\ \overline{M}_\rho \end{pmatrix}$ で表す．

$\psi_{\overline{M}_\rho}(J) =: \psi_{M_\rho}(\overline{\overline{J}})\ (\forall\, \rho)$ で決まる $\mathfrak{M}$ の自己同型（$\mathbf{A}$ の双対）を $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} J \\ \overline{\overline{J}} \end{pmatrix}$ で表す．

$$\mathbf{B}: J'_{\lambda,\mu} \to J''_{\lambda,\mu} := \overline{\overline{J'_{\lambda,\mu}}},\quad \psi_{M_\rho}(J''_{\lambda,\mu}) = \psi_{\overline{M}_\rho}(J'_{\lambda,\mu}) \ \sim\ \psi_{M_\rho}(J_{\lambda,\mu}) \ \text{(assoziiert)} \quad (\forall\, \rho),$$

まず，次の第１種の同型がある：

$$(J'_{\lambda,\mu}\text{ に対応する})\ \mathfrak{K}' \cong \mathfrak{K}'' = \mathfrak{M}Q''_0 + \mathfrak{M}Q''_1 + \cdots + \mathfrak{M}Q''_{h-1} \quad (Q''_\lambda Q''_\mu = J''_{\lambda,\mu}\, Q''_{\varphi(\lambda,\mu)})$$

さらに， $\psi_{M_\rho}(J''_{\lambda,\mu}) = \psi_{\overline{M}_\rho}(J'_{\lambda,\mu}) \sim \psi_{M_\rho}(J_{\lambda,\mu})$,

$\iff \exists\, c_0, c_1, \ldots, c_{h-1} \in \boldsymbol{C}$ (ρ に依る)， $\psi_{M_\rho}(J''_{\lambda,\mu}) = \dfrac{c_\lambda\, c_\mu}{c_{\varphi(\lambda,\mu)}}\, \psi_{M_\rho}(J_{\lambda,\mu})$,

故に， $\psi_{M_\rho}(J''_{\lambda,\mu} J_{\lambda,\mu}^{-1}) = \dfrac{c_\lambda\, c_\mu}{c_{\varphi(\lambda,\mu)}}$,

ここで， $C_{\lambda,\mu} := J''_{\lambda,\mu} J_{\lambda,\mu}^{-1}$ に対応して，durch $\mathfrak{M}$ ergänzte Gruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ を作る：

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}G_0 + \mathfrak{M}G_1 + \cdots + \mathfrak{M}G_{h-1}, \quad G_\lambda\, G_\mu = C_{\lambda,\mu}\, G_{\varphi(\lambda,\mu)}$$

このとき， $(\forall\, M_\rho)\ \ \psi_{M_\rho}(C_{\lambda,\mu}) \sim \psi_{M_0}(C_{\lambda,\mu}) = 1 \quad \therefore\ [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \cap \mathfrak{M} = \{E\}$ (cf. [I, §2]).

この中心拡大 $\mathfrak{G}$ は表現群ではない．むしろその正反対で，$\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}' = \{E\}$ (cf. [I, §2]).

◆ 逆に，中心拡大 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{M}, \mathfrak{H})$ で，$\mathfrak{M} \cap [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] = \{E\}$ となるものをとる．
それの Elementensystem を $C_{\lambda,\mu}$ とする．そこで，
Elementensystem $J_{\lambda,\mu}\, C_{\lambda,\mu}$ に対応する**中心拡大 $\mathfrak{K}''$ をとると，これは $\mathfrak{H}$ の表現群である．**
($\because\ \psi_{M_\rho}(J_{\lambda,\mu} C_{\lambda,\mu})$ $(\rho = 0, 1, \ldots, m-1)$ が nicht zwei einander assoziiert). □

1.3. １つの表現群から他の表現群を得ることのまとめ．

$\mathfrak{K}$ = eine durch die Elemente $J_{\lambda,\mu}$ bestimmte **Darstellungsgruppe** von $\mathfrak{H}$,

(**1**) $\exists$ höchstens(?) $n \geq 1$ Systeme :

$$C^{(0)}_{\lambda,\mu},\ C^{(1)}_{\lambda,\mu},\ \ldots,\ C^{(n-1)}_{\lambda,\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1),$$

von je h^2 Elemente der $\mathfrak{M}$, von denen nicht zwei einander assoziiert
(しかし，$\forall\, M_\rho$， $\psi_{M_\rho}(C^{(\kappa)}_{\lambda,\mu}) \sim \psi_{M_0}(C^{(\kappa)}_{\lambda,\mu}) = 1$， i.e., ψ を被せると trivial factor set に同値),
und

$$\mathfrak{G}^{(\nu)} = \mathfrak{M}G^{(\nu)}_0 + \mathfrak{M}G^{(\nu)}_1 + \cdots + \mathfrak{M}G^{(\nu)}_{h-1} \quad (G^{(\nu)}_\lambda\, G^{(\nu)}_\mu = C^{(\nu)}_{\lambda,\mu} G^{(\nu)}_{\varphi(\lambda,\mu)}),$$

$$[\mathfrak{G}^{(\nu)}, \mathfrak{G}^{(\nu)}] \cap \mathfrak{M} = \{E\}, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1),$$

(**2**) 任意の $\mathfrak{H}$ の表現群は次の n 個の $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ のどれかに同型：

$$\mathfrak{K}^{(\nu)} = \mathfrak{M}Q^{(\nu)}_0 + \mathfrak{M}Q^{(\nu)}_1 + \cdots + \mathfrak{M}Q^{(\nu)}_{h-1} \quad (Q^{(\nu)}_\lambda\, Q^{(\nu)}_\mu = J_{\lambda,\mu} C^{(\nu)}_{\lambda,\mu} Q^{(\nu)}_{\varphi(\lambda,\mu)})$$

【注】 $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ については，$C^{(\nu)}_{\lambda,\mu}$ が互いに assoziierte でないが，
$\mathfrak{K}^{(\nu)}$ については互いの同型関係は分からぬ． **(結果終わり)**

◆表現群の個数 n の計算の前に次を示す：

補題 II-1.1H. 上の n 個の中心拡大 $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ の間には，第１種の同型は存在しない．

- とくに， $\mathfrak{H}$ vollkommene (i.e., Aut($\mathfrak{H}$) = Int($\mathfrak{H}$), $Z_{\mathfrak{H}} = \{E\}$) のときには，
$\mathfrak{K}^{(\nu)}$ のどの２つも assoziiert でない（補題 I-1.1H による）．

しかしながら，$\mathfrak{H}$ nicht vollkommene のときには，$\mathfrak{K}^{(\nu)}$ の間に第２種，第３種の同型が有り得る．

1.4. n 個の Elementensysteme $C^{(\rho)}_{\lambda,\mu}$ の決定法.

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}G_0 + \mathfrak{M}G_1 + \cdots + \mathfrak{M}G_{h-1} \quad (G_\lambda G_\mu = C_{\lambda,\mu}G_{\varphi(\lambda,\mu)}),$$

eine der n Gruppe $\mathfrak{G}^{(\nu)}$, を出発点として他の $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ を決める．

$$\mathfrak{R}' := [\mathfrak{G},\mathfrak{G}] = \{R'_0, R'_1, \ldots, R_{r-1}\} \qquad (r = |\mathfrak{R}'|,\ \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{M} = \{E\}).$$

$R'_0, R'_1, \ldots, R'_{r-1}$ は mod $\mathfrak{M}$ で inkongruente であるから G_λ の一部としてとれる：

$$\{G_0, G_1, \ldots, G_{h-1}\} \supset \{R'_0, R'_1, \ldots, R'_{r-1}\},$$

$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}T_0 + \mathfrak{R}T_1 + \cdots + \mathfrak{R}T_{s-1}, \quad \mathfrak{R} := [\mathfrak{H},\mathfrak{H}] \cong \mathfrak{R}' \qquad (rs = h,\ T_0 = E),$

*Abel*sche Gruppe $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}/\mathfrak{R} \ni \mathfrak{R}T_\kappa =: S_\kappa$.

wenn $T_\sigma = H_\lambda$, bezeichne $T'_\sigma := G_\lambda$, $S'_\sigma := \mathfrak{R}'T'_\sigma \in \mathfrak{G}/\mathfrak{R}' \hookleftarrow \mathfrak{M}$,

$1 \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow 1$ より次を得る：

$$1 \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{S}' := \mathfrak{G}/\mathfrak{R}' \longrightarrow \mathfrak{S} := \mathfrak{H}/\mathfrak{R} \longrightarrow 1, \quad \mathfrak{R}' := [\mathfrak{G},\mathfrak{G}],\ \mathfrak{R} := [\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$$

（可換群 $\mathfrak{S}'$ は，可換群 $\mathfrak{S}$ の可換群 $\mathfrak{M}$ による中心拡大）

$$|\mathfrak{G}/\mathfrak{R}'| = |\mathfrak{H}/\mathfrak{R}| \cdot |\mathfrak{M}| = |\mathfrak{S}| \cdot |\mathfrak{M}|, \quad \text{so}$$

$$S_\rho S_\sigma = S_{\chi(\rho,\sigma)} \quad (\rho, \sigma = 0, 1, \ldots, s-1) \quad \Longrightarrow$$

(6) $\quad S'_\rho S'_\sigma = S'_\sigma S'_\rho = D_{\rho,\sigma} S'_{\chi(\rho,\sigma)} \ (D_{\rho,\sigma} = D_{\sigma,\rho} =: D_{S_\rho,S_\sigma} \in \mathfrak{M},\ \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{M} = \{E\}).$

s^2 Elemente $D_{\rho,\sigma} \in \mathfrak{M} \implies h^2$ 個の $C_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{M}$ が決まる．

$(\because\ G_\lambda G_\mu = C_{\lambda,\mu}G_{\varphi(\lambda,\mu)} \implies \mathfrak{R}'G_\lambda \cdot \mathfrak{R}'G_\mu = C_{\lambda,\mu} \cdot \mathfrak{R}'G_{\varphi(\lambda,\mu)};\ \ \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{M} = \{E\})$

後者に対する h^3 個の方程式は前者に対する s^3 個の次の方程式になる【方程式の個数が減った】：

(7) $$D_{S,T}\, D_{ST,U} = D_{S,TU}\, D_{T,U} \qquad (S,T,U = S_0, S_1, \ldots, S_{s-1},\ \ D_{S,T} \in \mathfrak{M}),$$

この方程式は, (6) を通して，

$\mathfrak{S}' =$ eine durch die $\mathfrak{M}$ ergänzte *Abel*sche Gruppe von $\mathfrak{S}$ を与える．

1.5. 可換群 $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}/\mathfrak{R}$ の $\mathfrak{M}$ による可換な中心拡大 $\mathfrak{S}' = \mathfrak{G}/\mathfrak{R}'$ の個数.

可換群 $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}/\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} = [\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$, の $\mathfrak{M}$ による中心拡大 $\mathfrak{S}' = (\mathfrak{M},\mathfrak{S}) = \mathfrak{G}/\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}' = [\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, で可換なものの非同型の個数 n を評価する，すなわち，(7) を満たす $D_{S,P}$ の同値類の個数を評価する：

可換群 $\mathfrak{S}$ の Invarianten を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ とする（$\varepsilon_2|\varepsilon_1,\ \varepsilon_3|\varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_k|\varepsilon_{k-1}$）：

$$\mathfrak{S} \cong C_{\varepsilon_1} \times C_{\varepsilon_2} \times \cdots \times C_{\varepsilon_k}, \qquad C_\ell := \text{zyklische Gruppe der Ordnung } \ell.$$

$e_1, e_2, \ldots, e_\ell$, を Invarianten der *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{M}$ とする．

($\Diamond$) $$n = \prod_{1\le\alpha\le k}\ \prod_{1\le\beta\le\ell} (\varepsilon_\alpha, e_\beta).$$ （上界？）

命題 II-I. $\mathfrak{N} := [\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$, $\begin{cases} \text{可換群 } \mathfrak{H}/\mathfrak{N} \text{ の Invarianten を，} \varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k,\ \varepsilon_{i+1}|\varepsilon_i, \\ \text{可換群 } \mathfrak{M} \text{ の Invarianten を，} e_1,e_2,\ldots,e_\ell,\ e_{i+1}|e_i, \end{cases}$

とすると，相異なる表現群の個数は，上の「可換群 $\mathfrak{G}$ の可換群 $\mathfrak{M}$ による可換な中心拡大 $\mathfrak{G}'$ の個数」($\Diamond$) の n を越えない．

もし，$\mathfrak{H}$ が vollkommene (i.e., $\mathrm{Aut}(\mathfrak{H}) = \mathrm{Int}(\mathfrak{H})$, $Z_{\mathfrak{H}} = \{E\}$) ならば，個数は上の n に等しい．

命題 II-II. $|\mathfrak{G}| = |\mathfrak{H}/\mathfrak{N}|$ と $|\mathfrak{M}|$ とは互いに素 $\Longrightarrow$ $\mathfrak{H}$ の表現群は 1 個のみ．

なお，可換群の可換群による中心拡大の個数，もしくはさらに限定された状況「可換群の射影表現」については文献 [Furch], [Mo] を見よ．

例 II-1.1H. 「巡回群の Schur multiplier は自明」

「巡回群の中心拡大は自明なもののみ」

$\boldsymbol{Z}_2$ の $\boldsymbol{Z}_2$ による中心拡大は可換群になり，$\boldsymbol{Z}_2^2, \boldsymbol{Z}_4$ の 2 個．

$\boldsymbol{Z}_2^2$ の $\boldsymbol{Z}_2$ による中心拡大は，可換群になるものが 4 個あり，ほかに非可換群になるものがある： $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$,

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{Z}_2 \cong \{\pm 1\} \longrightarrow \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \longrightarrow \boldsymbol{Z}_2^2 \longrightarrow 1.$$

2 可換群 $\mathfrak{A}$ による $\mathfrak{H}$ の中心拡大 $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}' := [\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ の場合

前節と密接な関係がある課題: 可換群 $\mathfrak{A}$ と任意の有限群 $\mathfrak{H}$ に対して，durch $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe $\mathfrak{L} = (\mathfrak{A},\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ を全て求めること．

ここでは，条件 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}] \supset \mathfrak{A}$ の条件下で満足しよう．

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}\,L_0 + \mathfrak{A}\,L_1 + \cdots + \mathfrak{A}\,L_{h-1}, \quad a := |\mathfrak{A}|,$$

$$L_\lambda\,L_\mu = A_{\lambda,\mu}\,L_{\varphi(\lambda,\mu)},\ \ A_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{A}\ \ (\lambda,\mu = 0,1,\ldots,h-1),$$

$\widehat{\mathfrak{A}}$ の全ての元 $\chi^{(0)}(A),\ \chi^{(1)}(A),\ \ldots,\ \chi^{(a-1)}(A)$, をとる．

◆ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$ をとる:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}Q_0 + \mathfrak{M}Q_1 + \cdots + \mathfrak{M}Q_{h-1}, \qquad \mathfrak{M} = \text{Multiplikator von } \mathfrak{H},$$

$$Q_\lambda Q_\mu = J_{\lambda,\mu}\,Q_{\varphi(\lambda,\mu)}\ \ (J_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{M},\ \lambda,\mu = 0,1,\ldots,h-1),$$

$$\psi_{M_\rho}(J) \in \widehat{\mathfrak{M}},\ \ M_\rho \in \mathfrak{M}.$$

◆ $\mathfrak{L} = (\mathfrak{A},\mathfrak{H})$ に戻って，

(8) $$\chi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu})\ \ (a \text{ 個},\ \alpha = 0,1,\ldots,a-1),\quad \chi^{(0)} = \mathbf{1}$$

は仮定 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}] \supset \mathfrak{A}$ により，$\mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$, すなわち，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, と思える（cf. [I, §2]）．

従って，$\widehat{\mathfrak{M}}$ から来たもの

$\chi_{M_\rho}(J_{\lambda,\mu})$ (m 個, $\alpha = 0, 1, \ldots, m-1$),

のどれかに assoziiert. それらを,

(9) $\chi_{M_0}(J_{\lambda,\mu}),\ \chi_{M_1}(J_{\lambda,\mu}),\ \ldots,\ \chi_{M_{a-1}}(J_{\lambda,\mu})$,

とする. $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{M}' := \{M_0, M_1, \ldots, M_{a-1}\} \cong \mathfrak{A}$,

$\mathfrak{N} := \mathfrak{M}'^{\perp} := \{N \in \mathfrak{M}\,;\ \psi_M(N) = 1\ (M \in \mathfrak{M}')\}$,

$\mathfrak{M}' \cong \mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$, ゆえに, $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ と同一視してよい. $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ の代表元系をとり,

$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}K_0 + \mathfrak{N}K_1 + \cdots + \mathfrak{N}K_{a-1}$, $A_\beta \leftrightarrow \mathfrak{N}K_\beta$, とするとき,

$\chi^{(\alpha)}(A_\beta) = \chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N}K_\beta) = \psi_{M_\alpha}(K_\beta)$ が $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ の a 個の指標,

$J_{\lambda,\mu} = N_{\lambda,\mu}K_{\lambda,\mu}$, $A_{\lambda,\mu} = \mathfrak{N}K'_{\lambda,\mu}$ ($N_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{N}$; $K_{\lambda,\mu}, K'_{\lambda,\mu} \in \{K_0, K_1, \ldots, K_{a-1}\}$)

とおくと, (8), (9) はそれぞれ次になる:

$\chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N}K'_{\lambda,\mu})$ bzw. $\chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N}K_{\lambda,\mu})$,

§1 と全く同様に, $\exists$ Automomorphismus $\Psi :\ \mathfrak{N}K'_{\lambda,\mu} \to \mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu}$ von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$, so das

$\chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N}K'_{\lambda,\mu}) \sim \chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu})$,

$\mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu}$ には eine durch $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ergänzte Gruppe $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{H}$ が対応する. そして, $\mathfrak{L}$ との間に第 1 種の同型が存在する:

($\mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu}$ に対応する $\mathfrak{H}$ の中心拡大) $\mathfrak{L}' \overset{\text{第1種}}{\cong} \mathfrak{L}$ ($\mathfrak{N}K_{\lambda,\mu}$ に対応する $\mathfrak{H}$ の中心拡大),

$(\mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu})(\mathfrak{N}K_{\lambda,\mu})^{-1} =: B_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ とおくと,

$\chi^{(\alpha)}(B_{\lambda,\mu}) \sim \chi^{(0)}(B_{\lambda,\mu}) \equiv 1\ (\forall\,\alpha)$, で, この $B_{\lambda,\mu}$ に対応して,

$\exists$ eine durch $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe

$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}G_0 + \mathfrak{A}G_1 + \cdots + \mathfrak{A}G_{h-1}$ ($G_\lambda G_\mu = B_{\lambda,\mu}G_{\varphi(\lambda,\mu)}$) ($\mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N},\ g = ah$),

が存在し, $\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{A} = \{E\}$, $\mathfrak{R}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

◆ **§1, (6), (7) 前後とは異なって, ここ §2 では,**

$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}L_0 + \mathfrak{A}L_1 + \cdots + \mathfrak{A}L_{h-1}$, $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \supset \mathfrak{A}$, ($\mathfrak{H}$ の $\mathfrak{A}$ による中心拡大)

$L_\lambda L_\mu = A_{\lambda,\mu}L_{\varphi(\lambda,\mu)}$, $A_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{A}$ ($0 \le \lambda, \mu \le h-1$),

(仮定 $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \supset \mathfrak{A}$ の下では, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ により, $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ とする)

$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}Q_0 + \mathfrak{M}Q_1 + \cdots + \mathfrak{M}Q_{h-1}$, $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \supset \mathfrak{M}$, ($\mathfrak{H}$ の表現群, $\mathfrak{M}$ = Multiplikator)

$Q_\lambda Q_\mu = J_{\lambda,\mu}Q_{\varphi(\lambda,\mu)}$, $J_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{M}$,

$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}K_0 + \mathfrak{N}K_1 + \cdots + \mathfrak{N}K_{a-1}$, $\mathfrak{A} \ni A_\beta \leftrightarrow \mathfrak{N}K_\beta \in \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ($0 \le \beta \le a-1$),

$J_{\lambda,\mu} = N_{\lambda,\mu}K_{\lambda,\mu}$, $A_{\lambda,\mu} = \mathfrak{N}K'_{\lambda,\mu}$ ($N_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{N}$, $K_{\lambda,\mu}, K'_{\lambda,\mu} \in \{K_0, K_1, \ldots, K_{a-1}\}$),

$\mathfrak{N}K'_{\lambda,\mu}$ から $\mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu}$ に移る (cf. §1 : $J'_{\lambda,\mu} \to J''_{\lambda,\mu}$) : $\chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu}) \sim \chi^{(\alpha)}(\mathfrak{N}K_{\lambda,\mu})$ ($\forall\,\alpha$),

$\mathfrak{L}' = \mathfrak{A}L'_0 + \mathfrak{A}L'_1 + \cdots + \mathfrak{A}L'_{h-1}$, $[\mathfrak{L}', \mathfrak{L}'] \supset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}' \overset{\text{第1種}}{\cong} \mathfrak{L}$, ($\mathfrak{H}$ の $\mathfrak{A}$ による中心拡大)

$$L'_\lambda L'_\mu = (\mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu})\, L'_{\varphi(\lambda,\mu)},\quad \mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{M}/\mathfrak{N} = \mathfrak{A} \quad (0 \le \lambda, \mu \le h-1),$$

$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}G_0 + \mathfrak{A}G_1 + \cdots + \mathfrak{A}G_{h-1}$, $\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{A} = \{E\}$, $\mathfrak{R}' := [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, ($\mathfrak{H}$ の $\mathfrak{A}$ による中心拡大)

$$G_\lambda G_\mu = B_{\lambda,\mu} G_{\varphi(\lambda,\mu)},\quad B_{\lambda,\mu} := (\mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu})(\mathfrak{N}K_{\lambda,\mu})^{-1} \in \mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N},$$

【 $\mathfrak{K}$ を基準にして $\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{K}$ と $\mathfrak{L}'$ ($\overset{\text{第 1 種}}{\cong}$ $\mathfrak{L}$) との間をつなぐ.】

▲ $\mathfrak{G}$ の分類：

$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}T_0 + \mathfrak{R}T_1 + \cdots + \mathfrak{R}T_{s-1}$, $\mathfrak{R} = [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ $\quad (rs = h,\ T_0 = E,\ r := |\mathfrak{R}|)$,

$\mathfrak{S} := \mathfrak{H}/\mathfrak{R} = S_0 + S_1 + \cdots + S_{s-1}$, $S_\kappa := \mathfrak{R}T_\kappa$,

$\quad S_\rho S_\sigma = S_{\chi(\rho,\sigma)}$ (dans $\mathfrak{S}$),

$\mathfrak{S}' := \mathfrak{G}/\mathfrak{R}' = S'_0 + S'_1 + \cdots + S'_{ms-1}$ (可換群 $\mathfrak{S}$ の $\mathfrak{A}$ による可換群への中心拡大)

$\quad S'_\rho S'_\sigma = D_{\rho,\sigma} S'_{\chi(\rho,\sigma)}$ $(0 \le \rho, \sigma \le s-1)$, $D_{\rho,\sigma} \in \mathfrak{A}$; $[\mathfrak{S}', \mathfrak{S}'] \cap \mathfrak{M} = \{E\}$,

$\quad$【$T_\sigma = H_\lambda$ のとき, $T'_\sigma := G_\lambda$, $S'_\sigma := \mathfrak{R}'T'_\sigma$ $(0 \le \sigma \le s-1)$; $\mathfrak{R}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \cong \mathfrak{R}$】,

$\quad$【$\mathfrak{S}' = \mathfrak{G}/\mathfrak{R}'$ の代表元系 $A_\mu T'_\sigma \leftrightarrow A_\mu S'_\sigma$ $(0 \le \mu \le m-1, 0 \le \sigma \le s-1)$,

$\qquad \mathfrak{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}\}$; 集合として, $\mathfrak{S}' \cong \mathfrak{A} \times \mathfrak{S}$】

$$\begin{cases} S_1^{\varepsilon_1} = E,\ S_2^{\varepsilon_2} = E,\ \ldots,\ S_k^{\varepsilon_k} = E & (\text{基本関係式},\ \{S_1, \ldots, S_k\} : \mathfrak{S}\ \text{の基本生成元}), \\ S_1'^{\varepsilon_1} = B_1\mathfrak{R}',\ S_2'^{\varepsilon_2} = B_1\mathfrak{R}',\ \ldots,\ S_k'^{\varepsilon_k} = B_k\mathfrak{R}' & (B_\sigma \in \mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}) \\ & (\mathfrak{S}'\ \text{の基本関係式},\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{A}), \end{cases}$$

$B_1, \ldots, B_k$ が決まれば, $B_{\lambda,\mu}$ が決まる:

$\quad B_{\lambda,\mu} = \mathfrak{N}V_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$,

$\quad B_{\lambda,\mu} = B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \cdots B_k^{\beta_k}$, $B_\kappa = \mathfrak{N}V_\kappa \in \mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$,

$\quad (V_\kappa,\ V_{\lambda,\mu} \in \{K_0, K_1, \ldots, K_{a-1}\})$ とし,

$\quad$ §1 の $D_1, D_2, \ldots, D_k \in \mathfrak{M}$ の代わりに $V_1, V_2, \ldots, V_k$ をとり,
そこに現れた $C_{\lambda,\mu}$ を V_κ で決める：

$$C_{\lambda,\mu} = \overline{N}_{\lambda,\mu} V_1^{\beta_1} V_2^{\beta_2} \cdots V_k^{\beta_k} = N'_{\lambda,\mu} V_{\lambda,\mu} \qquad (\overline{N}_{\lambda,\mu},\ N'_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{N}),$$

$$J_{\lambda,\mu} C_{\lambda,\mu} = N_{\lambda,\mu} N'_{\lambda,\mu} K_{\lambda,\mu} V_{\lambda,\mu} = N''_{\lambda,\mu} K''_{\lambda,\mu} \quad (N_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{N})$$

これは, eine Darstellungsgruppe $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{H}$ を決め, さらに,

$\quad \mathfrak{K}'/\mathfrak{N}$ は "eine durch $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$"

$\quad \mathfrak{L}'$ は, "durch $\mathfrak{N}K''_{\lambda,\mu}$ von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ bestimmt" であり,

$$\mathfrak{L}'\ (\overset{\text{第 1 種}}{\cong}\ \mathfrak{L}) \cong \mathfrak{K}'/\mathfrak{N}.$$

逆に, 任意の $\mathfrak{H}$ の表現群 $\mathfrak{K}$ をとると, $\mathfrak{L} := \mathfrak{K}/\mathfrak{N}$ は,
eine durch $\mathfrak{A} := \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ で, $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \supset \mathfrak{A}$.

命題 II-III. $\mathfrak{H}$ の Multiplikator を $\mathfrak{M}$, 表現群を $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}'', \ldots$ とする.
可換群 $\mathfrak{A}$ による $\mathfrak{H}$ の中心拡大 $\mathfrak{L}$ で $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \supset \mathfrak{A}$ となるものが存在するのは, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ となる場合で, この種の中心拡大の全ては, 次で尽くされる：

$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ の場合, $\mathfrak{K}/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{K}'/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{K}''/\mathfrak{N}$, $\ldots$;
$\mathfrak{A}' = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}'$ の場合, $\mathfrak{K}/\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{K}'/\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{K}''/\mathfrak{N}'$, $\ldots$; $\ldots$.

この命題から, 応用上重要な次の命題を得る.

命題 II-IV. 中心拡大 $\mathfrak{L} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$ は $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \supset \mathfrak{A}$ であるとする.

$$\left\{\begin{array}{l} a := |\mathfrak{A}|,\ m' = \text{Ordnung des Multiplikators } \mathfrak{M}' \text{ von } \mathfrak{L}, \\ m := \text{Ordnung des Multiplikators } \mathfrak{M} \text{ von } \mathfrak{H}, \end{array}\right. \quad \text{とすると,} \qquad m | am'.$$

とくに, $\mathfrak{L}$ の表現群 $\mathfrak{Q}$ で, 同時に $\mathfrak{H}$ の中心拡大であるものがあれば, $\mathfrak{Q}$ はまた $\mathfrak{H}$ の表現群であり, かつ $m = am'$.

$\mathfrak{L}$ が abgeschlossene (Multiplikator が自明) であれば, $\mathfrak{L}$ は $\mathfrak{H}$ の表現群である.

3 Multiplikator と表現群のより効率的な計算法

3.1. より簡単な計算法.

[I, §3] **の計算法の復習.** $H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)}$ $(\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1)$ [$\mathfrak{H}$ の基本関係式]

無限群 $\mathfrak{K}'$ の定義 (これの商群が表現群 $\mathfrak{K}$)：

生成元系 $\quad Q_0, Q_1, \ldots, Q_{h-1}$

$$\text{基本関係式} \quad \left\{\begin{array}{lll} Q_\lambda Q_\mu Q_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1} = J_{H_\lambda, H_\mu} & (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1), & h^2 \text{ 個}, \\ Q_\nu\, J_{H_\lambda, H_\mu} = J_{H_\lambda, H_\mu}\, Q_\nu & (\lambda, \mu, \nu = 0, 1, \ldots, h-1), & h^3 \text{ 個}, \\ J_{P,Q}\, J_{PQ,R} = J_{P,QR}\, J_{Q,R} & (P, Q, R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1}), & h^3 \text{ 個}, \end{array}\right.$$

$\mathfrak{K}' := \langle Q_0, Q_1, \ldots, Q_{h-1} \rangle = \langle Q_\nu, J_{H_\lambda, H_\mu}\ ;\ \lambda, \mu, \nu = 0, 1, \ldots, h-1 \rangle$,

可換群 $\mathfrak{N}' := \langle J_{P,Q}\ ;\ P, Q \in \mathfrak{H} \rangle \subset \mathfrak{K}'$, $\quad \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' \times \mathfrak{N}$,

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{N}'' & = & \text{Rang } h \text{ の無限可換群でどの元も無限位数}, \\ \mathfrak{N} & = & \mathfrak{T} \cap \mathfrak{N}' \text{ は } \mathfrak{N}' \text{ に入る最大の有限群}, \qquad \mathfrak{T} := [\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'], \\ \mathfrak{N} & \cong & \mathfrak{M} \text{ (Multiplikator von } \mathfrak{H}), \end{array}\right.$$

(復習終わり)

- **より効率的な計算法：**

$$\left\{\begin{array}{lll} \textbf{生成元系}\text{(当然小さい)：} & S_1 := H_1,\ S_2 := H_2,\ \ldots,\ S_n := H_n & (H_\lambda\text{'s の一部}), \\ \textbf{基本関係式：} & f_\kappa(S_\nu) = E \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, q) & (f_\kappa \text{ 有理単項式}), \end{array}\right.$$

生成させる無限群 $\mathfrak{K}'$ (それから表現群 $\mathfrak{K}$ を作る)：

生成元 $H_\lambda \in \mathfrak{H}$ に対応する $Q_\lambda \in \mathfrak{K}'$ を T_λ とかく $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$

$\mathfrak{S} := \langle T_1, T_2, \ldots, T_n \rangle \subset \mathfrak{K}'$ は次の qn 個の関係式でも定義できる：

(10) $\qquad T_\lambda \cdot f_\kappa(T_\nu) = f_\kappa(T_\nu) \cdot T_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \kappa = 1, 2, \ldots, q).$

q 個の元　　$J_1 := f_1(T_\nu),\ J_2 := f_2(T_\nu),\ \ldots,\ J_q := f_q(T_\nu),$

は $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{K}'$ に入る．$\mathfrak{B}' := \langle J_1, J_2, \ldots, J_q\rangle \subset \mathfrak{N}' \cap \mathfrak{G},$

$H_\lambda = g_\lambda(S_\nu)$ $(\mathrm{im}\,\mathfrak{H})$ とする（$\nu = 1,2,\ldots,n$ では，$g_\lambda(X) = X$）とき，

$G_\lambda := g_\lambda(T_\nu) \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{K}'$ ：

$G_\lambda\, G_\mu\, G_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1} =: F_{H_\lambda, H_\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1)$

を J_κ で書き表せる．逆に，J_κ は F_{H_λ, H_μ} で書き表せる．

(11)　　$F_{P,Q}\, F_{PQ,R} = F_{P,QR}\, F_{Q,R},$　　は次の形の s 個に書き表せる：

(12)　　$J_1^{\beta_{\sigma 1}}\, J_2^{\beta_{\sigma 2}} \cdots J_q^{\beta_{\sigma q}} = E \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$

後者は，可換群 $\mathfrak{B}' = \langle J_1, J_2, \ldots, J_q\rangle$ の基本関係式系と思える．

$\mathfrak{K}' \ni Q_\lambda = C_\lambda\, G_\lambda, \quad C_\lambda \in \mathfrak{N}', \quad C_1 = C_2 = \ldots = C_n = E,$ の形なので，

$J_{H_\lambda, H_\mu} = C_\lambda\, C_\mu\, C_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1}\, F_{\varphi(\lambda,\mu)}$

従って，

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}' &:= \langle J_{P,Q}\,;\, P, Q \in \mathfrak{H}\rangle \\ &= \langle J_1, J_2, \ldots, J_q\,;\, C_0, C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots, C_{h-1}\rangle\end{aligned}$$

$\mathfrak{B}' = \langle J_1, J_2, \ldots, J_q\rangle = \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'',$

$\mathfrak{B}$ = 有限群，$\mathfrak{B}'' = \mathrm{Rang}\ k$ で任意の元 $(\neq e)$ が無限位数．

補題 II-3.1H. Rang k von $\mathfrak{B}''$: $k = n$.
また，$\mathfrak{B}$ (=‘$\mathfrak{B}'$ に含まれる最大の有限群’) $= \mathfrak{N}$.

補題 II-3.2H.
$\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M} \quad \Longrightarrow \quad$ (12) の巾の行列 $(\beta_{\sigma\kappa})$ は Rang $= q - n$ で，それの 1 より大なる Elementarteiler は可換群 $\mathfrak{M}$ の Invarianten $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$ と一致する．
とくに，$m = e_1 e_2 \cdots e_\ell$ は $(\beta_{\sigma\kappa})$ の $(q-n)$ 次小行列式の最大公約数である．

3.2. 応用上で重要な注意（$m = |\mathfrak{M}|$ の上界）．

関係式 (12) は，部分群 $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{G}$ を完全に決定する．従って，(10) から導かれる $J_\kappa = f_\kappa(T_\nu)$ の間の関係式は (12) からも来る．実際，

$J_1^{\gamma_1}\, J_2^{\gamma_2} \cdots J_q^{\gamma_q} = E$　が導かれたとすると，

$\gamma_\kappa = \sum_{\sigma=1}^{q} a_\sigma\, \beta_{\sigma\kappa} \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots, q, \quad a_\sigma \in \boldsymbol{Z})$

$\therefore$　(10) より得られた s' 個の式　$J_1^{\gamma_{\sigma 1}}\, J_2^{\gamma_{\sigma 2}} \cdots J_q^{\gamma_{\sigma q}} = E,$

$\Longrightarrow$　$s' \times q$ 型行列 $(\gamma_{\sigma\kappa})$ の Elementalteiler は $(\beta_{\sigma\kappa})$ の $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$ によって割り切れる．　$\Longrightarrow$　$(\gamma_{\sigma\kappa})$ の Rang が $q-n$ のときには，$(q-n)$ 次の小行列式の最大公約数 $\overline{m}$ は m で割れる．　これは，m の上界を与える．

3.3. さらに別の計算法.

$s_1, s_2, \ldots, s_n$ を $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathfrak{H}$ の位数とする．$\mathfrak{G}$ の生成元 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ に次の条件を付加する：

(16) $$T_1^{s_1} = E, \quad T_2^{s_2} = E, \quad \ldots, \quad T_n^{s_n} = E.$$

補題 II-3.3H. 関係式 (10), (16) で定義される群 $\mathfrak{G}'$ は有限群である.
さらに，位数 $|\mathfrak{G}'|$ は $h = |\mathfrak{H}|$ と素な素因数を持たない.

補題 II-3.4H. $|[\mathfrak{G}', \mathfrak{G}']| = mr, \quad m = |\mathfrak{M}|, \quad r = |\mathfrak{R}|, \quad \mathfrak{R} = [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}].$

◆ しばしば，$\mathfrak{G}'$ の位数や性質が定義関係式から突き止められ得る.

$\mathfrak{M} = [\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'] \cap \mathfrak{A}$ によって, Multiplikator $\mathfrak{M}$ をも求められる.
ここに， $\mathfrak{A} := \langle J_\kappa = f_\kappa(T_\nu)\,;\, 0 \le \kappa \le q \rangle \subset \mathfrak{G}'$ ($\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}'$ との違いは?)

$(\mathfrak{B}' := \langle J_\kappa = f_\kappa(T_\nu) \rangle \subset \mathfrak{G} \subset \mathfrak{K}')$

さらに，$\mathfrak{G}'$ の代わりに， $\mathfrak{G}'' := \langle A_1T_1, A_2T_2, \ldots, A_nT_n \rangle \subset \mathfrak{G}'$ を用いても良い.
ここに， $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ は任意の元である.

4 今までの方法を応用した計算例

(10) $$T_\lambda \cdot f_\kappa(T_\nu) = f_\kappa(T_\nu) \cdot T_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \kappa = 1, 2, \ldots, q).$$

で定義した群が,

$$\mathfrak{G} := \langle T_1, T_2, \ldots, T_n\,;\,(10) \rangle \subset \mathfrak{K}'$$

であり，さらに

(16) $$T_1^{s_1} = E, \quad T_2^{s_2} = E, \quad \ldots, \quad T_n^{s_n} = E.$$

を付加したのが，$\mathfrak{G}' := \langle T_1, T_2, \ldots, T_n\,;\,(10), (16) \rangle$ である.

例 II-4.1. $\mathfrak{H} = C_h =$ 位数 h の巡回群：

$S_1^h = E$，故に，$n = 1, q = 1,\ f_1(T_1) = {T_1}^h$
$\Longrightarrow\ \mathfrak{G}'$: ${T_1}^h = E,\ m = |\mathfrak{M}| = 1,\ \therefore\ \mathfrak{H}$ abgeschlossene.

例 II-4.2. $\mathfrak{Q}_{t+1}$, die Gruppe der Ordnung 2^{t+1} von Quaternionentypus:

(17) $$S_1^{2^t} = E, \quad S_2^2 = S_1^{2^{t-1}}, \quad S_2^{-1}S_1S_2 = S_1^{-1} \qquad (t \ge 2)$$

$m = 1$, abgeschlossene

この群 $\mathfrak{Q}_{t+1}$ の**特徴付け**： ① 唯 1 つの位数 2 の元を持つ， ② 巡回群ではない.

例 II-4.3. $\mathfrak{Q}'_{t+1}$, die Gruppe der Ordnung 2^{t+1} $(t \ge 3)$:

(19) $$S_1^{2^t} = E, \quad S_2^2 = E, \quad S_2^{-1}S_1S_2 = S_1^{-1+2^{t-1}} \qquad (t \ge 3)$$

$m = 1$, abgeschlossene $\qquad (\mathfrak{Q}'_{t+1} \cong C_{2^t} \rtimes C_2)$.

ここでの例 II-4.1, II-4.2, II-4.3, および命題 I-X (cf. [I]) により,

命題 II-V. $\mathfrak{H}$ の位数 h の素因数 p の成分を p^α とする．そして，$\mathfrak{H}$ の位数 p^α の部分群が，巡回群か，もしくは $p=2$ のときには $\mathfrak{Q}_{t+1}$（例 II-4.2）または $\mathfrak{Q}'_{t+1}$（例 II-4.3）でもよいとする．

このとき，$m = |\mathfrak{M}|$ は p で割れない．ここに，$\mathfrak{M} = \text{Multiplikator von } \mathfrak{H}$.

例 II-4. 番外. 位数が p 巾の群で，abgeschlosse なもの：

$$P^{p^\mu} = E, \quad Q^{p^\nu} = E, \quad Q^{-1}PQ = P^{1+p^{\mu-\nu}} \qquad (\text{位数 } p^{\mu+\nu}),$$

$$\text{ここに，} \nu > 0, \text{ かつ，} \begin{cases} \mu > \nu & (p > 2 \text{ のとき}), \\ \mu > \nu + 1 & (p = 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

例 II-4.4. $\mathfrak{D}_t$, Diedergruppe der Ordnung 2^t $(t \geq 3)$:

$$P_1{}^{2^{t-1}} = E, \quad P_2{}^2 = E, \quad P_2{}^{-1}P_1P_2 = P_1{}^{-1},$$

Multiplikator : $m = 2$, $\mathfrak{M} = E + M$,

表現群： $\mathfrak{Q}_{t+1}$, $\mathfrak{Q}'_{t+1}$, $\mathfrak{D}_{t+1}$, 3 個

Note II-4.1H. $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_t$ に対し，$\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ は可換群で，Invarianten は $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 2$ $(k=2)$; $\mathfrak{M}$ の Invarianten は，$e_1 = 2$ $(\ell = 1)$,

$$\therefore\ n = \prod_{1 \leq \alpha \leq k} \prod_{1 \leq \beta \leq \ell} (\varepsilon_\alpha, e_\beta) = 2 \cdot 2 = 4 > 3 = \text{実在の表現群の個数（評価との差あり）}$$

例 II-4.5 (直積群の Multiplikator と表現群).

命題 II-VI. 2つの有限群 $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$;

その Kommutatorgruppen $\mathfrak{R} := [\mathfrak{V}, \mathfrak{V}]$, $\mathfrak{S} := [\mathfrak{W}, \mathfrak{W}]$;

$\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ の Multiplikatorgruppen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.

可換群 $\mathfrak{V}/\mathfrak{R}$, $\mathfrak{W}/\mathfrak{S}$ の Invarianten は，$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \eta_\ell$.

$\Longrightarrow$ 直積群 $\mathfrak{H} := \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ の Multiplikator は，

$$\mathfrak{C} \times \mathfrak{D} \times \prod_{\alpha,\beta} C_{(\eta_\alpha, \zeta_\beta)} \qquad (\text{ここに，} 1 \leq \alpha \leq k,\ 1 \leq \beta \leq \ell).$$

命題 II-VIbisH. 2つの有限群 $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$;

$|\mathfrak{V}| = r$, $|\mathfrak{W}| = s$; Multiplikatorgruppen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.

$\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ の表現群を，

$$\begin{cases} \mathfrak{V}' = \mathfrak{C}V'_0 + \mathfrak{C}V'_1 + \cdots + \mathfrak{C}V'_{r-1}, \\ \mathfrak{W}' = \mathfrak{D}W'_0 + \mathfrak{D}W'_1 + \cdots + \mathfrak{D}W'_{s-1}, \end{cases} \qquad \text{とする.}$$

直積群 $\mathfrak{H} := \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ の表現群は，

$$W'_\rho V'_\kappa = J_{\kappa,\rho} V'_\kappa W'_\rho \quad \text{により，中心元 } J_{\kappa,\rho} \text{ を導入すれば，}$$

$$\mathfrak{V}' \times \mathfrak{W}' \times \prod_{\substack{1 \leqslant \alpha \leqslant k, \\ 1 \leqslant \beta \leqslant \ell}} C_{(\eta_\alpha, \zeta_\beta)}, \quad \langle J_{\alpha,\beta} \rangle \cong C_{(\eta_\alpha, \zeta_\beta)}. \qquad \square$$

▼ **命題 II-VI の証明も省略する.**

命題 II-VII. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \cdots \times \mathfrak{H}_n$,

$\mathfrak{R}_\nu := [\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{H}_\nu]$, $\mathfrak{M}_\nu =$ Multiplikator von $\mathfrak{H}_\nu$,

$\mathfrak{H}_\nu/\mathfrak{R}_\nu = \prod_{1\le u\le k_\nu} C_{\varepsilon_{\nu u}}$

$$\Longrightarrow \quad \text{“Multiplikator von } \mathfrak{H}\text{”} = \prod_{1\le\nu\le n} \mathfrak{M}_\nu \times \prod_{\mu<\nu} \prod_{\substack{1\leqslant u\leqslant k_\mu \\ 1\leqslant v\leqslant k_\nu}} C_{(\varepsilon_{\mu u}, \varepsilon_{\nu v})}.$$

任意の巡回群は abgeschlossene であるから,

命題 II-VIII(可換群の場合). $\mathfrak{H}$ **可換群**で，その任意の基底の元の位数が，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ とする．そのとき，$\mathfrak{H}$ の Multiplikator $\mathfrak{M}$ は,

$$\mathfrak{M} = \prod_{1\le i<j\le n} C_{(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}.$$

5 Gruppen $\mathfrak{F}_{p^n} := PSL(2,K)$, $\mathfrak{L}_{p^n} := SL(2,K)$, $\mathfrak{H}_{p^n} := PGL(2,K)$, $\mathfrak{G}_{p^n} := GL(2,K)$, $K = GF[p^n]$

ここに，Galoissche Felde $K := GF[p^n]$，$|GF[p^n]| = p^n$，$x^{p^n} - x = 0$ の解.

1. Die Gruppe $\mathfrak{F}_{p^n} := PSL(2,K)$: $p^n > 3$ のときには，単純群,

$$|\mathfrak{F}_{p^n}| = \begin{cases} 2^n(2^{2n}-1) & p = 2, \\ \dfrac{p^n(p^{2n}-1)}{2} & p \ge 3, \end{cases}$$

2. Die Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n} := SL(2,K)$: $p = 2$ のときには，$\mathfrak{L}_{p^n} \cong \mathfrak{F}_{p^n}$.

$\ell := |\mathfrak{L}_{p^n}| = p^n(p^{2n}-1)$.

3. Die Gruppe $\mathfrak{H}_{p^n} := PGL(2,K)$: $p = 2$ のときには，$\mathfrak{H}_{p^n} \cong \mathfrak{L}_{p^n} \cong \mathfrak{F}_{p^n}$,

$|\mathfrak{H}_{p^n}| = p^n(p^{2n}-1)$

4H. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{p^n} := GL(2,K)$: 中心 $\mathfrak{C} = \{v1_2\,;\ v \in K^\times\}$，$\mathfrak{G}_{p^n}/\mathfrak{C} \cong \mathfrak{H}_{p^n}$.

$|\mathfrak{G}_{p^n}| = (p^n-1)\cdot p^n(p^{2n}-1)$

5.1. 一般定理.

先ず一般定理を出す.

$\mathfrak{H}$ 群，$|\mathfrak{H}| = h$, $h = p^n r$, $n > 0$, $(p,r) = 1$, p 素数,

【仮定】　部分群 $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{H}$, $|\mathfrak{P}| = p^n$, **を可換と仮定する.**

$P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$, eine Basis von $\mathfrak{P}$, $A \in \mathfrak{H}$ は $\mathfrak{P}$ を不変にするとする．同型 $\mathfrak{P} \ni P \to P' := A^{-1}PA \in \mathfrak{P}$ は次で完全に決まる：

$$P'_\rho = A^{-1}P_\rho A = P_0^{a_{\rho 0}}\, P_1^{a_{\rho 1}} \cdot P_{k-1}^{a_{\rho,k-1}} \qquad (0 \le \rho \le k-1).$$

定理 II-5.1H. Multiplikator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ の位数 m，$p|m$ とすると,

(32) $$\left|a_{\rho\sigma} - x\,\delta_{\rho\sigma}\right| \equiv 0 \pmod p, \qquad \big((a_{\rho\sigma})\text{ 巾指数行列，} k\times k\big)$$

は，ξ, ξ^{-1}（逆数）のペアの解を持つ．　（その根は $GL[p^{k!}]$ の元と思える）．

5.2. Case of $\mathfrak{F}_{p^n} = PSL(2, GF[p^n])$ $(p > 2)$, $\mathfrak{L}_{p^n} = SL(2, GF[p^n])$ $(p \geq 2)$.

まず，$\mathfrak{F}_{p^n}$ $(p > 2)$, $\mathfrak{L}_{p^n}$ $(p \geq 2)$ を取り扱い，次を証明する．

命題 II-IX. Die Darstellungsgruppe von $\mathfrak{F}_{p^n}$ $(p > 2)$ $=$ $\mathfrak{L}_{p^n}$, $m = 2$, für $p^n \neq 9$.
Die Gruppe $\mathfrak{L}_{p^n}$ $(p \geq 2)$ は abgeschlossene (d.h. $m' = 1$), wenn $p^n \neq 4, \neq 9$.

(付加) $\left\{\begin{array}{ll} m := |\mathfrak{M}(\mathfrak{F}_{p^n})| = 6,\ m' := |\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_{p^n})| = 3, & \text{für } p^n = 9. \\ \mathfrak{L}_4 \cong \mathfrak{F}_5 \cong \mathfrak{A}_5 \text{ (5 次交代群)}, & \text{交代群の表現群は [Sch3]}, \\ \text{Darstellungsgruppe von } \mathfrak{L}_4 = \mathfrak{L}_5. & \end{array}\right.$

◆ $\mathfrak{L}_{p^n} = SL(2, GF[p^n])$, $p > 2$, では，　$F := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が中心元，
$\mathfrak{A} := E + F$, $\mathfrak{L}_{p^n}/\mathfrak{A} \cong \mathfrak{F}_{p^n}$,　$F \in [\mathfrak{L}_{p^n}, \mathfrak{L}_{p^n}]$,

定理 II-5.2H. $\mathfrak{L}_{p^n}$ abgeschlossene für $p^n \neq 4, \neq 9$, d.h. $m' = 1$.
ゆえに，$p^n \neq 9$ のとき，$m = 2$ で，$\mathfrak{L}_{p^n}$ は $\mathfrak{F}_{p^n}$ の Darstellungsgruppe.

定理 II-5.3H. $\mathfrak{L}_{p^n}$ の位数 p^n の部分群は可換である．実際，例として，

$$\mathfrak{P} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \ ;\ \gamma \in GF[p^n] \right\}.$$

その Invarianten はすべて p, すなわち，群は巡回群 C_p の直積.
従って，$m' = p^k$ の $k \leq \binom{n}{2}$.

- $p^n > 3$ のとき, $\mathfrak{F}_{p^n}$ は単純群で，表現群は 1 個のみ,
- $p^n = 3$ のときも例外ではない. $|\mathfrak{F}_3| = 12$, $|[\mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_3]| = 4$,

◆ $p^n = 9$ **の場合**：

定理 II-5.4H. $p^n = 9$ のとき，$m = 6$, $m' = 3$.

▼　$\mathfrak{F}_9 \cong \mathfrak{A}_6$ の表現群 $\mathfrak{L}'_9$ の位数は $6 \times 360 = 3 \times 720$ で，これは同時に $\mathfrak{L}_9 = SL(2, GF[9])$ の表現群でもある．　$\mathfrak{L}'_9$ の具体型は論文 III で与える．

命題 II-IX の結果として，

定理 II-5.5H. 位数 $p^n(p^{2n} - 1)$ の群 $\mathfrak{G}$ で次の性質 (*) を持つものは，$\mathfrak{L}_{p^n} = SL(2, GF[p^n])$ かまたは $\mathfrak{F}_{p^n} \times C_2 = PSL(2, GF[p^n]) \times C_2$ に限る:
性質 (*)　$\mathfrak{G}$ は位数 2 の部分群 $\mathfrak{A}$ で，$\mathfrak{G}/\mathfrak{A} \cong \mathfrak{F}_{p^n}$ となるものを持つ．

5.3. Case of $\mathfrak{H}_{p^n} = PGL(2, GF[p^n])$, $p > 2$.

群 $\mathfrak{H}_{p^n} = PGL(2, GF[p^n])$, $p > 2$, を調べる．
$\mathfrak{H}_{p^n} \supset \mathfrak{F}_{p^n} = PSL(2, GF[p^n])$ Index $= 2$, $\mathfrak{F}_{p^n} = [\mathfrak{H}_{p^n}, \mathfrak{H}_{p^n}]$.
◆ $p^n \neq 9$ とする．$|M(\mathfrak{F}_{p^n})| = 2$. Satz I-IX により，$m'' = |M(\mathfrak{H}_{p^n})|$ は奇素数を含まぬ．　$\therefore$ $m'' := |M(\mathfrak{H}_{p^n})| = 2^\lambda$.

まず，　$m''=1$, または, $m''=2$ が分かる.

◆ **Case 1:** $p^n \neq 9$. $\mathfrak{G}_{p^n} := GL(2, GF[p^n])$ を考える. $m'' := |M(\mathfrak{H}_{p^n})| = 2$.
実際，その中心は，$\mathfrak{C} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} v^\kappa & 0 \\ 0 & v^\kappa \end{smallmatrix} \right) \right\}$, 位数 $p^n - 1$ の巡回群. $\mathfrak{G}_{p^n}/\mathfrak{C} \cong \mathfrak{H}_{p^n}$.
また，$[\mathfrak{G}_{p^n}, \mathfrak{G}_{p^n}] = \mathfrak{L}_{p^n} = SL(2, GF[p^n])$, $|\mathfrak{L}_{p^n}| = 2|[\mathfrak{H}_{p^n}, \mathfrak{H}_{p^n}]|$.

◆ **Case 2:** $p^n = 9$. 例外ではない, i.e, $m'' = 2$.

命題 II-5.6H. 群 $\mathfrak{H}_{p^n} = PGL(2, GF[p^n])$, $p > 2$, は２つの同型でない表現群を持つ.
また，これらは abgeschlossene である.

5.4.　２個の $\mathfrak{H}_{p^n} = PGL(2, GF[p^n])$, $p > 2$, の表現群の構成.

eine primitive Wurzel w des $GL[p^{2n}]$: $w^{p^{2n}} = w$, $w^{p^{2n}-1} = 1$.
$v = w^{p^n+1}$ は $GL[p^n]$ の原始根,
$p^n - 1 = 2^r q$ (q 奇数) とし，$u := w^{\frac{(p^n+1)q}{2}}$ とおく.
$t := u^2 = w^{(p^n+1)q}$ とおくと，$t^{p^n-1} = 1$ ゆえ，$t \in GL[p^n]$, また,
$u^{2^r} = w^{\frac{p^{2n}-1}{2}}$, $\therefore$ $(u^{2^r})^2 = w^{p^{2n}-1} = 1$, $\therefore$ $u^{2^r} = -1$.

$$U := \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}, \ U' := \begin{pmatrix} u^{2^{r-1}+1} & 0 \\ 0 & u^{2^{r-1}-1} \end{pmatrix}; \ U^{2^r} = -E_2, \ (U')^2 = -U^2.$$

表現群　位数 $2p^n(p^{2n}-1)$ の群 $\begin{cases} \mathfrak{K}_{p^n} := \mathfrak{L}_{p^n} + U\mathfrak{L}_{p^n} = \mathfrak{L}_{p^n} \sqcup U\mathfrak{L}_{p^n}, \\ \mathfrak{K}'_{p^n} := \mathfrak{L}_{p^n} + U'\mathfrak{L}_{p^n} = \mathfrak{L}_{p^n} \sqcup U'\mathfrak{L}_{p^n}, \end{cases}$

命題 II-5.6H. 表現群 $\mathfrak{K}_{p^n}$ と $\mathfrak{K}'_{p^n}$ とは同型でない.

命題 II-5.7H. 2^c を $2p^n(p^{2n}-1)$ の素数 2 の因子とすると,
$\mathfrak{K}_{p^n}$ の位数 2^c の部分群は，Quaterniontypus の $\mathfrak{D}_c$ である.
$\mathfrak{K}'_{p^n}$ の位数 2^c の部分群は，$\mathfrak{D}'_c$（§4, 例 II-4.3）である.
これから，$\mathfrak{K}_{p^n}, \mathfrak{K}'_{p^n}$ abgeschlossene が分かる.

注 II-5.1H.
$\mathfrak{G}_{p^n} = GL(GF[p^n])$, $p \geq 2$, は abgeschlossene, 位数 $p^n(p^n-1)(p^{2n}-1)$.

表現群の表（平井作成）:

群	表現群	$m=\lvert\mathfrak{M}\rvert$	条件	コメント
$\mathfrak{F}_{p^n} =$ $PSL(2, GF[p^n])$	$\mathfrak{L}_{p^n}$	$m=2$	$p^n \neq 9$	$\mathfrak{L}_{p^n}$ abgeschlossene wenn $p^n \neq 4, \neq 9$, 単純群(wenn $p^n > 3$), $\lvert\mathfrak{F}_{p^n}\rvert = p^n(p^{2n}-1)/2 \ \ (p>3)$, $\lvert\mathfrak{F}_{2^n}\rvert = 2^n(2^{2n}-1) \ \ (p=2)$, $\mathfrak{F}_{2^n} \cong \mathfrak{L}_{2^n}$
$\mathfrak{F}_9$	$\mathfrak{L}'_9$	$m=6$ $\mathfrak{M}=\boldsymbol{Z}_6$ (cf. [Kar])	$p^n=9$	$\lvert\mathfrak{L}'_9\rvert = 6\cdot 360 = 3\cdot 720$, $\mathfrak{F}_9 \cong \mathfrak{A}_6$, 位数 360, $\mathfrak{L}'_9$ は $\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{L}_9$ の表現群でもある
$\mathfrak{L}_{p^n} =$ $SL(2, GF[p^n])$	$\mathfrak{L}_{p^n}$	$m=1$	$p^n \neq 4, \neq 9$	$\mathfrak{L}_{p^n}$ abgeschlossene wenn $p^n \neq 4, \neq 9$ $\lvert\mathfrak{L}_{p^n}\rvert = p^n(p^{2n}-1)$, $\lvert\mathfrak{L}_4\rvert = 60$, $\lvert\mathfrak{L}_9\rvert = 720$
$\mathfrak{L}_4$	$\mathfrak{L}_5$	$m=2$	$p^n=4$	$\mathfrak{L}_4 \cong \mathfrak{F}_5 \cong \mathfrak{A}_5$ $\lvert\mathfrak{L}_4\rvert = 60$, $\lvert\mathfrak{L}_5\rvert = 120$
$\mathfrak{L}_9$	$\mathfrak{L}'_9$	$m=3$	$p^n=9$	$\mathfrak{L}'_9$ の具体型は論文 III で与える $\mathfrak{L}'_9$ は $\mathfrak{A}_6$ の表現群でもある $\lvert\mathfrak{L}'_9\rvert = 6\cdot 360$, $\lvert\mathfrak{A}_6\rvert = 360$
$\mathfrak{H}_{p^n} =$ $PGL(2, GF[p^n])$	$\mathfrak{K}_{p^n}$, $\mathfrak{K}'_{p^n}$	$m=2$	$p>2$	$\mathfrak{K}_{p^n}$, $\mathfrak{K}'_{p^n}$ abgeschlossene $\mathfrak{K}_{p^n} = \mathfrak{L}_{p^n} \sqcup U\mathfrak{L}_{p^n}$, $\mathfrak{K}'_{p^n} = \mathfrak{L}_{p^n} \sqcup U'\mathfrak{L}_{p^n}$, $\lvert\mathfrak{H}_{p^n}\rvert = p^n(p^{2n}-1)$,
$\mathfrak{H}_{2^n}$	$\mathfrak{H}_{2^n}$	$m=1$	$p^n = 2^n, \neq 4$	$\mathfrak{H}_{2^n} \cong \mathfrak{L}_{2^n} \ \ (p^n = 2^n)$ $\mathfrak{H}_{2^n} \cong \mathfrak{L}_{2^n}$ abgeschlossene $(2^n \neq 4)$,
$\mathfrak{H}_4$	$\mathfrak{L}_5$	$m=2$	$p^n=4$	$\mathfrak{H}_4 \cong \mathfrak{L}_4$
$\mathfrak{G}_{p^n} =$ $GL(2, GF[p^n])$	$\mathfrak{G}_{p^n}$	$m=1$	$p \geqslant 2$	$\mathfrak{G}_{p^n}$ abgeschlossene $\lvert\mathfrak{G}_{p^n}\rvert = (p^n-1)\cdot p^n(p^{2n}-1)$

6 群 $\mathfrak{F}_{p^n}, \mathfrak{L}_{p^n}, \mathfrak{H}_{p^n}, \mathfrak{G}_{p^n}$ の線形表現または射影表現の指標

$\mathfrak{F}_{p^n} = PSL(2, GF[p^n])$, $\mathfrak{L}_{p^n} = SL(2, GF[p^n])$, $\mathfrak{H}_{p^n} = PGL(2, GF[p^n])$, $\mathfrak{G}_{p^n} = GL(2, GF[p^n])$.

Frobenius (1896, 1898, 1899) よりの引用で，『既約表現の行列要素の直交関係』，『誘導表現の指標』に関するものが１頁強ある．それを射影表現の場合に書き直して，以下は括弧撃破で指標の具体的計算をしている．そのはじめの部分の結果だけを採録した．

1. $\mathfrak{L}_s = SL(2, GF[p^n])$, $s := p^n \equiv 1 \pmod 2$.

◆ **共役類:** $\lvert\mathfrak{L}_s\rvert = s(s^2-1)$ 個の元が $k = s+4$ 個の共役類に分解：

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix},$$

B = ein Element der Ordnung $s+1$,

共役類	元の個数
(E), (F)	1
(P), (Q), (FP), (FQ)	$\dfrac{s^2-1}{2}$
(A^a) $(1 \le a \le \frac{s-3}{2})$	$s(s+1)$
(B^b) $(1 \le b \le \frac{s-1}{2})$	$s(s-1)$

$$\varepsilon := (-1)^{\frac{s-1}{2}},$$

表現群 $\mathfrak{L}_s = SL(2, GF[p^n])$, $s = p^n \equiv 1 \pmod 2$, **の指標表:**

名前	$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(\kappa)}$, $2 \leqslant \kappa \leqslant \frac{s-1}{2}$	$\chi^{(\kappa)}$, $\frac{s+1}{2} \leqslant \kappa \leqslant s-1$	ξ_1, ξ_2	η_1, η_2
χ の個数	1	1	$\dfrac{s-3}{2}$	$\dfrac{s-1}{2}$	2	2
$\chi(E)$	1	s	$s+1$	$s-1$	$\frac{1}{2}(s+1)$	$\frac{1}{2}(s-1)$
$\chi(F)$	1	s	$(-1)^{\alpha}(s+1)$	$(-1)^{\beta}(s-1)$	$\frac{\varepsilon}{2}(s+1)$	$-\frac{\varepsilon}{2}(s-1)$
$\chi(P)$	1	0	1	-1	$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\varepsilon s})$	$\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{\varepsilon s})$
$\chi(Q)$	1	0	1	-1	$\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{\varepsilon s})$	$\frac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{\varepsilon s})$
$\chi(A^a)$	1	1	$\rho^{a\alpha} + \rho^{-a\alpha}$	0	$(-1)^a$	0
$\chi(B^b)$	1	-1	0	$-(\sigma^{b\beta} + \sigma^{-b\beta})$	0	$-(-1)^b$

射影表現 3 部作

[Sch1] J. Schur, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50 (全集での論文番号は **4** なので，**[S4]** とも引用する)

[Sch2] J. Schur, *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* ibid., **132**(1907), 85–137 (**[S10]**).

[Sch3] J. Schur, *Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* ibid., **139**(1911), 155–250 (**[S16]**)

引 用 文 献：

[平井 1] 群の表現の指標について（経験よりの管見），第 12 回数学史シンポジュウム，津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**23**(2002), pp.84-94.

[平井 2] 対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事，ibid., **24**(2003), pp.53-58.

[平井 3] Schur の学位論文および対称群の表現，ibid., **25**(2004), pp.123-131.

[平井 4] Frobenius による「群の指標と表現」の研究，ibid., **26**(2005), pp.222-240.

[平井 5] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その 2），ibid., **27**(2006), pp.168-182.

[平井 6] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その 3），ibid., **28**(2007), pp.290-318.

[平井 7] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その 4），ibid., **29**(2008), pp.168-182.

[平井 8] 数学者から数学者へ／フロベニウス,『数学セミナー』2009, 1 月号, pp.6-7.

[平井 9] 数学者から数学者へ／シューア,『数学セミナー』2009, 2 月号, pp.6-7.

シュアーの表現論関連の論文： 全集第 I 巻

[**S1**] J. Schur, *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen* (Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

[**S4**] J. Schur, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50.

[**S6**] J. Schur, *Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 77–91.

[**S7**] J. Schur, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 406–432.

[**S9**] J. Schur, *Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, 164–184.

the following [F75], [F76] are taken from Collected Works of Frobenius:

[**F75**] (with Frobenius) *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 186–208(1906).

[**F76**] (with Frobenius) *Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 209–217(1906).

[**S10**] J. Schur, *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **132**(1907), 85–137.

[**S11**] J. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, 664–678.

[**S14**] J. Schur, *Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen,* American Mathematical Society Transactions, **10**(1909), 159–175.

[**S16**] J. Schur, *Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **139**(1911), 155–255.

[**S17**] J. Schur, *Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1911, Physikalisch-Mathematische Klasse, 619–627.

[**S18**] J. Schur, *Über Gruppen linearer Substitutionen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper,* Math. Annalen, **71**(1911), 355–367.

（注： [S4], [S10], [S16] は上記の射影表現三部作 [Sch1], [Sch2], [Sch3] と同じである）

全集第 II 巻

[**S43**] J. Schur, *Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form* (mit A. Ostrowski), ????

[**S51**] J. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I. Mitteilung*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 189-208.

[**S52**] J. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 297-321.

[**S53**] J. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie III. Vereinfachung des Integralkalküls, Realitätsfragen*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 346-355.

全集第 III 巻

[**S58**] J. Schur, *Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind*, ???Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 19??, ???-???.

[**S59**] J. Schur, *Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1927, 58-75.

[**S62**] J. Schur, *Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1928, 100-124.

[**S68**] J. Schur, *Zum Irreduzibilitätsbegriff in der Gruppen linearer homogener Substitutionen* (mit R. Brauer), ???Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 19??, ???-???.

[**S73**] J. Schur, *Zur Theorie der einfache transitiven Permutationsgruppen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1933, Physikalisch-Mathematische Klasse, 598–623.

Appendix: 関連する論文のリスト.

線形表現と指標との関連：

[**B1**] W. Burnside, *On the reduction of a group of homogeneous linear substitutions of finite order*, Acta Math., **28**(1904), 369-387.

[**B2**] W. Burnside, *On the representation of a group of finite order as an irreducible group of linear substitutions and the direct establishment of the relations between the group-characteristics*, Proceedings London Math. Soc. (2), **1**(1904), 117-123.

[**F53**] *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

[**F54**] *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

[**F56**] *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 944–1015(1897).

[**F59**] *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 482–500(1899).

[**Mo2**] Theodor Molien, *Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionensgruppe*, Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft Universität Jurje (Dorpat) [or, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft], **11**(1897), 259-274.

[**W1**] H. Weyl, *Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen (Aus einem schreiben an Herrn I. Schur)*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 338-345.

[**W2**] H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I-III*, Mathematische Zeitschrift, **23**(1925), 271-301; **24**(1926), 328-376; **24**(1926), 377-395.

Present Day Mathematical Papers on Projective Representations:

[**DaMo**] J.W. Davies and A.O. Morris, *The Schur multiplier of the generalized symmetric group*, J. London Math. Soc., **(2) 8**(1974), 615-620.

[**HoHu**] P.N. Hoffman and J.F. Humphreys, *Projective representations of the symmetric group*, Oxford University Press, 1992.

[**IhYo**] S. Ihara and T. Yokonuma, *On the second cohomology groups (Shur multipliers) of finite reflection groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. 1, **IX**(1965), 155-171.

[**Kar**] G. Karpilovsky, *The Schur multiplier*, London Math. Monographs, New Ser. **2**, Oxford University Press, 1987.

[**Kle**] A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups,* Cambridge Tracts in Mathmatics, **163**, 2005.

[**Mor**] A.O. Morris, *The spin representation of the symmetric group*, Proc. London Math. Soc., **(3) 12**(1962), 55-76.

[**Naz**] M. Nazarov, *Projective representations of the infinite symmetric group*, Advances Soviet Math., **9**(1992), 115-130.

[**Rea**] E.W. Read, *On the Schur multipliers of the finite imprimitive unitary reflexion groups* $G(m,p,n)$, J. London Math. Soc., **(2), 13**(1976), 150-154.